

Государственный университет - Высшая школа экономики
Факультет бизнес информатики

Программа курса математического анализа

Министерство экономического
развития и торговли
Российской Федерации

Министерство
образования
Российской Федерации

Государственный университет -
Высшая школа экономики

Факультет бизнес-информатики

Программа курса «Математический анализ»

для направления «Бизнес-информатика»

(вторая ступень высшего профессионального образования – бакалавриат)

Рекомендована секцией УМС

*Математические и статистические
методы в экономике*

Одобрена на заседании

*кафедры высшей математики
на факультете экономики*

Председатель

Зав. кафедрой

_____ А.С.Шведов

_____ Ф.Т.Алескеров

“ ___ ” _____ 2008 г.

“ ___ ” _____ 2008 __ г.

Утверждена УС

Ученый секретарь

“ ___ ” _____ 2008 г.

Москва

Тематический план учебной дисциплины

| № | Название темы | Всего часов | Аудиторные часы | | Самостоятельная работа |
|---|---|-------------|-----------------|-----------------------|------------------------|
| | | | Лекции | Сем. и практ. Занятия | |
| 1 | 1 курс, 1 модуль Теория пределов и непрерывных функций одной переменной. | 56 | 14 | 14 | 28 |
| 2 | 1 курс, 2 модуль Дифференциальное исчисление для функций одной переменной | 60 | 14 | 14 | 32 |
| 3 | 1 курс, 3 модуль Дифференциальное исчисление для функций многих переменных. | 56 | 14 | 14 | 28 |
| 4 | 1 курс, 4 модуль Интегральное исчисление для функций одной переменной. Двойные интегралы. | 60 | 14 | 14 | 32 |
| 5 | 2 курс, 1 модуль Несобственные интегралы. | 56 | 14 | 14 | 28 |
| 5 | 2 курс, 2 модуль Числовые и функциональные ряды. | 56 | 14 | 14 | 28 |

Формы рубежного контроля

В каждом модуле предусмотрены или контрольная работа, или большое домашнее задание. Во втором модуле 1 курса запланирована зачетная работа, а в четвертом – экзаменационная. В 1 модуле второго курса запланирована экзаменационная работа.

Автор: д.ф.-м.н., профессор А.А.Быков.

Основная рекомендуемая литература¹:

1. [МАНЗ] Математический анализ в вопросах и задачах, В.Ф.Бутузов, Н.Ч.Крутицкая, Г.Н.Медведев, А.А.Шишкин, 5 изд., М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 480с.
2. [ЗУМА] Задачи и упражнения по математическому анализу, И.А.Виноградова, С.Н.Олехник, А.А.Садовничий, изд-во МГУ, 1988.: – 416с.
3. [Кудрявцев, том 1] Математический анализ в двух томах, том 1.
4. [Кудрявцев, том 2] Математический анализ в двух томах, том 2.

¹ Все эти книги можно найти в Internet в pdf и djvu форматах.

Содержание

| | |
|---|----|
| 1. Модуль 1 (7 лекций, 7 семинаров, 28 часов)..... | 7 |
| Лекция k1- m1-01. Предел функции одной переменной..... | 7 |
| 1.1. Предел функции одной переменной..... | 7 |
| 1.1.1. Числовые множества..... | 7 |
| 1.1.2. Понятие функции одной переменной..... | 7 |
| 1.1.3. Ограниченные и неограниченные функции..... | 7 |
| 1.1.4. Предел функции в точке..... | 7 |
| 1.1.5. Односторонние пределы..... | 7 |
| 1.1.6. Предел в бесконечно удаленной точке..... | 8 |
| Лекция k1-m1-02. Сравнение бесконечно малых функций..... | 8 |
| 1.1.7. Бесконечно малые функции..... | 8 |
| 1.1.8. Теоремы о пределах функций..... | 8 |
| 1.1.9. Бесконечно большие функции..... | 8 |
| 1.1.10. Сравнение бесконечно малых функций..... | 8 |
| Лекция k1-m1-03. Первый и второй замечательные пределы..... | 8 |
| 1.1.11. Техника вычисления пределов иррациональных функций..... | 8 |
| 1.1.12. Первый замечательный предел..... | 9 |
| 1.1.13. Теорема о пределе монотонной функции..... | 9 |
| 1.1.14. Второй замечательный предел..... | 9 |
| Лекция k1-m1-04. Непрерывные функции и обратная функция..... | 10 |
| 1.1.15. Непрерывные функции одной переменной..... | 10 |
| 1.1.16. Классификация точек разрыва..... | 10 |
| 1.1.17. Сложная функция..... | 10 |
| 1.1.18. Обратная функция..... | 10 |
| Лекция k1-m1-05. Производные и касательная..... | 10 |
| 1.2. Производная и дифференциал функции одной переменной..... | 10 |
| 1.2.1. Производная функции одной переменной..... | 10 |
| 1.2.2. Вычисление производной..... | 10 |
| 1.2.3. Уравнение касательной..... | 10 |
| 1.2.4. Производные высших порядков..... | 11 |
| 1.2.5. Вычисление старших производных..... | 11 |
| Лекция k1-m1-06. Дифференциал и старшие дифференциалы..... | 11 |
| 1.2.6. Дифференциал функции одной переменной..... | 11 |
| 1.2.7. Вычисление дифференциала функции одной переменной..... | 11 |
| 1.2.8. Дифференциалы высших порядков..... | 11 |
| 1.2.9. Приближенные вычисления с помощью дифференциалов..... | 11 |
| Лекция k1-m2-07. Теоремы о непрерывных и дифференцируемых функциях..... | 11 |
| 1.3. Теоремы о непрерывных и дифференцируемых функциях..... | 11 |
| 1.3.1. Теоремы об ограниченности непрерывных функций..... | 11 |
| 1.3.2. Теоремы о корнях непрерывной функции..... | 12 |
| 1.3.3. Возрастание и убывание функции в точке..... | 12 |
| 1.3.4. Формула конечных приращений..... | 12 |
| 2. Модуль 2 (7 лекций, 7 семинаров, 28 часов)..... | 12 |
| Лекция k1-m2-08. Локальный экстремум..... | 12 |
| 2.1. Локальный экстремум..... | 12 |
| 2.1.1. Локальный экстремум..... | 12 |
| Лекция k1-m2-09. Правило Лопиталю..... | 12 |
| 2.1.2. Правило Лопиталю..... | 12 |
| Лекция k1-m2-10. Формула Тейлора..... | 13 |

| | | |
|--|--|----|
| 2.1.3. | Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано..... | 13 |
| 2.1.4. | Асимптотические формулы..... | 13 |
| 2.1.5. | Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа..... | 13 |
| Лекция k1-m2-11. Числовые последовательности..... | | 13 |
| 2.2. | Числовые последовательности..... | 13 |
| 2.2.1. | Предел последовательности..... | 13 |
| 2.2.2. | Свойства сходящихся последовательностей..... | 13 |
| 2.2.3. | Эталонные последовательности..... | 14 |
| 2.2.4. | Предельные точки числовой последовательности..... | 14 |
| 2.2.5. | Фундаментальные последовательности. Критерий Коши..... | 14 |
| Лекция k1-m2-12. Исследование и построение графиков функций, заданных явным образом..... | | 14 |
| 2.3. | Исследование и построение графиков функций, заданных явным образом..... | 14 |
| 2.3.1. | Классификация точек разрыва..... | 14 |
| 2.3.2. | Асимптоты графика функции..... | 14 |
| 2.3.3. | Возрастание и убывание функции..... | 14 |
| 2.3.4. | Локальный экстремум функции одной переменной..... | 14 |
| Лекция k1-m2-13. Выпуклость и точки перегиба..... | | 15 |
| 2.3.5. | Выпуклость графика функции..... | 15 |
| 2.3.6. | Точки перегиба графика функции..... | 15 |
| Лекция k1-m2-14. Графики параметрических функций..... | | 15 |
| 2.4. | Построение графиков функций, заданных параметрически..... | 15 |
| 2.4.1. | Асимптоты графика параметрической функции..... | 15 |
| 2.4.2. | Возрастание и убывание параметрической функции..... | 15 |
| 2.4.3. | Локальный экстремум параметрической функции..... | 15 |
| 2.4.4. | Выпуклость графика параметрической функции..... | 15 |
| 2.4.5. | Точки перегиба графика функции..... | 15 |
| 2.4.6. | Исследование и построение графиков функций, заданных параметрически..... | 16 |
| 3. | Модуль 3 (7 лекций, 7 семинаров, 28 часов)..... | 16 |
| Лекция k1-m3-15. Предел функции нескольких переменных..... | | 16 |
| 3.1. | Множества и последовательности точек в m -мерном пространстве..... | 16 |
| 3.1.1. | Понятие m -мерного пространства..... | 16 |
| 3.1.2. | Открытые, замкнутые, выпуклые множества точек..... | 16 |
| 3.2. | Предел и непрерывность функции нескольких переменных..... | 16 |
| 3.2.1. | Предел функции нескольких переменных..... | 16 |
| 3.2.2. | Непрерывные функции нескольких переменных..... | 16 |
| Лекция k1-m3-16. Дифференцируемые функции нескольких переменных..... | | 17 |
| 3.3. | Дифференцирование функции нескольких переменных..... | 17 |
| 3.3.1. | Частные производные. Дифференциал..... | 17 |
| 3.3.2. | Касательная плоскость..... | 17 |
| 3.3.3. | Дифференцирование сложной функции нескольких переменных..... | 17 |
| 3.3.4. | Градиент и производная по направлению..... | 17 |
| 3.3.5. | Векторные функции многих переменных..... | 17 |
| Лекция k1-m3-17. Формула Тейлора..... | | 18 |
| 3.3.6. | Производные и дифференциалы высших порядков..... | 18 |
| 3.3.7. | Свойства непрерывных и дифференцируемых функций..... | 18 |
| 3.4. | Формула Тейлора и локальный экстремум..... | 18 |
| 3.4.1. | Формула Тейлора..... | 18 |
| Лекция k1-m3-18. Локальный экстремум..... | | 18 |
| 3.4.2. | Локальный экстремум функции многих переменных..... | 18 |

| | |
|--|----|
| Лекция k3-m3-19. Неявные функции-1..... | 19 |
| 3.5. Неявные функции..... | 19 |
| 3.5.1. Неявные функции, определяемые одним уравнением..... | 19 |
| 3.5.2. Неявные функции, определяемые системой уравнений..... | 19 |
| 3.5.3. Экстремум неявной функции..... | 19 |
| Лекция k1-m3-20. Условный экстремум-1..... | 19 |
| 3.6. Условный экстремум..... | 19 |
| 3.6.1. Понятие условного экстремума..... | 19 |
| 3.6.2. Метод Лагранжа..... | 19 |
| Лекция k1-m3-21. Неявные функции-2..... | 19 |
| 3.7. Неявные функции, определяемые системой уравнений..... | 19 |
| 3.7.1. Неявные функции, определяемые системой уравнений..... | 19 |
| 3.7.2. Экстремум неявной функции, определяемой системой уравнений..... | 20 |
| 4. Модуль 4 (7 лекций, 7 семинаров, 28 часов)..... | 20 |
| Лекция k1-m4-22. Условный экстремум-2..... | 20 |
| 4.1. Условный экстремум с несколькими условиями связи..... | 20 |
| 4.1.1. Метод Лагранжа с несколькими условиями связи..... | 20 |
| Лекция k1-m4-23. Неопределенный интеграл..... | 20 |
| 4.2. Неопределенный интеграл..... | 20 |
| 4.2.1. Первообразная и неопределенный интеграл..... | 20 |
| 4.2.2. Основные неопределенные интегралы..... | 20 |
| 4.2.3. Интегрирование методом замены переменной..... | 20 |
| 4.2.4. Интегрирование по частям..... | 20 |
| Лекция k1-m4-24. Методы интегрирования..... | 20 |
| 4.3. Методы интегрирования..... | 20 |
| 4.3.1. Интегрирование рациональных функций..... | 20 |
| 4.3.2. Интегрирование иррациональных функций..... | 21 |
| 4.3.3. Интегрирование тригонометрических функций..... | 21 |
| Лекция k1-m4-25. Определенный интеграл..... | 21 |
| 4.4. Определенный интеграл..... | 21 |
| 4.4.1. Понятие определенного интеграла..... | 21 |
| 4.4.2. Свойства определенного интеграла..... | 21 |
| Лекция k1-m4-26. Вычисление определенного интеграла..... | 21 |
| 4.5. Вычисление определенного интеграла..... | 21 |
| 4.5.1. Метод замены переменной..... | 21 |
| 4.5.2. Интегрирование по частям..... | 21 |
| Лекция k1-m4-27. Приложения определенного интеграла..... | 22 |
| 4.6. Приложения определенного интеграла..... | 22 |
| 4.6.1. Длина кривой..... | 22 |
| 4.6.2. Площадь фигуры..... | 22 |
| 4.6.3. Объем тела..... | 22 |
| Лекция k1-m4-28. Кратные интегралы..... | 22 |
| 4.7. Кратные интегралы..... | 22 |
| 4.7.1. Двойной интеграл..... | 22 |
| 4.7.2. Тройной интеграл..... | 22 |
| 4.7.3. Приложения кратных интегралов..... | 22 |
| 5. Курс 2, модуль 1 (7 лекций, 7 семинаров, 28 часов)..... | 23 |
| Лекция k2-m1-01. Несобственные интегралы..... | 23 |
| 5.1. Несобственные интегралы..... | 23 |
| 5.1.1. Несобственные интегралы функции одной переменной..... | 23 |

| | | |
|--|---|----|
| 5.1.2. | Эталонные интегралы..... | 23 |
| 5.1.3. | Методы исследования сходимости | 23 |
| Лекция k2-m1-02. Свойства несобственных интегралов. | | 23 |
| 5.1.4. | Методы вычисления несобственных интегралов | 23 |
| 5.1.5. | Абсолютная и условная сходимость..... | 23 |
| 5.1.6. | Признаки условной сходимости..... | 23 |
| Лекция k2-m1-03. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. | | 24 |
| 5.2. | Несобственные интегралы, зависящие от параметра. | 24 |
| 5.2.1. | Определенный интеграл, зависящий от параметра. | 24 |
| 5.2.2. | Несобственные интегралы, зависящие от параметра..... | 24 |
| 5.2.3. | Свойства интегралов, зависящих от параметра..... | 24 |
| Лекция k2-m1-04. Равномерная сходимость несобственных интегралов. | | 24 |
| 5.3. | Равномерно сходящиеся несобственные интегралы, зависящие от параметра. | 24 |
| 5.3.1. | Понятие равномерной сходимости. | 24 |
| 5.3.2. | Признаки равномерной сходимости. | 24 |
| Лекция k2-m1-05. Дифференцирование и интегрирование по параметру..... | | 25 |
| 5.4. | Дифференцирование и интегрирование несобственных интегралов. | 25 |
| 5.4.1. | Свойства равномерно сходящихся несобственных интегралов..... | 25 |
| 5.5. | Применение несобственных интегралов, зависящих от параметра..... | 25 |
| 5.5.1. | Приложения несобственных интегралов..... | 25 |
| Лекция k2-m1-06. Интеграл Фурье. | | 25 |
| 5.6. | Интеграл Фурье и его свойства. | 25 |
| 5.6.1. | Интеграл Фурье и его свойства. | 25 |
| 5.6.2. | Интеграл Фурье в комплексной форме. | 25 |
| Лекция k2-m1-07. Приближенное вычисление интегралов..... | | 25 |
| 5.7. | Приближенное вычисление интегралов. | 25 |
| 5.7.1. | Приближенное вычисление определенного интеграла..... | 25 |
| 5.7.2. | Применение математических инструментов. | 25 |
| 6. | Курс 2, модуль 2 (7 лекций, 7 семинаров, 28 часов) | 26 |
| Лекция k2-m2-08. Числовые ряды с положительными членами..... | | 26 |
| 6.1. | Числовые ряды с положительными членами. | 26 |
| 6.1.1. | Сходящиеся и расходящиеся числовые ряды. | 26 |
| 6.1.2. | Прямое вычисление суммы ряда..... | 26 |
| 6.1.3. | Признаки сходимости рядов с положительными членами..... | 26 |
| Лекция k2-m2-09. Знакопеременные числовые ряды..... | | 26 |
| 6.2. | Знакопеременные числовые ряды. | 26 |
| 6.2.1. | Критерий Коши..... | 26 |
| 6.2.2. | Знакопеременные ряды..... | 26 |
| Лекция k2-m2-10. Функциональные ряды..... | | 26 |
| 6.3. | Функциональные ряды. | 26 |
| 6.3.1. | Понятие равномерной сходимости функционального ряда..... | 26 |
| 6.3.2. | Признаки равномерной сходимости функциональных рядов..... | 26 |
| Лекция k2-m2-11. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов. | | 27 |
| 6.3.3. | Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов. | 27 |
| 6.3.4. | Степенные ряды..... | 27 |
| Лекция k2-m2-12. Ряды Тейлора. | | 27 |
| 6.3.5. | Ряды Тейлора. | 27 |
| Лекция k2-m2-13. Ряды Фурье. | | 27 |
| 6.4. | Ряды Фурье..... | 27 |
| 6.4.1. | Ортогональные системы функций. | 27 |

| | | |
|--|---|----|
| 6.4.2. | Разложение функции в ряд Фурье..... | 27 |
| Лекция k2-m2-14. Вэйвлеты и ряды Хаара. | | 28 |
| 6.5. | Вэйвлеты и ряды Хаара. | 28 |
| 6.5.1. | Ряды по ортогональным системам функций..... | 28 |
| 6.5.2. | Функции Хаара. | 28 |
| 6.5.3. | Разложение функции в ряд Хаара. | 28 |

1. Модуль 1 (7 лекций, 7 семинаров, 28 часов)

Продолжительность каждого занятия составляет 2 академических часа, т.е. 80 минут. В названии лекции вынесена только основная тема данной лекции.

Лекция k1- m1-01. Предел функции одной переменной.

1.1. Предел функции одной переменной.

1.1.1. Числовые множества.

Геометрическое изображение вещественных чисел точками с помощью координатной прямой. Стандартные числовые множества: интервал, сегмент (отрезок), промежуток, полупрямая, числовая прямая. Окрестность точки, проколота окрестность.

1.1.2. Понятие функции одной переменной.

Понятие функции одной переменной. Область определения, множество значений. График функции одной переменной. Четные и нечетные функции. Периодические функции. Графики элементарных функций. Преобразование графиков функций, сдвиг, отражение, растяжение.

1.1.3. Ограниченные и неограниченные функции.

Определение ограниченной и неограниченной функции на множестве. Символ $O(1)$ при $x \in X$ (ограниченная функция на множестве X). Символ $O(1)$ при $x \rightarrow a$ (локально ограниченная функция в окрестности точки $x = a$). Теоремы об ограниченности суммы, разности, произведения двух ограниченных функций.

1.1.4. Предел функции в точке.

Определение предела функции в точке по Коши (на языке логических формул). Геометрическая интерпретация предела функции. Пример прямого доказательства существования предела, $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8$. Теорема о локальной ограниченности функции, имеющей предел. Методика

вычисления пределов элементарных функций. Вычисление пределов типа $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 6}$,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x + 7} - 3}.$$

1.1.5. Односторонние пределы.

Определение одностороннего предела. Теоремы о связи существования и равенства односторонних пределов и существования предела функции в точке. Примеры вычисления односторонних пределов типа $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x - 2}{|x - 2|}$, $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x - 2}{|x - 2|}$. Предел функции при $x \rightarrow +0$, $x \rightarrow -0$.

1.1.6. Предел в бесконечно удаленной точке.

Определение предела функции при $x \rightarrow +\infty$ (по Коши). ● Определение предела функции при $x \rightarrow -\infty$. Вычисление пределов типа $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 6}$.

Читать:

[МАВЗ] Глава III, §1, 2, стр. 40-52.

[ЗУМА] Глава II, §1, стр. 48-66.

Лекция k1-m1-02. Сравнение бесконечно малых функций.

1.1.7. Бесконечно малые функции.

Определение бесконечно малой функции. Обозначение $o(1)$. Теорема о представлении функции, имеющей предел, в виде суммы константы и бесконечно малой функции. Арифметические операции над бесконечно малыми функциями: сумма, $o(1) + o(1) = o(1)$, разность, $o(1) - o(1) = o(1)$, произведение, $o(1) \cdot o(1) = o(1)$. Понятие неопределенности типа $\frac{0}{0}$. Теорема об ограниченности суммы бесконечно малой функции и ограниченной функции в точке, $o(1) + O(1) = O(1)$. Теорема о произведении бесконечно малой функции и ограниченной функции в точке, $o(1) \cdot O(1) = o(1)$.

1.1.8. Теоремы о пределах функций.

Теоремы о пределе суммы двух функций, о пределе разности, о пределе произведения и о пределе частного. Теорема о предельном переходе в неравенствах (без доказательства).

1.1.9. Бесконечно большие функции.

Определение бесконечно большой положительной функции в точке. Определение бесконечно большой отрицательной функции в точке. Соотношение понятий бесконечно малой функции и бесконечно большой функции. Соотношение понятий бесконечно большой функции и неограниченной функции. Арифметические операции над бесконечно большими функциями: сумма, произведение. Понятие неопределенности типа $+\infty - \infty$. Бесконечно большие функции при $x \rightarrow +\infty$. Бесконечно большие функции при $x \rightarrow -\infty$.

1.1.10. Сравнение бесконечно малых функций.

Определение $f(x) = o(x)$ при $x \rightarrow 0$. Определение $f(x) = o(x^n)$ при $x \rightarrow 0$. Определение $f(x) = o(x^{-1})$ при $x \rightarrow +\infty$. Определение $f(x) = o(x^{-n})$ при $x \rightarrow +\infty$. Примеры применения,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{3}, \quad \text{вывод} \quad \text{асимптотических} \quad \text{формул,}$$
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x), \quad \sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} + o(x) \quad \text{при} \quad x \rightarrow 0.$$

Читать:

[МАВЗ] Глава III, §3, стр. 52-58.

[ЗУМА] Глава II, §1, стр. 48-66.

Лекция k1-m1-03. Первый и второй замечательные пределы.

1.1.11. Техника вычисления пределов иррациональных функций.

Применение асимптотических формул $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$, $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} + o(x)$.

Вычисление пределов типа $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$.

Применение асимптотической формулы $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \rightarrow 0$.

Вычисление пределов типа $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - (1 + x/2)}{x^2}$.

Вычисление пределов типа $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x})$, .

1.1.12. Первый замечательный предел.

Формула, выражающая первый замечательный предел. Геометрическая интерпретация. Асимптотические формулы $\sin = x + o(x)$, $\sin = x + o(x^2)$ при $x \rightarrow 0$.

Асимптотические формулы $\cos = 1 + o(1)$, $\cos = 1 + o(x)$, $\cos = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ при $x \rightarrow 0$.

Асимптотические формулы $\operatorname{tg} = x + o(x^2)$, $\operatorname{tg} = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$ при $x \rightarrow 0$.

Вычисление пределов типа $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$.

Вычисление пределов типа $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x - \sin \beta x}{x}$.

Вычисление пределов типа $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha + x) - \sin a}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\alpha + x) - \cos a}{x}$.

Вычисление пределов типа $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a + x) - 2 \sin a + \sin(a - x)}{x^2}$.

Вычисление пределов типа $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - 2 \sin 2x + \sin x}{x^3}$.

Вычисление пределов типа $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x^2}{x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha x}{\operatorname{tg} \beta x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(a + x) - 2 \operatorname{tg} a + \operatorname{tg}(x - a)}{x^2}$.

Читать:

[МАНЗ] Глава III, §4, стр. 58-65.

[ЗУМА] Глава II, §1, стр. 77-80.

1.1.13. Теорема о пределе монотонной функции.

Теорема о пределе монотонной ограниченной на интервале функции. Теорема о пределе монотонной ограниченной на полупрямой функции.

1.1.14. Второй замечательный предел.

Формула, выражающая второй замечательный предел. Число e .

Вычисление пределов типа $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \alpha x)^{\frac{\beta}{x}}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Асимптотические формулы $\ln(1+x) = o(1)$, $\ln(1+x) = x + o(x)$, применение для решения задач, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ при $x \rightarrow 0$ и аналогичные.

Асимптотические формулы $e^x = 1 + o(1)$, $e^x = 1 + x + o(x)$, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

при $x \rightarrow 0$ и аналогичные и их применение для решения задач.

Читать:

[МАНЗ] Глава III, §4, стр. 58-65.

[ЗУМА] Глава II, §1, стр. 77-80.

Лекция k1-m1-04. Непрерывные функции и обратная функция.

1.1.15. Непрерывные функции одной переменной.

Непрерывность функции одной переменной в точке. Односторонняя непрерывность справа и слева, связь с непрерывностью в точке. Арифметические операции над непрерывными функциями. Непрерывность основных элементарных функций.

1.1.16. Классификация точек разрыва.

Точки разрыва устранимые, первого рода, второго рода. Примеры.

1.1.17. Сложная функция.

Понятие сложной функции. Теорема о непрерывности сложной функции. Непрерывность многочлена и дробно-рациональной функции.

1.1.18. Обратная функция.

Понятие обратной функции. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции (только для монотонной функции, без доказательства). Непрерывность обратных тригонометрических функций. Непрерывность показательной и логарифмической функции. Графики.

Читать:

[МАНЗ] Глава I, §2, стр. 48-52.

[ЗУМА] Глава I, §2, 3, стр. 14-20.

Лекция k1-m1-05. Производные и касательная.

1.2. Производная и дифференциал функции одной переменной.

1.2.1. Производная функции одной переменной.

Определение производной функции, ее геометрический, физический и экономический смысл. Таблица производных элементарных функций. Односторонние производные. Теорема о связи существования и равенства односторонних производных и производной функции в точке.

1.2.2. Вычисление производной.

Правила (теоремы) вычисления производной суммы, произведения и частного от деления двух функций. Производная обратной функции (без доказательства). Теорема о производной сложной функции. Производная степенной и показательной функций. Теорема о производной обратной функции и ее геометрическая интерпретация. Теорема о производной сложной функции.

1.2.3. Уравнение касательной.

Понятие, определение и уравнение касательной.

1.2.4. Производные высших порядков.

Понятие второй производной. Понятие и уравнение соприкасающейся параболы. Понятие и уравнение соприкасающейся окружности. Определение производной n -го порядка. Правила вычисления производной суммы и произведения (теорема). Формула Лейбница для n -й производной произведения двух функций (теорема).

1.2.5. Вычисление старших производных.

Старшие производные степенной и показательной функций. Старшие производные логарифмической функции. Старшие производные тригонометрических функций. Старшие производные функций типа xe^x , x^2e^x . Рекуррентные методы.

Читать:

[МАНЗ] Глава IV, §1, стр. 65-74.

[ЗУМА] Глава III, §1, стр. 89-100.

Лекция k1-m1-06. Дифференциал и старшие дифференциалы.

1.2.6. Дифференциал функции одной переменной.

Определение дифференциала функции в точке. Определение дифференцируемой функции в точке. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости (теорема). Геометрический смысл дифференциала. Теорема о непрерывности дифференцируемой функции в точке.

1.2.7. Вычисление дифференциала функции одной переменной.

Правила вычисления дифференциала суммы, разности, произведения и частного двух функций (теорема). Вычисление первого дифференциала сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала.

1.2.8. Дифференциалы высших порядков.

Понятие дифференциала второго порядка. Понятие дифференциала n -го порядка. Дифференциал второго порядка сложной функции.

1.2.9. Приближенные вычисления с помощью дифференциалов.

Понятие формулы Тейлора и применение для приближенных вычислений. Использование первого дифференциала для приближенных вычислений. Использование второго дифференциала для приближенных вычислений.

Читать:

[МАНЗ] Глава IV, §2, 3, стр. 77-85.

[ЗУМА] Глава III, §2, стр. 101-103.

Лекция k1-m2-07. Теоремы о непрерывных и дифференцируемых функциях.

1.3. Теоремы о непрерывных и дифференцируемых функциях.

1.3.1. Теоремы об ограниченности непрерывных функций.

Теоремы о локальной ограниченности и об устойчивости знака непрерывной функции в точке. Ограниченность непрерывной на сегменте функции (первая теорема Вейерштрасса).

1.3.2. Теоремы о корнях непрерывной функции.

Теорема о прохождении непрерывной на сегменте функции через любое промежуточное значение. Теорема о существовании корня непрерывной функции, принимающей значения разных знаков на концах сегмента.

1.3.3. Возрастание и убывание функции в точке.

Возрастание и убывание функции в точке. Достаточные условия возрастания функции в точке. Пример, показывающий, что положительность производной в точке не является необходимым условием возрастания функции в этой точке.

1.3.4. Формула конечных приращений.

Теорема Ролля и ее геометрическая интерпретация. Теорема Лагранжа, ее геометрический и экономический смысл. Следствия из теоремы Лагранжа: условие постоянства функции на промежутке, признак монотонности функции на промежутке. Исследование возрастания и убывания функции. Формула Коши.

Читать:

[МАНЗ] Глава VI, §1, 3, стр. 108-111, 116-121.

[ЗУМА] Глава III, §3, стр. 110-113.

2. Модуль 2 (7 лекций, 7 семинаров, 28 часов)

Лекция k1-т2-08. Локальный экстремум.

2.1. Локальный экстремум.

2.1.1. Локальный экстремум.

Понятие локального экстремума функции. Необходимое условие локального экстремума дифференцируемой функции (теорема). Достаточное условие локального экстремума непрерывной дифференцируемой функции (теорема). Достаточное условие локального экстремума дважды дифференцируемой функции (теорема). Исследование локального экстремума.

Читать:

[МАНЗ] Глава VI, §3, стр. 116-121.

[ЗУМА] Глава III, §3, стр. 110-113.

Лекция k1-т2-09. Правило Лопиталья.

2.1.2. Правило Лопиталья.

Правило Лопиталья: раскрытие неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ (теорема).

Правило Лопиталья для случая, когда $x \rightarrow +\infty$ (теорема без доказательства).

Правило Лопиталья для неопределенности типа $\frac{\infty}{\infty}$ (теорема без доказательства).

Вычисление пределов с помощью однократного применения правила Лопиталья.

Вычисление пределов с помощью многократного применения правила Лопиталья.

Читать:

[МАНЗ] Глава VI, §4, стр. 122-125.

[ЗУМА] Глава III, §3, стр. 113-117.

Лекция k1-т2-10. Формула Тейлора

2.1.3. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Многочлен Тейлора. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (теорема без доказательства). Формула Маклорена. Разложение по формуле Тейлора элементарных функций.

2.1.4. Асимптотические формулы.

Понятие асимптотической формулы. Вывод и применение формул

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3), \quad \operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4), \quad \sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} + o(x),$$

$$\ln x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + o(x^2), \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2),$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2), \quad \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^5), \quad \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

и аналогичных для вычисления пределов.

2.1.5. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Остаточный член в форме Лагранжа (теорема без доказательства). Методика оценки остаточного члена формулы Тейлора в форме Лагранжа. Вычисление наибольшего слагаемого многочлена Тейлора. Приближенное вычисление значения функции. Вычисление сложных процентов с высокой точностью.

Читать:

[МАВЗ] Глава VI, §5, стр. 125-130.

[ЗУМА] Глава III, §3, стр. 113-117.

Лекция k1-т2-11. Числовые последовательности.

2.2. Числовые последовательности.

2.2.1. Предел последовательности.

Понятие числовой последовательности. Ограниченные и неограниченные числовые последовательности. Определение предела последовательности. Ограниченность сходящейся последовательности (теорема). Определение бесконечно малой последовательности. Взаимосвязь бесконечно малых и сходящихся последовательностей (теорема). Арифметические операции с бесконечно малыми последовательностями (теоремы). Определение бесконечно большой последовательности. Арифметические операции с бесконечно большими последовательностями (теоремы). Теоремы о взаимосвязи между бесконечно малыми и бесконечно большими последовательностями.

2.2.2. Свойства сходящихся последовательностей.

Арифметические операции, предельный переход в неравенствах (теорема без доказательства). Понятие о неопределенностях типа $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$. Другие типы неопределенностей, примеры. Исследование неопределенностей методом Лопиталю. Исследование неопределенностей методом асимптотических формул. Вычисление пределов выражений, содержащих радикалы. Понятие и определение монотонной последовательности. Необходимое и достаточное условие сходимости монотонной последовательности (теорема без доказательства).

2.2.3. Эталонные последовательности.

Второй замечательный предел для последовательностей. Число e . Вычисление пределов типа $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{\beta n}$. Эталонные последовательности: $\sqrt[n]{b}$, $\log_a n$, n^β , b^n , $n!$, n^n . Предел

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b}$ при $\beta > 0$. Предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n^\beta}$ при $\beta > 0$, $a > 1$. Предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\beta}{b^n}$ при $b > 1$. Предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^n}{n!}$. Предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$.

2.2.4. Предельные точки числовой последовательности.

Понятие подпоследовательности числовой последовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса: из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность (без доказательства). Два эквивалентных определения предельной точки числовой последовательности. Свойства множества всех предельных точек ограниченной последовательности. Верхний и нижний пределы последовательности. Соотношение множества всех верхних граней, точной верхней грани, верхнего предела (теорема без доказательства). Верхний и нижний пределы неограниченных последовательностей.

2.2.5. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши.

Фундаментальная последовательность. Ограниченность фундаментальной последовательности. Критерий Коши сходимости числовых последовательностей (теорема без доказательства). Критерий Коши предела функции в точке (теорема без доказательства). Определение предела по Гейне (на основе понятия предела последовательности. Теорема об эквивалентности двух определений предела функции (без доказательства).

Читать:

[МАНЗ] Глава II, §1-5, стр. 16-33.

[ЗУМА] Глава II, §2, стр. 67-70.

Лекция k1-m2-12. Исследование и построение графиков функций, заданных явным образом.

2.3. Исследование и построение графиков функций, заданных явным образом.

2.3.1. Классификация точек разрыва.

Точки непрерывности и точки разрыва функций. Классификация точек разрыва: точки устранимого разрыва, точки разрыва 1 рода, точки разрыва 2 рода.

2.3.2. Асимптоты графика функции.

Вертикальные и наклонные асимптоты графика функции. Необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты.

2.3.3. Возрастание и убывание функции.

Возрастание и убывание функции. Отыскание промежутков монотонности с помощью производной.

2.3.4. Локальный экстремум функции одной переменной.

Понятие локального экстремума. Точки возможного экстремума функции.

Достаточные условия локального экстремума, основанные на исследовании первых и вторых производных (теоремы).

Читать:

[МАВЗ] Глава VIII, §1, стр. 130-136.

[ЗУМА] Глава III, §3, стр. 117-122.

Лекция k1-m2-13. Выпуклость и точки перегиба.

2.3.5. Выпуклость графика функции.

Понятие и определение направления выпуклости графика функции на данном интервале. Теорема о достаточном условии выпуклости вниз (вверх) графика функции на данном интервале (без доказательства). Геометрическая интерпретация этой теоремы.

2.3.6. Точки перегиба графика функции.

Определение точек перегиба графика функции. Необходимое условие перегиба графика дважды дифференцируемой функции (теоремы без доказательства). Пример, показывающий, что условие не является достаточным условием перегиба дважды дифференцируемой функции. Точки возможного перегиба графика функции. Различные формы достаточных условий перегиба, использующие первые, вторые, третьи производные (теоремы без доказательства).

Читать:

[МАВЗ] Глава VIII, §1, стр. 130-136.

[ЗУМА] Глава III, §3, стр. 117-122.

Лекция k1-m2-14. Графики параметрических функций.

2.4. Построение графиков функций, заданных параметрически.

2.4.1. Асимптоты графика параметрической функции.

Вертикальные и наклонные асимптоты графика функции. ■Необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты (теорема).

2.4.2. Возрастание и убывание параметрической функции.

Возрастание и убывание функции. Отыскание промежутков монотонности функции методом исследования знака первой производной.

2.4.3. Локальный экстремум параметрической функции.

Точки возможного экстремума функции. Достаточные условия локального экстремума, основанные на исследовании первых и вторых производных (теоремы без доказательства).

2.4.4. Выпуклость графика параметрической функции.

Теорема о достаточном условии выпуклости вниз (вверх) графика функции на данном интервале (без доказательства). Геометрическая интерпретация этой теоремы.

2.4.5. Точки перегиба графика функции.

Необходимое условие перегиба графика дважды дифференцируемой функции (теорема без доказательства). Пример, показывающий, что условие не является достаточным условием перегиба дважды дифференцируемой функции. Точки возможного перегиба графика функции. Различные формы достаточных условий перегиба, использующие первые, вторые, третьи производные (теоремы без доказательства).

2.4.6. Исследование и построение графиков функций, заданных параметрически.

Общая схема исследования функции и построение графика. Примеры исследования по этой схеме.

Читать:

[МАВЗ] Глава VIII, §2, стр. 137-142.

[ЗУМА] Глава III, §3, стр. 117-122.

3. Модуль 3 (7 лекций, 7 семинаров, 28 часов)

Лекция k1-т3-15. Предел функции нескольких переменных.

3.1. Множества и последовательности точек в m -мерном пространстве.

3.1.1. Понятие m -мерного пространства.

Евклидово m -мерное пространство. Шар, сфера, параллелепипед. Окрестность точки, проколота окрестность. Шаровая, прямоугольная и кубическая окрестности. Ограниченные и неограниченные последовательности точек. Бесконечно большая последовательность. Предел последовательности. Предельные точки. Связь между сходимостью последовательности точек и покоординатной сходимостью.

3.1.2. Открытые, замкнутые, выпуклые множества точек.

Внутренние и граничные точки множества, предельные точки, изолированные точки. Открытые и замкнутые множества на плоскости и в пространстве. Ограниченные и неограниченные множества на плоскости и в пространстве. Связные и несвязные множества. Замыкание множества. Выпуклые и невыпуклые множества в пространстве. Выпуклая оболочка множества точек на плоскости.

Читать:

[МАВЗ] Глава X, §1, 2, стр. 191-204.

[ЗУМА] Глава III, §1, стр. 286-291.

3.2. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.

3.2.1. Предел функции нескольких переменных.

Понятие функции нескольких переменных (ФНП). Способы визуализации. Карта линий равного уровня. Два определения предела функции в точке (по Коши и по Гейне), их эквивалентность. Бесконечно малые функции в точке. Предел функции в бесконечно удаленной точке. Арифметические операции над функциями, имеющими предел в данной точке. Повторные пределы.

3.2.2. Непрерывные функции нескольких переменных.

Непрерывность функции нескольких переменных по совокупности переменных и по каждой переменной, связь между ними.

Читать:

[МАВЗ] Глава X, §3, 4, стр. 205-212.

[ЗУМА] Глава III, §1, стр. 286-291.

Лекция k1-т3-16. Дифференцируемые функции нескольких переменных.

3.3. Дифференцирование функции нескольких переменных.

3.3.1. Частные производные. Дифференциал.

Частные производные ФНП. Геометрический смысл частной производной.

Определение дифференцируемой ФНП. Дифференциал функции нескольких переменных.

Связь между дифференцируемостью и существованием частных производных.

Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции в точке.

Необходимое условие дифференцируемости функции в точке.

Теорема о достаточных условиях дифференцируемости функции (без доказательства).

Формулы для вычисления дифференциала суммы, разности, произведения и частного двух функций.

3.3.2. Касательная плоскость.

Определение касательной плоскости. Существование касательной плоскости у графика дифференцируемой функции двух переменных.

Уравнение касательной плоскости.

Геометрический смысл дифференцируемости функции двух переменных.

3.3.3. Дифференцирование сложной функции нескольких переменных.

Понятие сложной функции.

Частные производные и дифференцируемость сложной функции.

Дифференциал сложной функции.

Инвариантность формы первого дифференциала.

3.3.4. Градиент и производная по направлению.

Понятие производной по направлению и градиента.

Направление градиента и направление линии равного уровня дифференцируемой функции в заданной точке. Геометрический смысл градиента функции в точке.

Теорема о существовании производной по направлению дифференцируемой ФНП.

Линии и поверхности уровня.

Теорема Эйлера об однородных функциях.

3.3.5. Векторные функции многих переменных

Понятие векторной функции многих переменных.

Матрица Якоби и якобиан.

Дифференцирование сложных векторных функций.

Векторно-матричная форма записи первого дифференциала.

Отображения, задаваемые простейшими векторными функциями и их геометрическая интерпретация.

Функции размерности 2 и 3 от двух и трех переменных. Геометрическая интерпретация якобиана.

Читать:

[МАНЗ] Глава X, §4, стр. 213-224.

[ЗУМА] Глава III, §2, 3, стр. 291-302.

Лекция k1-m3-17. Формула Тейлора.

3.3.6. Производные и дифференциалы высших порядков.

Частные производные высших порядков.

Достаточные условия равенства смешанных производных.

Дифференциал второго порядка. Дифференциалы высших порядков.

Неинвариантность формы второго дифференциала сложной функции.

Векторно-матричная форма записи первого и второго дифференциалов ФНП.

Матрица Гессе.

3.3.7. Свойства непрерывных и дифференцируемых функций.

Ограниченность непрерывной функции, достижение непрерывной функцией своего максимального и минимального значений.

3.4. Формула Тейлора и локальный экстремум.

3.4.1. Формула Тейлора.

Многочлен Тейлора. Формула Тейлора. Остаточный член.

Остаточный член в форме Пеано.

Остаточный член в форме Лагранжа.

Методика оценки остаточного члена для функции с ограниченными производными.

Геометрический смысл формулы Тейлора с остаточным членом первого порядка.

Геометрический смысл формулы Тейлора с остаточным членом второго порядка.

Геометрический смысл формулы Тейлора с остаточным членом третьего порядка.

Приближенное вычисление значений функции.

Читать:

[МАНЗ] Глава X, §5, стр. 225-235.

[ЗУМА] Глава III, §4, стр. 303-309.

Лекция k1-m3-18. Локальный экстремум.

3.4.2. Локальный экстремум функции многих переменных.

Понятие локального экстремума ФМП.

Необходимое условие локального экстремума дифференцируемой функции.

Понятие квадратичной формы и ее матрицы.

Понятие знакоопределенной квадратичной формы.

Критерий Сильвестра.

Теорема о достаточном условии экстремума функции многих переменных.

Методика исследования локального экстремума.

Особенности графика и карты линий равного уровня дважды дифференцируемой функции в окрестности точки локального экстремума.

Выпуклые и строго выпуклые функции. Экстремум выпуклой функции.

Читать:

[МАНЗ] Глава X, §6, стр. 236-242.

Лекция k3-m3-19. Неявные функции-1.

3.5. Неявные функции.

3.5.1. Неявные функции, определяемые одним уравнением.

Понятие неявной функции.

Формула для производных неявной функции.

Теорема о существовании и непрерывности неявной функции, определяемой одним уравнением.

Теорема о дифференцируемой неявной функции, определяемой одним уравнением в точке.

3.5.2. Неявные функции, определяемые системой уравнений.

Вычисление частных производных неявных функций, определяемых системой уравнений.

Теорема о старших производных неявной функции, определяемой системой уравнений.

3.5.3. Экстремум неявной функции.

Теорема об экстремуме неявной функции, определяемой одним уравнением и определяемой системой уравнений.

Читать:

[МАВЗ] Глава XI, §1, стр. 243-256.

[ЗУМА] Глава III, §5, стр. 310-319.

Лекция k1-m3-20. Условный экстремум-1.

3.6. Условный экстремум.

3.6.1. Понятие условного экстремума.

Понятие условного экстремума.

Необходимое условие условного экстремума.

Метод исключения переменных: сведение задачи об условном экстремуме к задаче о безусловном экстремуме.

3.6.2. Метод Лагранжа.

Метод Лагранжа и его геометрическая интерпретация.

Необходимые условия условного экстремума в форме Лагранжа.

Достаточные условия условного экстремума в форме Лагранжа.

Метод окаймленного гессиана, исследование достаточных условий условного экстремума.

Читать:

[МАВЗ] Глава XI, §3, стр. 261-269.

[ЗУМА] Глава III, §8, стр. 326-350.

Лекция k1-m3-21. Неявные функции-2.

3.7. Неявные функции, определяемые системой уравнений.

3.7.1. Неявные функции, определяемые системой уравнений.

Вычисление частных производных неявных функций, определяемых системой уравнений.

Теорема о старших производных неявной функции, определяемой системой уравнений.

3.7.2. Экстремум неявной функции, определяемой системой уравнений.

Теорема об экстремуме неявной функции, определяемой системой уравнений.
Методика расчета точек возможного экстремума и проверка достаточных условий.

Читать:

[МАНЗ] Глава XI, §1, стр. 243-256.

[ЗУМА] Глава III, §5, стр. 310-319.

4. Модуль 4 (7 лекций, 7 семинаров, 28 часов)

Лекция k1-m4-22. Условный экстремум-2.

4.1. Условный экстремум с несколькими условиями связи.

4.1.1. Метод Лагранжа с несколькими условиями связи.

Метод Лагранжа и его геометрическая интерпретация.
Необходимые условия условного экстремума в форме Лагранжа.
Достаточные условия условного экстремума в форме Лагранжа.
Метод окаймленного гессиана исследования достаточных условий условного экстремума.

Читать:

[МАНЗ] Глава XI, §3, стр. 261-269.

[ЗУМА] Глава III, §8, стр. 326-350.

Лекция k1-m4-23. Неопределенный интеграл.

4.2. Неопределенный интеграл.

4.2.1. Первообразная и неопределенный интеграл.

Понятие первообразной функции одной переменной на промежутке.
Теорема о том, что любые две первообразных для данной функции отличаются на константу.
Неопределенный интеграл - совокупность всех первообразных заданной функции на заданном промежутке.
Основные свойства неопределенных интегралов.

4.2.2. Основные неопределенные интегралы.

Вычисление интегралов от простейших рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных, логарифмических функций.

4.2.3. Интегрирование методом замены переменной.

4.2.4. Интегрирование по частям.

Читать:

[МАНЗ] Глава V, §1, 2, стр. 87-96.

[ЗУМА] Часть 2, Глава I, §1, 2, стр. 174-181.

Лекция k1-m4-24. Методы интегрирования.

4.3. Методы интегрирования.

4.3.1. Интегрирование рациональных функций.

Понятие о рациональной функции. Выделение целой и дробной частей.
Деление многочленов столбиком.
Разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей.

4.3.2. Интегрирование иррациональных функций.

Различные приемы интегрирования иррациональных функций.

Универсальная подстановка, сведение к интегралу от рациональной функции.

4.3.3. Интегрирование тригонометрических функций.

Различные приемы интегрирования тригонометрических функций.

Универсальная тригонометрическая подстановка, сведение к интегралу от рациональной функции.

Читать:

[МАНЗ] Глава V, §3, 4, стр. 91-96.

[ЗУМА] Часть 2, Глава I, §3, 4, 5, стр. 182-208.

Лекция k1-m4-25. Определенный интеграл.

4.4. Определенный интеграл.

4.4.1. Понятие определенного интеграла.

Определенный интеграл как обобщение понятия площади плоской фигуры.

Определенный интеграл как предел интегральных сумм.

Пример ограниченной неинтегрируемой функции.

Верхняя и нижняя интегральные суммы и их геометрическая интерпретация.

Необходимое и достаточное условие интегрируемости ограниченной функции на сегменте.

Некоторые классы интегрируемых на сегменте функций: непрерывные функции, кусочно-непрерывные функции, монотонные ограниченные функции.

4.4.2. Свойства определенного интеграла.

Формулы среднего значения.

Существование первообразной для непрерывной функции.

Формула Ньютона-Лейбница.

Читать:

[МАНЗ] Глава VIII, §5, стр. 167-171

[ЗУМА] Часть 2, Глава II, §1, стр. 236-246

Лекция k1-m4-26. Вычисление определенного интеграла.

4.5. Вычисление определенного интеграла.

4.5.1. Метод замены переменной.

Вычисление интегралов методом замены переменной.

4.5.2. Интегрирование по частям.

Интегрирование по частям. Двукратное интегрирование по частям. Вычисление интегралов

типа $\int_a^b e^{ax} \sin bx \, dx$, $\int_a^b e^{ax} \cos bx \, dx$, $\int_a^b \sin(\ln x) \, dx$, $\int_a^b \cos(\ln x) \, dx$.

Читать:

[МАНЗ] Глава VIII, §5, стр. 167-171

[ЗУМА] Часть 2, Глава II, §1, стр. 236-246

Лекция k1-т4-27. Приложения определенного интеграла.

4.6. Приложения определенного интеграла.

4.6.1. Длина кривой.

Понятие длины плоской кривой. Вычисление длины кривой, заданной явным образом.
Вычисление длины плоской кривой, заданной параметрически.
Вычисление длины плоской кривой, заданной неявным образом.

4.6.2. Площадь фигуры.

Понятие площади плоской фигуры.
Вычисление площади плоской фигуры, заданной явным образом.
Вычисление площади плоской фигуры, заданной параметрически.
Вычисление площади плоской фигуры, заданной неявным образом.

4.6.3. Объем тела.

Понятие объема. Вычисление объема тела вращения, полученного вращением плоской фигуры, заданной явным образом. Вычисление объема тела вращения, полученного вращением плоской фигуры, заданной параметрически. Вычисление объема тела вращения, полученного вращением плоской фигуры, заданной неявным образом. Вычисление координат центра масс и момента инерции кривой, плоской фигуры, тела вращения.

Читать:

[МАНЗ] Глава VIII, §5, стр. 167-171

[ЗУМА] Часть 2, Глава II, §2, 3, стр. 246-265.

Лекция k1-т4-28. Кратные интегралы.

4.7. Кратные интегралы.

4.7.1. Двойной интеграл

Понятие двойного интеграла и основные его свойства. Сведение двойного интеграла к повторному. Ортогональные координаты на плоскости. Полярные координаты. Замена переменных в двойном интеграле. Якобиан.

4.7.2. Тройной интеграл.

Понятие и свойства тройного интеграла. Сведение тройного интеграла к повторному. Ортогональные координаты в пространстве. Цилиндрические и сферические координаты. Замена переменных в тройном интеграле. Якобиан.

4.7.3. Приложения кратных интегралов.

Вычисление координаты центра масс, дисперсии.

Читать:

[МАНЗ] Глава XII, §1, 2, стр. 279-300.

[ЗУМА] Часть 2, Глава II, §2, 3, стр. 43-67.

5. Курс 2, модуль 1 (7 лекций, 7 семинаров, 28 часов)

Лекция k2-т1-01. Несобственные интегралы.

5.1. Несобственные интегралы.

5.1.1. Несобственные интегралы функции одной переменной

Несобственный интеграл - обобщение понятия площади для определенных классов неограниченных плоских областей. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (I рода). Несобственные интегралы от неограниченных функций (II рода). Понятие сходимости. Сходящиеся и расходящиеся несобственные интегралы.

5.1.2. Эталонные интегралы

Сходимость и расходимость $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$, $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ при различных значениях p . Сходимость и расходимость $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$ при различных значениях p и q . Сходимость и расходимость $\int_a^{+\infty} e^{-px} dx$ при различных значениях p .

5.1.3. Методы исследования сходимости

Понятие эталонного интеграла. Признаки сравнения для несобственных интегралов от неотрицательных функций. Предельный признак сравнения (сравнение с $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ или с $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$).

Примеры сходящихся и расходящихся несобственных интегралов.

Читать:

[ЗУМА] Часть 2, Глава II, §1, стр. 236-246.

[Кудрявцев, том 1] Глава 3, §33.1-333., стр. 442-456, §34.1-34.3, стр. 459-469 (доказательства опускаем).

Лекция k2-т1-02. Свойства несобственных интегралов.

5.1.4. Методы вычисления несобственных интегралов

Замена переменной в несобственных интегралах. Интегрирование по частям. Сходимость и расходимость $\int_a^{+\infty} e^{-px} \sin qx dx$ при различных значениях p , q . Сходимость и расходимость $\int_a^{+\infty} t^{-p} \sin(q \ln t) dt$ при различных значениях p и q .

5.1.5. Абсолютная и условная сходимость

Абсолютно сходящиеся несобственные интегралы. Условно сходящиеся несобственные интегралы. Условие Коши. Критерий Коши.

5.1.6. Признаки условной сходимости

Признаки сходимости и условной сходимости. Признак Дирихле-Абеля.

Читать:

[ЗУМА] Часть 2, Глава II, §1, стр. 236-246.

[Кудрявцев, том 1] Глава 3, §33.4., стр. 457-459, §34.4, стр. 469-476 (доказательства опускаем).

Лекция k2-m1-03. Несобственные интегралы, зависящие от параметра.

5.2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра.

5.2.1. Определенный интеграл, зависящий от параметра.

Определенный интеграл, зависящий от параметра. Дифференцирование и интегрирование по параметру. Вычисление интегралов типа $\int_0^1 x^p (\ln x)^q dx$ при $p > 0$ и $q > 0$.

Читать:

[ЗУМА] Часть 2, Глава II, §1, стр. 236-246.

[Кудрявцев, том 2] Глава 6, §53.1-53.2., стр. 215-220 (доказательства опускаем).

5.2.2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра.

Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Область сходимости.

Читать:

[ЗУМА] Часть 2, Глава II, §1, стр. 236-246.

[Кудрявцев, том 2] Глава 6, §54.1-54.2 стр. 220-230 (доказательства опускаем).

5.2.3. Свойства интегралов, зависящих от параметра.

Применение дифференцирования и интегрирования по параметру для вычисления несобственных интегралов. Вычисление интегралов типа $\int_0^1 x^p (\ln x)^q dx$ при $p > -1$ и $q > -1$.

Читать:

[ЗУМА] Часть 2, Глава II, §1, стр. 236-246.

[Кудрявцев, том 2] Глава 6, §54.3 стр. 230-235 (доказательства опускаем).

Лекция k2-m1-04. Равномерная сходимость несобственных интегралов.

5.3. Равномерно сходящиеся несобственные интегралы, зависящие от параметра.

5.3.1. Понятие равномерной сходимости.

Понятие равномерной сходимости. Определение равномерной сходимости. Примеры равномерно сходящихся интегралов.

5.3.2. Признаки равномерной сходимости.

Признак Вейерштрасса. Признак Абеля-Дирихле. Критерий Коши.

Читать:

[Кудрявцев, том 2] Глава 6, §54.1-54.2 стр. 220-230 (доказательства опускаем).

Лекция k2-m1-05. Дифференцирование и интегрирование по параметру.

5.4. Дифференцирование и интегрирование несобственных интегралов.

5.4.1. Свойства равномерно сходящихся несобственных интегралов.

Предельный переход, дифференцирование и интегрирование по параметру. Теоремы о корректности этих операций. Вычисление несобственных интегралов методом дифференцирования по параметру.

Читать:

[Кудрявцев, том 2] Глава 6, §54.1-54.2 стр. 220-230 (доказательства опускаем).

5.5. Применение несобственных интегралов, зависящих от параметра.

5.5.1. Приложения несобственных интегралов.

Вычисление моментов случайной величины с нормальным распределением методом дифференцирования по параметру. Вычисление средних значений некоторых элементарных функций от случайной величины с нормальным распределением.

Читать:

[Кудрявцев, том 2] Глава 6, §54.3 стр. 235-240 (доказательства опускаем).

Лекция k2-m1-06. Интеграл Фурье.

5.6. Интеграл Фурье и его свойства.

5.6.1. Интеграл Фурье и его свойства.

Понятие об интеграле Фурье. Свойства интеграла Фурье.

5.6.2. Интеграл Фурье в комплексной форме.

Прямое и обратное преобразование Фурье. Интеграл Фурье в комплексной форме.

Читать:

[Кудрявцев, том 2] Глава 7, §56.1-56.4, стр. 278-290 (доказательства опускаем).

Лекция k2-m1-07. Приближенное вычисление интегралов.

5.7. Приближенное вычисление интегралов.

5.7.1. Приближенное вычисление определенного интеграла.

Метод прямоугольников. Метод трапеций. Метод парабол.

5.7.2. Применение математических инструментов.

Пакеты MathCad, MatLab, Matematica, Maple.

6. Курс 2, модуль 2 (7 лекций, 7 семинаров, 28 часов)

Лекция k2-т2-08. Числовые ряды с положительными членами.

6.1. Числовые ряды с положительными членами.

6.1.1. Сходящиеся и расходящиеся числовые ряды.

Числовой ряд и его основные элементы. Общий член, частичная сумма, остаток. Сходимость и свойства сходящихся рядов. Арифметические операции с числовыми рядами. Необходимое условие сходимости ряда.

6.1.2. Прямое вычисление суммы ряда.

Методика вычисления суммы рядов типа $\sum_{k=1}^{+\infty} x^k$, $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^k$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.

6.1.3. Признаки сходимости рядов с положительными членами.

Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами. Интегральный признак, признаки сравнения, признаки Даламбера и Коши. Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p}$ при различных значениях p .

Читать:

[Кудрявцев, том 1] Глава 4, §35.1-35.4, стр. 477-495 (доказательства опускаем).

Лекция k2-т2-09. Знакопеременные числовые ряды.

6.2. Знакопеременные числовые ряды.

6.2.1. Критерий Коши.

Условие Коши. Критерий Коши.

6.2.2. Знакопеременные ряды.

Знакопеременные ряды. Знакопеременные ряды, признак сходимости Лейбница. Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Перестановка членов абсолютно и условно сходящихся рядов. Признаки Дирихле и Абеля. Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k^p}$ при различных значениях k и p .

Читать:

[Кудрявцев, том 1] Глава 4, §35.5-35.7, стр. 496-513 (доказательства опускаем).

Лекция k2-т2-10. Функциональные ряды.

6.3. Функциональные ряды.

6.3.1. Понятие равномерной сходимости функционального ряда.

Понятие равномерной сходимости. Определение равномерной сходимости. Исследование равномерной сходимости рядов типа $\sum_{k=1}^{+\infty} x^k$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

6.3.2. Признаки равномерной сходимости функциональных рядов.

Признак Вейерштрасса. Признак Абеля-Дирихле. Критерий Коши.

Читать:

[Кудрявцев, том 1] Глава 4, §36.1-36.3, стр. 514-535, §37.6, стр. 560-562 (доказательства опускаем).

Лекция k2-т2-11. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.

6.3.3. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.

Предельный переход, дифференцирование и интегрирование по параметру. Теоремы о корректности этих операций. Вычисление суммы ряда методом дифференцирования по параметру.

Читать:

[Кудрявцев, том 1] Глава 4, §36.1-36.3, стр. 514-535, §37.6, стр. 560-562 (доказательства опускаем).

6.3.4. Степенные ряды.

Понятие степенного ряда. Область сходимости. Радиус сходимости. Почленное дифференцирование степенного ряда. Вычисление суммы степенного ряда методом дифференцирования и интегрирования по параметру.

Читать:

[Кудрявцев, том 1] Глава 4, §37.1, стр. 536-542 (доказательства опускаем).

Лекция k2-т2-12. Ряды Тейлора.

6.3.5. Ряды Тейлора.

Ряд Тейлора. Область сходимости, радиус сходимости и формула для его вычисления. Степенные ряды, порожденные геометрической прогрессией. Ряды Тейлора для экспоненциальной, логарифмической функции. Разложение в ряд Тейлора тригонометрических и обратных тригонометрических функций. Приближенные вычисления с помощью степенных рядов.

Читать:

[Кудрявцев, том 1] Глава 4, §37.4, стр. 547-560 (доказательства опускаем).

Лекция k2-т2-13. Ряды Фурье.

6.4. Ряды Фурье.

6.4.1. Ортогональные системы функций.

Ортогональные системы функций. Полнота и замкнутость. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Тригонометрическая система функций и ее свойства.

6.4.2. Разложение функции в ряд Фурье.

Понятие ряда Фурье. Свойства рядов Фурье.

Разложение функций в ряд Фурье. Ряд Фурье в комплексной форме.

Читать:

[Кудрявцев, том 2] Глава 7, §55.1, стр. 244-247, §55.9, стр. 276-278 (доказательства опускаем).

Лекция k2-т2-14. Вэйвлеты и ряды Хаара.

6.5. Вэйвлеты и ряды Хаара.

6.5.1. Ряды по ортогональным системам функций.

Ортогональные системы функций. Полнота и замкнутость. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Тригонометрическая система функций и ее свойства.

6.5.2. Функции Хаара.

6.5.3. Разложение функции в ряд Хаара.

Понятие ряда Хаара. Разложение функций в ряд Хаара. Применение вэйвлетов для анализа данных.

Читать:

[Кудрявцев, том 2] Глава 7, §55.8, стр. 267-270.

Дополнительная литература

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч. I, М.: Наука, 1999.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч. II, М.: Наука, 1999.
3. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. М.: Наука, 1989.
4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1999.