Государственный университет - Высшая школа экономики
Факультет бизнес информатики
Программа курса математического анализа

Министерство экономического развития и торговли Российской Федерации

Министерство образования Российской Федерации

Государственный университет - Высшая школа экономики

Факультет бизнес-информатики
Программа курса «Математический анализ»
для направления «Бизнес-информатика»
(вторая ступень высшего профессионального образования – бакалавриат)

Рекомендована секцией УМС Математические и статистические методы в экономике

Одобрена на заседании кафедры высшей математики на факультете экономики

Председатель

___________А.С.Шведов

“___” __________ 2008 г.

Зав. кафедрой

___________Ф.Т.Алескеров

“___” __________ 2008 __г.

Утверждена УС
____

Ученый секретарь

____
“___” __________ 2008 г.

Москва

Москва 2008-2009

Тематический план учебной дисциплины

№	Название темы	Всего часов	Аудиторные часы		Самостоятельная работа
			Лекции	Сем. и练 практ. Занятия	
1	**1 курс, 1 модуль** Теория пределов и непрерывных функций одной переменной.	56	14	14	28
2	**1 курс, 2 модуль** Дифференциальное исчисление для функций одной переменной	60	14	14	32
3	**1 курс, 3 модуль** Дифференциальное исчисление для функций многих переменных.	56	14	14	28
4	**1 курс, 4модуль** Интегральное исчисление для функций одной переменной. Двойные интегралы.	60	14	14	32
5	**2курс, 1 модуль** Несобственные интегралы.	56	14	14	28
5	**2курс, 2 модуль** Числовые и функциональные ряды.	56	14	14	28

Формы рубежного контроля

В каждом модуле предусмотрены или контрольная работа, или большое домашнее задание. Во втором модуле 1 курса запланирована зачетная работа, а в четвертом – экзаменационная. В 1 модуле второго курса запланирована экзаменационная работа.

Автор: д.ф.-м.н., профессор А.А.Быков.

Основная рекомендуемая литература[1]:

1. [МАВЗ] Математический анализ в вопросах и задачах, В.Ф.Бутузов, Н.Ч.Крутицкая, Г.Н.Медведев, А.А.Шишкин, 5 изд., М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 480с.
2. [ЗУМА] Задачи и упражнения по математическому анализу, И.А.Виноградова, С.Н.Олехник, А.А.Садовничий, изд-во МГУ, 1988.: – 416с.
3. [Кудрявцев, том 1] Математический анализ в двух томах, том 1.
4. [Кудрявцев, том 2] Математический анализ в двух томах, том 2.

[1] Все эти книги можно найти в Internet в pdf и djvu форматах.

Государственный университет - Высшая школа экономики
Факультет бизнес информатики
Программа курса математического анализа

Содержание

1. Модуль 1 (7 лекций, 7 семинаров, 28 часов)

Продолжительность каждого занятия составляет 2 академических часа, т.е. 80 минут. В название лекции вынесена только основная тема данной лекции.

Лекция k1- m1-01. Предел функции одной переменной.

1.1. Предел функции одной переменной.

1.1.1. Числовые множества.

Геометрическое изображение вещественных чисел точками с помощью координатной прямой. Стандартные числовые множества: интервал, сегмент (отрезок), промежуток, полупрямая, числовая прямая. Окрестность точки, проколотая окрестность.

1.1.2. Понятие функции одной переменной.

Понятие функции одной переменной. Область определения, множество значений. График функции одной переменной. Четные и нечетные функции. Периодические функции. Графики элементарных функций. Преобразование графиков функций, сдвиг, отражение, растяжение.

1.1.3. Ограниченные и неограниченные функции.

Определение ограниченной и неограниченной функции на множестве. Символ $O(1)$ при $x \in X$ (ограниченная функция на множестве X). Символ $O(1)$ при $x \to a$ (локально ограниченная функция в окрестности точки $x = a$). Теоремы об ограниченности суммы, разности, произведения двух ограниченных функций.

1.1.4. Предел функции в точке.

Определение предела функции в точке по Коши (на языке логических формул). Геометрическая интерпретация предела функции. Пример прямого доказательства существования предела, $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 8$. Теорема о локальной ограниченности функции, имеющей предел. Методика вычисления пределов элементарных функций. Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+6}$, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+7}-3}$.

1.1.5. Односторонние пределы.

Определение одностороннего предела. Теоремы о связи существования и равенства односторонних пределов и существования предела функции в точке. Примеры вычисления односторонних пределов типа $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{x-2}{|x-2|}$, $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{x-2}{|x-2|}$. Предел функции при $x \to +0$, $x \to -0$.

1.1.6. Предел в бесконечно удаленной точке.

Определение предела функции при $x \to +\infty$ (по Коши). ●Определение предела функции при $x \to -\infty$. Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+6}$.

Читать:
[МАВЗ] Глава III, §1, 2, стр. 40-52.
[ЗУМА] Глава II, §1, стр. 48-66.

Лекция k1-m1-02. Сравнение бесконечно малых функций.

1.1.7. Бесконечно малые функции.

Определение бесконечно малой функции. Обозначение $o(1)$. Теорема о представлении функции, имеющей предел, в виде суммы константы и бесконечно малой функции. Арифметические операции над бесконечно малыми функциями: сумма, $o(1)+o(1)=o(1)$, разность, $o(1)-o(1)=o(1)$, произведение, $o(1)\cdot o(1)=o(1)$. Понятие неопределенности типа $\dfrac{0}{0}$. Теорема об ограниченности суммы бесконечно малой функции и ограниченной функции в точке, $o(1)+O(1)=O(1)$. Теорема о произведении бесконечно малой функции и ограниченной функции в точке, $o(1)\cdot O(1)=o(1)$.

1.1.8. Теоремы о пределах функций.

Теоремы о пределе суммы двух функций, о пределе разности, о пределе произведения и о пределе частного. Теорема о предельном переходе в неравенствах (без доказательства).

1.1.9. Бесконечно большие функции.

Определение бесконечно большой положительной функции в точке. Определение бесконечно большой отрицательной функции в точке. Соотношение понятий бесконечно малой функции и бесконечно большой функции. Соотношение понятий бесконечно большой функции и неограниченной функции. Арифметические операции над бесконечно большими функциями: сумма, произведение. Понятие неопределенности типа $+\infty-\infty$. Бесконечно большие функции при $x \to +\infty$. Бесконечно большие функции при $x \to -\infty$.

1.1.10. Сравнение бесконечно малых функций.

Определение $f(x)=o(x)$ при $x \to 0$. Определение $f(x)=o(x^n)$ при $x \to 0$. Определение $f(x)=o(x^{-1})$ при $x \to +\infty$. Определение $f(x)=o(x^{-n})$ при $x \to +\infty$. Примеры применения, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}=\dfrac{1}{3}$, вывод асимптотических формул, $\sqrt{1+x}=1+\dfrac{x}{2}+o(x)$, $\sqrt[3]{1+x}=1+\dfrac{x}{3}+o(x)$ при $x \to 0$.

Читать:
[МАВЗ] Глава III, §3, стр. 52-58.
[ЗУМА] Глава II, §1, стр. 48-66.

Лекция k1-m1-03. Первый и второй замечательные пределы.

1.1.11. Техника вычисления пределов иррациональных функций.

Применение асимптотических формул $\sqrt{1+x}=1+\dfrac{x}{2}+o(x)$, $\sqrt[3]{1+x}=1+\dfrac{x}{3}+o(x)$.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

Применение асимптотической формулы $\sqrt{1+x}=1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}+o(x^2)$ при $x\to 0$.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-(1+x/2)}{x^2}$.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$, .

1.1.12. Первый замечательный предел.

Формула, выражающая первый замечательный предел. Геометрическая интерпретация. Асимптотические формулы $\sin = x+o(x)$, $\sin = x+o(x^2)$ при $x\to 0$.

Асимптотические формулы $\cos = 1+o(1)$, $\cos = 1+o(x)$, $\cos = 1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)$ при $x\to 0$.

Асимптотические формулы $\operatorname{tg} = x+o(x^2)$, $\operatorname{tg} = x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^4)$ при $x\to 0$.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x-\sin\beta x}{x}$.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\alpha+x)-\sin a}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\alpha+x)-\cos a}{x}$.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)-2\sin a+\sin(a-x)}{x^2}$.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-2\sin 2x+\sin x}{x^3}$.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x^2}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\alpha x}{\operatorname{tg}\beta x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(a+x)-2\operatorname{tg} a+\operatorname{tg}(x-a)}{x^2}$.

Читать:
[МАВЗ] Глава III, §4, стр. 58-65.
[ЗУМА] Глава II, §1, стр. 77-80.

1.1.13. Теорема о пределе монотонной функции.

Теорема о пределе монотонной ограниченной на интервале функции. Теорема о пределе монотонной ограниченной на полупрямой функции.

1.1.14. Второй замечательный предел.

Формула, выражающая второй замечательный предел. Число e.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 0}(1+\alpha x)^{\frac{\beta}{x}}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Асимптотические формулы $\ln(1+x)=o(1)$, $\ln(1+x)=x+o(x)$, применение для решения задач, $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$ при $x\to 0$ и аналогичные.

Асимптотические формулы $e^x=1+o(1)$, $e^x=1+x+o(x)$, $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$ при $x\to 0$ и аналогичные и их применение для решения задач.

Вычисление пределов, включающих тригонометрические и иррациональные функции.

Читать:
[МАВЗ] Глава III, §4, стр. 58-65.
[ЗУМА] Глава II, §1, стр. 77-80.

Лекция k1-m1-04. Непрерывные функции и обратная функция.

1.1.15. Непрерывные функции одной переменной.

Непрерывность функции одной переменной в точке. Односторонняя непрерывность справа и слева, связь с непрерывностью в точке. Арифметические операции над непрерывными функциями. Непрерывность основных элементарных функций.

1.1.16. Классификация точек разрыва.

Точки разрыва устранимые, первого рода, второго рода. Примеры.

1.1.17. Сложная функция.

Понятие сложной функции. Теорема о непрерывности сложной функции. Непрерывность многочлена и дробно-рациональной функции.

1.1.18. Обратная функция.

Понятие обратной функции. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции (только для монотонной функции, без доказательства). Непрерывность обратных тригонометрических функций. Непрерывность показательной и логарифмической функции. Графики.

Читать:
[МАВЗ] Глава I, §2, стр. 48-52.
[ЗУМА] Глава I, §2, 3, стр. 14-20.

Лекция k1-m1-05. Производные и касательная.

1.2. Производная и дифференциал функции одной переменной.

1.2.1. Производная функции одной переменной.

Определение производной функции, ее геометрический, физический и экономический смысл. Таблица производных элементарных функций. Односторонние производные. Теорема о связи существования и равенства односторонних производных и производной функции в точке.

1.2.2. Вычисление производной.

Правила (теоремы) вычисления производной суммы, произведения и частного от деления двух функций. Производная обратной функции (без доказательства). Теорема о производной сложной функции. Производная степенной и показательной функций. Теорема о производной обратной функции и ее геометрическая интерпретация. Теорема о производной сложной функции.

1.2.3. Уравнение касательной.

Понятие, определение и уравнение касательной.

1.2.4. Производные высших порядков.

Понятие второй производной. Понятие и уравнение соприкасающейся параболы. Понятие и уравнение соприкасающейся окружности. Определение производной n-го порядка. Правила вычисления производной суммы и произведения (теорема). Формула Лейбница для n-й производной произведения двух функций (теорема).

1.2.5. Вычисление старших производных.

Старшие производные степенной и показательной функций. Старшие производные логарифмической функции. Старшие производные тригонометрических функций. Старшие производные функций типа xe^x, x^2e^x. Рекуррентные методы.

Читать:
[МАВЗ] Глава IV, §1, стр. 65-74.
[ЗУМА] Глава III, §1, стр. 89-100.

Лекция k1-m1-06. Дифференциал и старшие дифференциалы.

1.2.6. Дифференциал функции одной переменной.

Определение дифференциала функции в точке. Определение дифференцируемой функции в точке. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости (теорема). Геометрический смысл дифференциала. Теорема о непрерывности дифференцируемой функции в точке.

1.2.7. Вычисление дифференциала функции одной переменной.

Правила вычисления дифференциала суммы, разности, произведения и частного двух функций (теорема). Вычисление первого дифференциала сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала.

1.2.8. Дифференциалы высших порядков.

Понятие дифференциала второго порядка. Понятие дифференциала n-го порядка. Дифференциал второго порядка сложной функции.

1.2.9. Приближенные вычисления с помощью дифференциалов.

Понятие формулы Тейлора и применение для приближенных вычислений. Использование первого дифференциала для приближенных вычислений. Использование второго дифференциала для приближенных вычислений.

Читать:
[МАВЗ] Глава IV, §2, 3, стр. 77-85.
[ЗУМА] Глава III, §2, стр. 101-103.

Лекция k1-m2-07. Теоремы о непрерывных и дифференцируемых функциях.

1.3. Теоремы о непрерывных и дифференцируемых функциях.

1.3.1. Теоремы об ограниченности непрерывных функций.

Теоремы о локальной ограниченности и об устойчивости знака непрерывной функции в точке. Ограниченность непрерывной на сегменте функции (первая теорема Вейерштрасса).

1.3.2. Теоремы о корнях непрерывной функции.

Теорема о прохождении непрерывной на сегменте функции через любое промежуточное значение. Теорема о существовании корня непрерывной функции, принимающей значения разных знаков на концах сегмента.

1.3.3. Возрастание и убывание функции в точке.

Возрастание и убывание функции в точке. Достаточные условия возрастания функции в точке. Пример, показывающий, что положительность производной в точке не является необходимым условием возрастания функции в этой точке.

1.3.4. Формула конечных приращений.

Теорема Ролля и ее геометрическая интерпретация. Теорема Лагранжа, ее геометрический и экономический смысл. Следствия из теоремы Лагранжа: условие постоянства функции на промежутке, признак монотонности функции на промежутке. Исследование возрастания и убывания функции. Формула Коши.

Читать:
[МАВЗ] Глава VI, §1, 3, стр. 108-111, 116-121.
[ЗУМА] Глава III, §3, стр. 110-113.

2. Модуль 2 (7 лекций, 7 семинаров, 28 часов)

Лекция k1-m2-08. Локальный экстремум.

2.1. Локальный экстремум.

2.1.1. Локальный экстремум.

Понятие локального экстремума функции. Необходимое условие локального экстремума дифференцируемой функции (теорема). Достаточное условие локального экстремума непрерывной дифференцируемой функции (теорема). Достаточное условие локального экстремума дважды дифференцируемой функции (теорема). Исследование локального экстремума.

Читать:
[МАВЗ] Глава VI, §3, стр. 116-121.
[ЗУМА] Глава III, §3, стр. 110-113.

Лекция k1-m2-09. Правило Лопиталя.

2.1.2. Правило Лопиталя.

Правило Лопиталя: раскрытие неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ (теорема).

Правило Лопиталя для случая, когда $x \to +\infty$ (теорема без доказательства).
Правило Лопиталя для неопределенности типа $\frac{\infty}{\infty}$ (теорема без доказательства).

Вычисление пределов с помощью однократного применения правила Лопиталя.
Вычисление пределов с помощью многократного применения правила Лопиталя.

Читать:
[МАВЗ] Глава VI, §4, стр. 122-125.
[ЗУМА] Глава III, §3, стр. 113-117.

Лекция k1-m2-10. Формула Тейлора

2.1.3. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Многочлен Тейлора. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (теорема без доказательства). Формула Маклорена. Разложение по формуле Тейлора элементарных функций.

2.1.4. Асимптотические формулы.

Понятие асимптотической формулы. Вывод и применение формул

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^4\right),\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o\left(x^3\right),\ \operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^4\right),\ \sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} + o(x),$$

$$\ln x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right),\ e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + o\left(x^2\right),\ \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o\left(x^2\right),$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o\left(x^2\right),\ \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o\left(x^5\right),\ \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{5} + o\left(x^5\right)$$

и аналогичных для вычисления пределов.

2.1.5. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Остаточный член в форме Лагранжа (теорема без доказательства). Методика оценки остаточного члена формулы Тейлора в форме Лагранжа. Вычисление наибольшего слагаемого многочлена Тейлора. Приближенное вычисление значения функции. Вычисление сложных процентов с высокой точностью.

Читать:
[МАВЗ] Глава VI, §5, стр. 125-130.
[ЗУМА] Глава III, §3, стр. 113-117.

Лекция k1-m2-11. Числовые последовательности.

2.2. Числовые последовательности.

2.2.1. Предел последовательности.

Понятие числовой последовательности. Ограниченные и неограниченные числовые последовательности. Определение предела последовательности. Ограниченность сходящейся последовательности (теорема). Определение бесконечно малой последовательности. Взаимосвязь бесконечно малых и сходящихся последовательностей (теорема). Арифметические операции с бесконечно малыми последовательностями (теоремы). Определение бесконечно большой последовательности. Арифметические операции с бесконечно большими последовательностями (теоремы). Теоремы о взаимосвязи между бесконечно малыми и бесконечно большими последовательностями.

2.2.2. Свойства сходящихся последовательностей.

Арифметические операции, предельный переход в неравенствах (теорема без доказательства). Понятие о неопределенностях типа $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$. Другие типы неопределенностей, примеры. Исследование неопределенностей методом Лопиталя. Исследование неопределенностей методом асимптотических формул. Вычисление пределов выражений, содержащих радикалы. Понятие и определение монотонной последовательности. Необходимое и достаточное условие сходимости монотонной последовательности (теорема без доказательства).

2.2.3. Эталонные последовательности.

Второй замечательный предел для последовательностей. Число e. Вычисление пределов типа $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{n}\right)^{\beta n}$. Эталонные последовательности: $\sqrt[n]{b}$, $\log_a n$, n^β, b^n, $n!$, n^n. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b}$ при $\beta>0$. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_a n}{n^\beta}$ при $\beta>0$, $a>1$. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\beta}{b^n}$ при $b>1$. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b^n}{n!}$. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}$.

2.2.4. Предельные точки числовой последовательности.

Понятие подпоследовательности числовой последовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса: из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность (без доказательства). Два эквивалентных определения предельной точки числовой последовательности. Свойства множества всех предельных точек ограниченной последовательности. Верхний и нижний пределы последовательности. Соотношение множества всех верхних граней, точной верхней грани, верхнего предела (теорема без доказательства). Верхний и нижний пределы неограниченных последовательностей.

2.2.5. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши.

Фундаментальная последовательность. Ограниченность фундаментальной последовательности. Критерий Коши сходимости числовых последовательностей (теорема без доказательства). Критерий Коши предела функции в точке (теорема без доказательства). Определение предела по Гейне (на основе понятия предела последовательности. Теорема об эквивалентности двух определений предела функции (без доказательства).

Читать:
[МАВЗ] Глава II, §1-5, стр. 16-33.
[ЗУМА] Глава II, §2, стр. 67-70.

Лекция k1-m2-12. Исследование и построение графиков функций, заданных явным образом.

2.3. Исследование и построение графиков функций, заданных явным образом.

2.3.1. Классификация точек разрыва.

Точки непрерывности и точки разрыва функций. Классификация точек разрыва: точки устранимого разрыва, точки разрыва 1 рода, точки разрыва 2 рода.

2.3.2. Асимптоты графика функции.

Вертикальные и наклонные асимптоты графика функции. Необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты.

2.3.3. Возрастание и убывание функции.

Возрастание и убывание функции. Отыскание промежутков монотонности с помощью производной.

2.3.4. Локальный экстремум функции одной переменной.

Понятие локального экстремума. Точки возможного экстремума функции.
Достаточные условия локального экстремума, основанные на исследовании первых и вторых производных (теоремы).

Читать:
[МАВЗ] Глава VIII, §1, стр. 130-136.
[ЗУМА] Глава III, §3, стр. 117-122.

Лекция k1-m2-13. Выпуклость и точки перегиба.

2.3.5. Выпуклость графика функции.

Понятие и определение направления выпуклости графика функции на данном интервале. Теорема о достаточном условии выпуклости вниз (вверх) графика функции на данном интервале (без доказательства). Геометрическая интерпретация этой теоремы.

2.3.6. Точки перегиба графика функции.

Определение точек перегиба графика функции. Необходимое условие перегиба графика дважды дифференцируемой функции (теоремы без доказательства). Пример, показывающий, что условие не является достаточным условием перегиба дважды дифференцируемой функции. Точки возможного перегиба графика функции. Различные формы достаточных условий перегиба, использующие первые, вторые, третьи производные (теоремы без доказательства).

Читать:
[МАВЗ] Глава VIII, §1, стр. 130-136.
[ЗУМА] Глава III, §3, стр. 117-122.

Лекция k1-m2-14. Графики параметрических функций.

2.4. Построение графиков функций, заданных параметрически.

2.4.1. Асимптоты графика параметрической функции.

Вертикальные и наклонные асимптоты графика функции. ■Необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты (теорема).

2.4.2. Возрастание и убывание параметрической функции.

Возрастание и убывание функции. Отыскание промежутков монотонности функции методом исследования знака первой производной.

2.4.3. Локальный экстремум параметрической функции.

Точки возможного экстремума функции. Достаточные условия локального экстремума, основанные на исследовании первых и вторых производных (теоремы без доказательства).

2.4.4. Выпуклость графика параметрической функции.

Теорема о достаточном условии выпуклости вниз (вверх) графика функции на данном интервале (без доказательства). Геометрическая интерпретация этой теоремы.

2.4.5. Точки перегиба графика функции.

Необходимое условие перегиба графика дважды дифференцируемой функции (теорема без доказательства). Пример, показывающий, что условие не является достаточным условием перегиба дважды дифференцируемой функции. Точки возможного перегиба графика функции. Различные формы достаточных условий перегиба, использующие первые, вторые, третьи производные (теоремы без доказательства).

2.4.6. Исследование и построение графиков функций, заданных параметрически.

Общая схема исследования функции и построение графика. Примеры исследования по этой схеме.

Читать:
[МАВЗ] Глава VIII, §2, стр. 137-142.
[ЗУМА] Глава III, §3, стр. 117-122.

3. Модуль 3 (7 лекций, 7 семинаров, 28 часов)

Лекция k1-m3-15. Предел функции нескольких переменных.

3.1. Множества и последовательности точек в m-мерном координатном пространстве.

3.1.1. Понятие m-мерного пространства.

Евклидово m-мерное координатное пространство. Шар, сфера, параллелепипед. Окрестность точки, проколотая окрестность. Шаровая, прямоугольная и кубическая окрестности. Ограниченные и неограниченные последовательности точек. Бесконечно большая последовательность. Предел последовательности. Предельные точки. Связь между сходимостью последовательности точек и покоординатной сходимостью.

3.1.2. Открытые, замкнутые, выпуклые множества точек.

Внутренние и граничные точки множества, предельные точки, изолированные точки. Открытые и замкнутые множества множества на плоскости и в пространстве. Ограниченные и неограниченные множества на плоскости и в пространстве. Связные и несвязные множества. Замыкание множества. Выпуклые и невыпуклые множества в пространстве. Выпуклая оболочка множества точек на плоскости.

Читать:
[МАВЗ] Глава X, §1, 2, стр. 191-204.
[ЗУМА] Глава III, §1, стр. 286-291.

3.2. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.

3.2.1. Предел функции нескольких переменных.

Понятие функции нескольких переменных (ФНП). Способы визуализации. Карта линий равного уровня. Два определения предела функции в точке (по Коши и по Гейне), их эквивалентность. Бесконечно малые функции в точке. Предел функции в бесконечно удаленной точке. Арифметические операции над функциями, имеющими предел в данной точке.
Повторные пределы.

3.2.2. Непрерывные функции нескольких переменных.

Непрерывность функции многих переменных по совокупности переменных и по каждой переменной, связь между ними. Теорема об арифметических операциях над непрерывными функциями. Понятие сложной функции. Теорема о непрерывности сложной функции.

Читать:
[МАВЗ] Глава X, §3, 4, стр. 205-212.

[ЗУМА] Глава III, §1, стр. 286-291.

Лекция k1-m3-16. Дифференцируемые функции нескольких переменных.

3.3. Дифференцирование функции нескольких переменных.

3.3.1. Дифференцируемые функции нескольких переменных

Частные производные ФНП. Геометрический смысл частной производной. Определение дифференцируемой ФНП. Связь между дифференцируемостью и существованием частных производных функции в точке. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции в точке. Необходимое условие дифференцируемости функции в точке. Теорема о достаточных условиях дифференцируемости функции (без доказательства). Дифференциал функции нескольких переменных. Формулы для вычисления дифференциала суммы, разности, произведения и частного двух функций.

3.3.2. Касательная плоскость.

Определение касательной плоскости. Существование касательной плоскости у графика дифференцируемой функции двух переменных. Геометрический смысл дифференцируемости функции двух переменных. Уравнение касательной плоскости.

3.3.3. Дифференцирование сложной функции нескольких переменных.

Понятие сложной функции. Частные производные и дифференцируемость сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала. Дифференциал сложной функции.

3.3.4. Градиент и производная по направлению.

Понятие производной по направлению и градиента. Направление градиента и направление линии равного уровня дифференцируемой функции в заданной точке. Геометрический смысл градиента функции в точке. Теорема о существовании производной по направлению дифференцируемой ФНП. Линии и поверхности уровня. Теорема Эйлера об однородных функциях.

3.3.5. Векторные функции многих переменных

Понятие векторной функции многих переменных. Матрица Якоби и якобиан. Дифференцирование сложных векторных функций. Векторно-матричная форма записи первого дифференциала. Отображения, задаваемые простейшими векторными функциями и их геометрическая интерпретация. Функции размерности 2 и 3 от двух и трех переменных. Геометрическая интерпретация якобиана. Понятия однозначного и однолистного отображения. Достаточные условия.

Читать:
[МАВЗ] Глава X, §4, стр. 213-224.
[ЗУМА] Глава III, §2, 3, стр. 291-302.

Лекция k1-m3-17. Формула Тейлора.

3.3.6. Производные и дифференциалы высших порядков.

Частные производные высших порядков. Достаточные условия равенства смешанных производных. Дифференциал второго порядка. Дифференциалы высших порядков. Неинвариантность формы дифференциалов высших порядков сложной функции на примере второго дифференциала. Векторно-матричная форма записи первого и второго дифференциалов ФНП. Матрица Гессе.

3.3.7. Свойства непрерывных и дифференцируемых функций.

Ограниченность непрерывной функции, достижение непрерывной функцией своего максимального и минимального значений.

3.4. Формула Тейлора и локальный экстремум.

3.4.1. Формула Тейлора.

Многочлен Тейлора. Формула Тейлора. Остаточный член. Остаточный член в форме Пеано. Остаточный член в форме Лагранжа. Методика оценки остаточного члена для функции с ограниченными производными. Геометрический смысл формулы Тейлора с остаточным членом первого порядка. Геометрический смысл формулы Тейлора с остаточным членом второго порядка. Геометрический смысл формулы Тейлора с остаточным членом третьего порядка. Приближенное вычисление значений функции.
Читать:
[МАВЗ] Глава X, §5, стр. 225-235.
[ЗУМА] Глава III, §4, стр. 303-309.

Лекция k1-m3-18. Локальный экстремум.

3.4.2. Локальный экстремум функции многих переменных.

Понятие локального экстремума ФМП. Необходимое условие локального экстремума дифференцируемой функции. Понятие квадратичной формы и ее матрицы. Понятие знакоопределенной квадратичной формы. Критерий Сильвестра. Теорема о достаточном условии экстремума функции многих переменных. Исследование локального экстремума. Особенности графика и карты линий равного уровня дважды дифференцируемой функции в окрестности точки локального экстремума. Выпуклые и строго выпуклые функции. Экстремум выпуклой функции.
Читать:
[МАВЗ] Глава X, §6, стр. 236-242.
[ЗУМА] Глава III, §8, стр. 336-351.

Лекция k3-m3-19. Неявные функции-1.

3.5. Неявные функции.

3.5.1. Неявные функции, определяемые одним уравнением.

Понятие неявной функции. Формула для производных неявной функции. Теорема о существовании и непрерывности неявной функции, определяемой одним уравнением, заданном в прямоугольнике. Теоремы о дифференцируемой неявной функции, определяемой одним уравнением, заданном в окрестности точки.

3.5.2. Неявные функции, определяемые системой уравнений.

Вычисление частных производных неявных функций, определяемых системой уравнений. Теорема о старших производных неявной функции, определяемой системой уравнений.

3.5.3. Экстремум неявной функции.

Теорема об экстремуме неявной функции, определяемой одним уравнением и определяемой системой уравнений.
Читать:
[МАВЗ] Глава XI, §1, стр. 243-256.

[ЗУМА] Глава III, §5, стр. 310-319.

Лекция k1-m3-20. Условный экстремум-1.

3.6. Условный экстремум.

3.6.1. Понятие условного экстремума.

Понятие условного экстремума. Необходимое условие условного экстремума. Метод исключения переменных: сведение задачи об условном экстремуме к задаче о безусловном экстремуме.

3.6.2. Метод Лагранжа.

Метод Лагранжа и его геометрическая интерпретация. Необходимые условия условного экстремума в форме Лагранжа. Достаточные условия условного экстремума в форме Лагранжа. Метод окаймленного гессиана для исследования достаточных условий условного экстремума.
Читать:
[МАВЗ] Глава XI, §3, стр. 261-269.
[ЗУМА] Глава III, §8, стр. 326-350.

Лекция k1-m3-21. Неявные функции-2.

3.7. Неявные функции, определяемые системой уравнений.

3.7.1. Неявные функции, определяемые системой уравнений.

Вычисление частных производных неявных функций, определяемых системой уравнений. Теорема о старших производных неявной функции, определяемой системой уравнений.

3.7.2. Экстремум неявной функции, определяемой системой уравнений.

Теорема об экстремуме неявной функции, определяемой системой уравнений. Методика расчета точек возможного экстремума и проверка достаточных условий.
Читать:
[МАВЗ] Глава XI, §1, стр. 243-256.
[ЗУМА] Глава III, §5, стр. 310-319.

4. Модуль 4 (7 лекций, 7 семинаров, 28 часов)

Лекция k1-m4-22. Условный экстремум-2.

4.1. Условный экстремум с несколькими условиями связи.

4.1.1. Метод Лагранжа с несколькими условиями связи.

Метод Лагранжа и его геометрическая интерпретация. Необходимые условия условного экстремума в форме Лагранжа. Достаточные условия условного экстремума в форме Лагранжа. Метод окаймленного гессиана для исследования достаточных условий условного экстремума.
Читать:
[МАВЗ] Глава XI, §3, стр. 261-269.
[ЗУМА] Глава III, §8, стр. 326-350.

Лекция k1-m4-23. Неопределенный интеграл.

4.2. Неопределенный интеграл.

4.2.1. Первообразная и неопределенный интеграл.

Понятие первообразной функции одной переменной на промежутке. Теорема о том, что любые две первообразных для данной функции отличаются на константу. Неопределенный интеграл - совокупность всех первообразных заданной функции на заданном промежутке. Основные свойства неопределенных интегралов.

4.2.2. Основные неопределенные интегралы.

Вычисление интегралов от простейших рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных, логарифмических функций.

4.2.3. Интегрирование методом замены переменной.

4.2.4. Интегрирование по частям.

Читать:
[МАВЗ] Глава V, §1, 2, стр. 87-96.
[ЗУМА] Часть 2, Глава I, §1, 2, стр. 174-181.

Лекция k1-m4-24. Методы интегрирования.

4.3. Методы интегрирования.

4.3.1. Интегрирование рациональных функций.

Понятие о рациональной функции. Выделение целой и дробной частей. Деление многочленов столбиком. Разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей. Практические приемы нахождения коэффициентов разложения.
Четыре вида простейших дробей и их интегрирование.

4.3.2. Интегрирование иррациональных функций.

Различные приемы интегрирования иррациональных функций. Универсальная подстановка, сведение к интегралу от рациональной функции.

4.3.3. Интегрирование тригонометрических функций.

Различные приемы интегрирования тригонометрических функций. Универсальная тригонометрическая подстановка, сведение к интегралу от рациональной функции.
Читать:
[МАВЗ] Глава V, §3, 4, стр. 91-96.
[ЗУМА] Часть 2, Глава I, §3, 4, 5, стр. 182-208.

Лекция k1-m4-25. Определенный интеграл.

4.4. Определенный интеграл.

4.4.1. Понятие определенного интеграла.

Определенный интеграл как обобщение понятия площади плоской фигуры. Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Пример ограниченной неинтегрируемой функции. Верхняя и нижняя интегральные суммы и их геометрическая интерпретация. Необходимое и достаточное условие интегрируемости ограниченной функции на сегменте. Некоторые классы интегрируемых на сегменте функций: непрерывные функции, кусочно-непрерывные функции, монотонные ограниченные функции.

4.4.2. Свойства определенного интеграла.

Формулы среднего значения. Существование первообразной для непрерывной функции. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.

Читать:
[МАВЗ] Глава VIII, §5, стр. 167-171
[ЗУМА] Часть 2, Глава II, §1, стр. 236-246

Лекция k1-m4-26. Вычисление определенного интеграла.

4.5. Вычисление определенного интеграла.

4.5.1. Метод замены переменной.

Вычисление интегралов методом замены переменной.

4.5.2. Интегрирование по частям.

Интегрирование по частям. Двукратное интегрирование по частям. Вычисление интегралов типа $\int_a^b e^{ax}\sin bx\,dx$, $\int_a^b e^{ax}\cos bx\,dx$, $\int_a^b \sin(\ln x)\,dx$, $\int_a^b \cos(\ln x)\,dx$.

Читать:
[МАВЗ] Глава VIII, §5, стр. 167-171
[ЗУМА] Часть 2, Глава II, §1, стр. 236-246

Лекция k1-m4-27. Приложения определенного интеграла.

4.6. Приложения определенного интеграла.

4.6.1. Длина кривой.

Понятие длины плоской кривой. Вычисление длины плоской кривой, заданной явным образом. Вычисление длины плоской кривой, заданной параметрически. Вычисление длины плоской кривой, заданной неявным образом.

4.6.2. Площадь фигуры.

Понятие площади плоской фигуры. Вычисление площади плоской фигуры, заданной явным образом. Вычисление площади плоской фигуры, заданной параметрически. Вычисление площади плоской фигуры, заданной неявным образом.

4.6.3. Объем тела.

Понятие объема. Вычисление объема тела вращения, полученного вращением плоской фигуры, заданной явным образом. Вычисление объема тела вращения, полученного вращением плоской фигуры, заданной параметрически. Вычисление объема тела вращения, полученного вращением плоской фигуры, заданной неявным образом. Вычисление координат центра масс и момента инерции кривой, плоской фигуры, тела вращения.

Читать:
[МАВЗ] Глава VIII, §5, стр. 167-171
[ЗУМА] Часть 2, Глава II, §2, 3, стр. 246-265.

Лекция k1-m4-28. Кратные интегралы.

4.7. Кратные интегралы.

4.7.1. Двойной интеграл

Понятие двойного интеграла и основные его свойства. Сведение двойного интеграла к повторному. Ортогональные координаты на плоскости. Полярные координаты. Замена переменных в двойном интеграле. Якобиан.

4.7.2. Тройной интеграл.

Понятие и свойства тройного интеграла. Сведение тройного интеграла к повторному. Ортогональные координаты в пространстве. Цилиндрические и сферические координаты. Замена переменных в тройном интеграле. Якобиан.

4.7.3. Приложения кратных интегралов.

Вычисление координаты центра масс, дисперсии.
Читать:
[МАВЗ] Глава XII, §1, 2, стр. 279-300.
[ЗУМА] Часть 2, Глава II, §2, 3, стр. 43-67.

5. Курс 2, модуль 1 (7 лекций, 7 семинаров, 28 часов)

Лекция k2-m1-01. Несобственные интегралы.

5.1. Несобственные интегралы.

5.1.1. Несобственные интегралы функции одной переменной

Несобственный интеграл - обобщение понятия площади для определенных классов неограниченных плоских областей. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (I рода). Несобственные интегралы от неограниченных функций (II рода). Понятие сходимости. Сходящиеся и расходящиеся несобственные интегралы.

5.1.2. Эталонные интегралы

Сходимость и расходимость $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$, $\int_0^1\frac{dx}{x^p}$ при различных значениях p. Сходимость и расходимость $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}$ при различных значениях p и q. Сходимость и расходимость $\int_a^{+\infty}e^{-px}dx$ при различных значениях p.

5.1.3. Методы исследования сходимости

Понятие эталонного интеграла. Признаки сравнения для несобственных интегралов от неотрицательных функций. Предельный признак сравнения (сравнение с $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ или с $\int_0^1\frac{dx}{x^p}$).
Примеры сходящихся и расходящихся несобственных интегралов.
Читать:
[ЗУМА] Часть 2, Глава II, §1, стр. 236-246.
[Кудрявцев, том 1] Глава 3, §33.1-333., стр. 442-456, §34.1-34.3, стр. 459-469 (доказательства опускаем).

Лекция k2-m1-02. Свойства несобственных интегралов.

5.1.4. Методы вычисления несобственных интегралов

Замена переменной в несобственных интегралах. Интегрирование по частям. Сходимость и расходимость $\int_a^{+\infty} e^{-px}\sin qx\,dx$ при различных значениях p, q. Сходимость и расходимость $\int_a^{+\infty} t^{-p}\sin(q\ln t)\,dt$ при различных значениях p и q.

5.1.5. Абсолютная и условная сходимость

Абсолютно сходящиеся несобственные интегралы. Условно сходящиеся несобственные интегралы. Условие Коши. Критерий Коши.

5.1.6. Признаки условной сходимости

Признаки сходимости и условной сходимости. Признак Дирихле-Абеля.
Читать:
[ЗУМА] Часть 2, Глава II, §1, стр. 236-246.
[Кудрявцев, том 1] Глава 3, §33.4., стр. 457-459, §34.4, стр. 469-476 (доказательства опускаем).

Лекция k2-m1-03. Несобственные интегралы, зависящие от параметра.

5.2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра.

5.2.1. Определенный интеграл, зависящий от параметра.

Определенный интеграл, зависящий от параметра. Дифференцирование и интегрирование по параметру. Вычисление интегралов типа $\int_0^1 x^p (\ln x)^q\,dx$ при $p>0$ и $q>0$.

Читать:
[ЗУМА] Часть 2, Глава II, §1, стр. 236-246.
[Кудрявцев, том 2] Глава 6, §53.1-53.2., стр. 215-220 (доказательства опускаем).

5.2.2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра.

Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Область сходимости.
Читать:
[ЗУМА] Часть 2, Глава II, §1, стр. 236-246.
[Кудрявцев, том 2] Глава 6, §54.1-54.2 стр. 220-230 (доказательства опускаем).

5.2.3. Свойства интегралов, зависящих от параметра.

Применение дифференцирования и интегрирования по параметру для вычисления несобственных интегралов. Вычисление интегралов типа $\int_0^1 x^p (\ln x)^q\,dx$ при $p>-1$ и $q>-1$.

Читать:
[ЗУМА] Часть 2, Глава II, §1, стр. 236-246.
[Кудрявцев, том 2] Глава 6, §54.3 стр. 230-235 (доказательства опускаем).

Лекция k2-m1-04. Равномерная сходимость несобственных интегралов.

5.3. Равномерно сходящиеся несобственные интегралы, зависящие от параметра.

5.3.1. Понятие равномерной сходимости.

Понятие равномерной сходимости. Определение равномерной сходимости. Примеры равномерно сходящихся интегралов.

5.3.2. Признаки равномерной сходимости.

Признак Вейерштрасса. Признак Абеля-Дирихле. Критерий Коши.
Читать:
[Кудрявцев, том 2] Глава 6, §54.1-54.2 стр. 220-230 (доказательства опускаем).

Лекция k2-m1-05. Дифференцирование и интегрирование по параметру.

5.4. Дифференцирование и интегрирование несобственных интегралов.

5.4.1. Свойства равномерно сходящихся несобственных интегралов.

Предельный переход, дифференцирование и интегрирование по параметру. Теоремы о корректности этих операций. Вычисление несобственных интегралов методом дифференцирования по параметру.
Читать:
[Кудрявцев, том 2] Глава 6, §54.1-54.2 стр. 220-230 (доказательства опускаем).

5.5. Применение несобственных интегралов, зависящих от параметра.

5.5.1. Приложения несобственных интегралов.

Вычисление моментов случайной величины с нормальным распределением методом дифференцирования по параметру. Вычисление средних значений некоторых элементарных функций от случайной величины с нормальным распределением.
Читать:
[Кудрявцев, том 2] Глава 6, §54.3 стр. 235-240 (доказательства опускаем).

Лекция k2-m1-06. Интеграл Фурье.

5.6. Интеграл Фурье и его свойства.

5.6.1. Интеграл Фурье и его свойства.

Понятие об интеграле Фурье. Свойства интеграла Фурье.

5.6.2. Интеграл Фурье в комплексной форме.

Прямое и обратное преобразование Фурье. Интеграл Фурье в комплексной форме.
Читать:
[Кудрявцев, том 2] Глава 7, §56.1-56.4, стр. 278-290 (доказательства опускаем).

Лекция k2-m1-07. Приближенное вычисление интегралов.

5.7. Приближенное вычисление интегралов.

5.7.1. Приближенное вычисление определенного интеграла.

Метод прямоугольников. Метод трапеций. Метод парабол.

5.7.2. Применение математических инструментов.

Пакеты MathCad, MatLab, Matematica, Maple.

6. Курс 2, модуль 2 (7 лекций, 7 семинаров, 28 часов)

Лекция k2-m2-08. Числовые ряды с положительными членами.

6.1. Числовые ряды с положительными членами.

6.1.1. Сходящиеся и расходящиеся числовые ряды.

Числовой ряд и его основные элементы. Общий член, частичная сумма, остаток. Сходимость и свойства сходящихся рядов. Арифметические операции с числовыми рядами. Необходимое условие сходимости ряда.

6.1.2. Прямое вычисление суммы ряда.

Методика вычисления суммы рядов типа $\sum_{k=1}^{+\infty} x^k$, $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^k$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.

6.1.3. Признаки сходимости рядов с положительными членами.

Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами. Интегральный признак, признаки сравнения, признаки Даламбера и Коши. Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p}$ при различных значениях p.

Читать:
[Кудрявцев, том 1] Глава 4, §35.1-35.4, стр. 477-495 (доказательства опускаем).

Лекция k2-m2-09. Знакопеременные числовые ряды.

6.2. Знакопеременные числовые ряды.

6.2.1. Критерий Коши.

Условие Коши. Критерий Коши.

6.2.2. Знакопеременные ряды.

Знакопеременные ряды. Знакочередующиеся ряды, признак сходимости Лейбница. Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Перестановка членов абсолютно и условно сходящихся рядов. Признаки Дирихле и Абеля. Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k^p}$ при различных значениях k и p.

Читать:
[Кудрявцев, том 1] Глава 4, §35.5-35.7, стр. 496-513 (доказательства опускаем).

Лекция k2-m2-10. Функциональные ряды.

6.3. Функциональные ряды.

6.3.1. Понятие равномерной сходимости функционального ряда.

Понятие равномерной сходимости. Определение равномерной сходимости. Исследование равномерной сходимости рядов типа $\sum_{k=1}^{+\infty} x^k$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

6.3.2. Признаки равномерной сходимости функциональных рядов.

Признак Вейерштрасса. Признак Абеля-Дирихле. Критерий Коши.
Читать:
[Кудрявцев, том 1] Глава 4, §36.1-36.3, стр. 514-535, §37.6, стр. 560-562 (доказательства опускаем).

Лекция k2-m2-11. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.

6.3.3. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.

Предельный переход, дифференцирование и интегрирование по параметру. Теоремы о корректности этих операций. Вычисление суммы ряда методом дифференцирования по параметру.
Читать:
[Кудрявцев, том 1] Глава 4, §36.1-36.3, стр. 514-535, §37.6, стр. 560-562 (доказательства опускаем).

6.3.4. Степенные ряды.

Понятие степенного ряда. Область сходимости. Радиус сходимости. Почленное дифференцирование степенного ряда. Вычисление суммы степенного ряда методом дифференцирования и интегрирования по параметру.
Читать:
[Кудрявцев, том 1] Глава 4, §37.1, стр. 536-542 (доказательства опускаем).

Лекция k2-m2-12. Ряды Тейлора.

6.3.5. Ряды Тейлора.

Ряд Тейлора. Область сходимости, радиус сходимости и формула для его вычисления. Степенные ряды, порожденные геометрической прогрессией. Ряды Тейлора для экспоненциальной, логарифмической функции. Разложение в ряд Тейлора тригонометрических и обратных тригонометрических функций. Приближенные вычисления с помощью степенных рядов.
Читать:
[Кудрявцев, том 1] Глава 4, §37.4, стр. 547-560 (доказательства опускаем).

Лекция k2-m2-13. Ряды Фурье.

6.4. Ряды Фурье.

6.4.1. Ортогональные системы функций.

Ортогональные системы функций. Полнота и замкнутость. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Тригонометрическая система функций и ее свойства.

6.4.2. Разложение функции в ряд Фурье.

Понятие ряда Фурье. Свойства рядов Фурье.
Разложение функций в ряд Фурье. Ряд Фурье в комплексной форме.
Читать:
[Кудрявцев, том 2] Глава 7, §55.1, стр. 244-247, §55.9, стр. 276-278 (доказательства опускаем).

Лекция k2-m2-14. Вэйвлеты и ряды Хаара.

6.5. Вэйвлеты и ряды Хаара.

6.5.1. Ряды по ортогональным системам функций.

Ортогональные системы функций. Полнота и замкнутость. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Тригонометрическая система функций и ее свойства.

6.5.2. Функции Хаара.

6.5.3. Разложение функции в ряд Хаара.

Понятие ряда Хаара. Разложение функций в ряд Хаара. Применение вэйвлетов для анализа данных.
Читать:
[Кудрявцев, том 2] Глава 7, §55.8, стр. 267-270.

<u>Дополнительная литература</u>

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч.I, М.: Наука, 1999.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч.II, М.: Наука, 1999.
3. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. М.: Наука, 1989.
4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1999.

Типовые задачи, разбираемые на лекциях и на семинарах и входящие в программу зачета и экзамена

1. Укажите бесконечно малые и бесконечно большие функции при $x \to +\infty$ и при $x \to 0$. **(1)** $f(x) = \operatorname{tg} x$, **(2)** $f(x) = \sin x$, **(3)** $f(x) = x \sin x$, **(4)** $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, **(5)** $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, **(6)** $f(x) = \ln x$, **(7)** $f(x) = x \ln x$, **(8)** $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, **(9)** $f(x) = x^{-1}$, **(10)** $f(x) = \operatorname{arctg} x$, **(11)** $f(x) = \frac{x}{\operatorname{arctg} x}$, **(12)** $f(x) = x^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$, **(13)** $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, **(14)** $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+5}$.

2. Является ли верным утверждение: **(1)** $x = o(x^2)$ при $x \to 0$, **(2)** $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$, **(3)** $x^{-1} = o(x^{-2})$ при $x \to +\infty$, **(4)** $x^{-2} = o(x^{-1})$ при $x \to +\infty$, **(5)** $(\ln x)^{-1} = o(x)$ при $x \to 0$, **(6)** $(\ln x)^{-1} = o(x^{-1})$ при $x \to +\infty$, **(7)** $x^{-1} = o((\ln x)^{-1})$ при $x \to +\infty$, **(8)** $\frac{1}{x \ln x} = o(\frac{1}{x})$ при $x \to +\infty$, **(9)** $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$ при $x \to 0$, **(10)** $\sin x = x + o(x^2)$ при $x \to 0$, **(11)** $\ln(1-x) = -x + o(x^2)$ при $x \to 0$, **(12)** $\ln(1-x) = -x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ при $x \to 0$, **(13)** $\ln(1+x) = x + o(x^2)$ при $x \to +\infty$, **(14)** $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ при $x \to +\infty$, **(15)** $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ при $x \to 0$, **(16)** $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ при $x \to +\infty$, **(17)** $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ при $x \to 0$, **(18)** $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = o(x^{-1})$ при $x \to +\infty$.

3. При каких α и β является верным утверждение $f(x) = \alpha + \beta x + o(x)$ при $x \to 0$, если **(1)** $f(x) = (1+x)^2$, **(2)** $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}-1}{x}$, **(3)** $f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$, **(4)** $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, **(5)** $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, **(6)** $f(x) = \frac{e^x-1}{x}$. Тот же вопрос для утверждения **(7)** $\sin x = \alpha x + \beta x^3 + o(x^3)$, **(8)** $\arcsin x = \alpha x + \beta x^3 + o(x^3)$. **(9)** $\ln(1+x) = \alpha x + \beta x^2 + o(x^2)$.

4. Используя формулы $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$, найдите такие A, b, C, D, что является верным утверждение
(1) $\sqrt{\cos x} = A + Bx + Cx^2 + o(x^3)$ при $x \to 0$, **(2)** $\frac{1}{1+\sin x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$, **(3)** $\sin(\operatorname{tg} 2x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$,

5. Используя формулы $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$, найдите такие A, b, C, D, что является верным утверждение
(1) $\operatorname{tg}(2\sin x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$, **(2)** $\operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg} x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$.

6. Используя формулы $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$, найдите такие A, b, C, D, что является верным утверждение
(1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$, **(2)** $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$.

7. При каких α и β является верным утверждение $f(x) = \alpha + \beta x + o(x)$ при $x \to 0$, если **(1)** $f(x) = (1+x)^2$, **(2)** $f(x) = (1+x)^{-1}$, **(3)** $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}-1}{x}$, **(4)** $f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$, **(5)** $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, **(6)** $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, **(7)** $f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x}$. Тот же вопрос для утверждения **(8)** $\sin x = \alpha x + \beta x^3 + o(x^3)$, **(9)** $\operatorname{arctg} x = \alpha x + \beta x^3 + o(x^3)$,

8. Используя тригонометрические формулы, найдите **(1)** $\lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a}$, **(2)** $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(a+x) - 2\cos a + \cos(a-x)}{x^2}$, **(3)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x - 3\sin x}{x^3}$, **(4)** $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{x^2}$.

9. Найдите **(1)** $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$, **(2)** $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[12]{x}-1}$, **(3)** $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$, **(4)** $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13}-4}{x-3}$, **(5)** $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13}-4}{\sqrt{x+6}-3}$, **(6)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+8}-2}$, **(7)** $\lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos 2x}{\ln \cos 3x}$. **(8)** $\lim_{x\to 0} \frac{\ln \sin 3x}{\ln \sin 2x}$.

10. Найдите **(1)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$, **(2)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt{9+x}}{x}$, **(3)** $\lim_{x\to +\infty}(x - \sqrt{x^2-x})$, **(4)** $\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+3x+2} - \sqrt{x^2-x-2})$, **(5)** $\lim_{x\to +\infty} x(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-2})$, **(6)** $\lim_{x\to +\infty} x^2(\sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt[3]{x^3-2})$, **(7)** $\lim_{x\to +\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2})$, **(8)** $\lim_{x\to +\infty} x\sqrt{x}(\sqrt{x-1} - 2\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$, **(9)** $\lim_{x\to +\infty} x^3(\sqrt{x^2-1} - 2x + \sqrt{x^2+1})$.

11. Найдите **(1)** $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln^2 x}{x}$, **(2)** $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, **(3)** $\lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)^{123}}{x^{123}}$, **(4)** $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{2^x}$, **(5)** $\lim_{x\to +\infty} \frac{x \ln x}{x}$.

12. Найдите **(1)** $\lim_{n\to +\infty} \sqrt[n]{n}$, **(2)** $\lim_{n\to +\infty} \frac{\ln n}{n}$, **(3)** $\lim_{n\to +\infty} \frac{\ln n}{n^{0,01}}$, **(4)** $\lim_{n\to +\infty} \frac{(\ln n)^{17}}{n^{0,01}}$, **(5)** $\lim_{n\to +\infty} \frac{n}{2^n}$, **(6)** $\lim_{n\to +\infty} \frac{n^{2006}}{(1,001)^n}$, **(7)** $\lim_{n\to +\infty} \frac{n!}{n^n}$, **(8)** $\lim_{n\to +\infty} \frac{n^{2006}}{n!}$, **(9)** $\lim_{n\to +\infty} \frac{n^{2006}}{n^n}$, **(10)** $\lim_{n\to +\infty} \frac{\ln n}{n!}$, **(11)** $\lim_{n\to +\infty} \frac{\ln n}{n^n}$.

13. Найдите, используя правило Лопиталя. **(1)** $\lim_{x\to +0} x \ln x$, **(2)** $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$, **(3)** $\lim_{x\to +0} x^{1/x}$, **(4)** $\lim_{x\to 1-0} \frac{\arcsin x - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x}}$, **(5)** $\lim_{x\to 2} \frac{2^x - x^2}{x-2}$.

14. Найдите, используя правило Лопиталя, **(1)** $\lim_{x\to e} \frac{e^x - x^e}{x-e}$, **(2)** $\lim_{x\to e} \frac{e^{2x} - x^{2e}}{(x-e)^2}$, **(3)** $\lim_{x\to 1} \frac{e^{e^2 x} - (ex)^{e^2}}{(x-1)^2}$. **(4)** $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}$, **(5)** $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x} - e}{x^2}$.

15. Используя формулу первого замечательного предела, найдите **(1)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$, **(2)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}$, **(3)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{3x}$, **(4)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$, **(5)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}$, **(6)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-\sin x}{x}$, **(7)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} x}{x}$, **(8)** $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-2\cos 2x+\cos x}{x^2}$, **(9)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$.

16. Используя формулы $\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)$, $\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$, $\operatorname{tg} x = x+\frac{x^3}{3}+o(x^4)$, найдите **(1)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2\sin x}{x^3}$, **(2)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin 3x-\sin 4x}{x^3}$, **(3)** $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}$, **(4)** $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\cos 3x-2\cos 2x}{x^2}$, **(5)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 3x-3\operatorname{tg} x}{x^3}$, **(6)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 3x-\operatorname{tg} 4x}{x^3}$, **(7)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$.

17. Найдите **(1)** $\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x}$, **(2)** $\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x^2}$, **(3)** $\lim_{x\to+\infty} x^2\big(\cos\frac{1}{x}-1\big)$, **(4)** $\lim_{x\to+\infty} x^3\big(\sin\frac{1}{x}-\operatorname{tg}\frac{1}{x}\big)$,

18. Найдите **(1)** $\lim_{x\to+\infty}\big(1+\frac{2}{x}\big)^{3x}$, **(2)** $\lim_{x\to+\infty}\big(1+\frac{1}{x^2}\big)^{x^2}$, **(3)** $\lim_{x\to 0}\big(1-3x\big)^{2/x}$, **(4)** $\lim_{x\to 0}\big(1-2x\big)^{3x}$, **(5)** $\lim_{x\to 0}\big(\cos x\big)^{1/x^2}$, **(6)** $\lim_{x\to 0}\big(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\big)^{1/x^2}$, **(7)** $\lim_{x\to 0}\big(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\big)^{1/x^2}$, **(8)** $\lim_{x\to 0}\big(\frac{\sin x}{x}\big)^{1/x^2}$, **(9)** $\lim_{x\to 0}\big(\frac{\arcsin x}{x}\big)^{1/x^2}$, **(10)** $\lim_{n\to+\infty}\big(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}\big)^{n}$.

19. Найдите **(1)** $\lim_{n\to+\infty}\big(1+\frac{2}{n}\big)^{3n}$, **(2)** $\lim_{n\to+\infty}\big(1-\frac{3}{n}\big)^{4n}$, **(3)** $\lim_{n\to+\infty}\big(1+n\big)^{1/n}$.

20. Найдите производную: **(1)** $f(x)=x$, **(2)** $f(x)=x^2$, **(3)** $f(x)=2x^3+3x^2+6x+12$, **(4)** $f(x)=x^{\pi}$, **(5)** $f(x)=\sqrt{x}$, **(6)** $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, **(7)** $f(x)=\frac{1}{x^2}$, **(8)** $f(x)=\sqrt{x-1}$, **(9)** $f(x)=\sin x$, **(10)** $f(x)=\operatorname{tg} x$, **(11)** $f(x)=\sin(2x)$, **(12)** $f(x)=\ln x$, **(13)** $f(x)=\log_2 x$, **(14)** $f(x)=e^x$, **(15)** $f(x)=\pi^x$, **(16)** $f(x)=2^{-x}$, **(17)** $f(x)=\arcsin x$, **(18)** $f(x)=\arcsin 2x$.

21. Найдите производную: **(1)** $f(x)=\frac{x}{\sin x}$, **(2)** $f(x)=\frac{2x+1}{x+2}$, **(3)** $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$, **(4)** $f(x)=x^2\sin x$, **(5)** $f(x)=x\cos x$, **(6)** $f(x)=e^x\cos x$, **(7)** $f(x)=\sqrt{x}\operatorname{tg} x$, **(8)** $f(x)=x^3\sin 2x$, **(9)** $f(x)=x\ln x$, **(10)** $f(x)=\frac{x}{\ln x}$, **(11)** $f(x)=x^2\cdot 2^x$, **(12)** $f(x)=\frac{e^x}{x}$, **(13)** $f(x)=x\arcsin x$, **(14)** $f(x)=\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

22. Найдите производную: **(1)** $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, **(2)** $f(x)=\sin\sqrt{x}$, **(3)** $f(x)=\ln(2\sqrt{e^x})$, **(4)** $f(x)=\arcsin\sqrt{x}$, **(5)** $f(x)=\sqrt{\operatorname{arctg} x}$, **(6)** $f(x)=e^{\sqrt{-x}}$, **(7)** $f(x)=\big|x^2-5x+6\big|$.

23. Найдите $f^{(n)}(x)$, если **(1)** $f(x)=x^m$, $m<n$, $m,n\in\mathcal{N}$, **(2)** $f(x)=x^m$, $m=n$, $m,n\in\mathcal{N}$, **(3)** $f(x)=x^m$, $m>n$, $m,n\in\mathcal{N}$, **(4)** $f(x)=e^x$, **(5)** $f(x)=e^{2x}$, **(6)** $f(x)=xe^x$, **(7)** $f(x)=xe^{-x}$, **(8)** $f(x)=x^2e^x$, **(9)** $f(x)=\sqrt{x}$, **(10)** $f(x)=\ln x$, **(11)** $f(x)=\ln(x^2+x)$, **(12)** $f(x)=\ln\frac{2x-3}{3x-2}$, **(13)** $f(x)=x\ln x$, **(14)** $f(x)=x^2\ln x$, **(15)** $f(x)=\sin(x)$, **(16)** $f(x)=\sin(3x)$, **(17)** $f(x)=x\sin(x)$, **(18)** $f(x)=x\sin(2x)$, **(19)** $f(x)=x^2\cos(2x)$.

24. Найдите первую производную и первый дифференциал функции **(1)** $f(x)=x^2-6x+5$, **(2)** $f(x)=x^3$, **(3)** $f(x)=\ln x$, **(4)** $f(x)=\sqrt{x}$, **(5)** $f(x)=e^{-x}$, **(6)** $f(x)=xe^{-x}$, **(7)** $f(x)=\sin x$, **(8)** $f(x)=x\sin x$, **(9)** $f(x)=\sin(x^2)$, **(10)** $f(x)=\operatorname{arctg} x$, **(11)** $f(x)=\arcsin x$, **(12)** $f(x)=\arcsin\sqrt{x}$.

25. Найдите вторую производную и второй дифференциал функции **(1)** $f(x)=x^2-6x+5$, **(2)** $f(x)=x^3$, **(3)** $f(x)=\ln x$, **(4)** $f(x)=\sqrt{x}$, **(5)** $f(x)=e^{-x}$, **(6)** $f(x)=xe^{-x}$, **(7)** $f(x)=\sin x$, **(8)** $f(x)=x\sin x$, **(9)** $f(x)=\sin(x^2)$, **(10)** $f(x)=\operatorname{arctg} x$, **(11)** $f(x)=\arcsin x$, **(12)** $f(x)=\arcsin\sqrt{x}$.

26. Найдите **(a)** df, **(b)** d^2f, **(c)** $f(x)+df+\frac{1}{2}d^2f$, **(d)** $f(x+dx)$, если **(1)** $f(x)=2x+3$, $x=2$, $dx=3$, **(2)** $f(x)=x^3$, $x=1$, $dx=1$, **(3)** $f(x)=x^3$, $x=1$, $dx=0{,}1$, **(4)** $f(x)=\ln x$, $x=1$, $dx=1$, **(5)** $f(x)=\sqrt{x}$, $x=16$, $dx=9$, **(6)** $f(x)=\sqrt{1+x}$, $x=1$, $dx=0{,}1$, **(7)** $f(x)=e^x$, $x=\ln 10$, $dx=\ln 2$, **(8)** $f(x)=\sin x$, $x=\frac{\pi}{6}$, $dx=\frac{\pi}{6}$, **(9)** $f(x)=\arcsin x$, $x=\frac{1}{2}$, $dx=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$.

27. Вычислите **(a)** df, **(b)** d^2f, **(c)** $f(x)+df+\frac{1}{2}d^2f$, **(d)** $f(x+dx)$, сравните значения **(c)** и **(d)** с помощью калькулятора, если **(1)** $f(x)=2x+3$, $x=2$, $dx=3$, **(2)** $f(x)=x^3$, $x=1$, $dx=1$, **(3)** $f(x)=\ln x$, $x=1$, $dx=1$, **(4)** $f(x)=\sqrt{x}$, $x=100$, $dx=21$, **(5)** $f(x)=\sin x$, $x=0$, $dx=1$, **(6)** $f(x)=\arcsin x$, $x=0$, $dx=\frac{1}{2}$.

28. Вычислите **(a)** df, **(b)** $f(x)+df$, **(c)** $f(x+dx)$, сравните значения **(b)** и **(c)** с помощью калькулятора, если **(1)** $f(x)=\sqrt{x}$, $x=100$, $dx=21$, **(2)** $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x=8$, $dx=19$, **(3)** $f(x)=\sin x$, $x=\frac{\pi}{6}$, $dx=\frac{\pi}{6}$, **(4)** $f(x)=\operatorname{arctg} x$, $x=0$, $dx=1$, **(5)** $f(x)=\arcsin x$, $x=\frac{1}{2}$, $dx=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$.

29. Найдите d^nf, если **(1)** $f(x)=x^3$, $n=2$, **(2)** $f(x)=x^3$, $n=3$, **(3)** $f(x)=x^3$, $n=4$, **(4)** $f(x)=x^4$, $n=3$, **(5)** $f(x)=\frac{1}{x}$, **(6)** $f(x)=\ln x$, **(7)** $f(x)=x\ln x$, **(8)** $f(x)=\sqrt{x}$, **(9)** $f(x)=\sqrt{x}$, $n=3$, $x=4$, $dx=5$, **(10)** $f(x)=e^x$, **(11)** $f(x)=e^x$, $n=2006$, $x=\ln 36$, $dx=\frac{1}{2}$, **(12)** $f(x)=\sin x$, $n=2004$, **(13)** $f(x)=\sin x$, $n=2005$, **(14)** $f(x)=\sin x$, $n=2006$, **(15)** $f(x)=\sin x$, $n=2007$, **(16)** $f(x)=\cos x$, $n=2007$, $x=\frac{\pi}{3}$, $dx=\frac{1}{2}$, **(17)** $f(x)=x\sin x$, $n=8$, **(18)** $f(x)=x^2\cos x$, $n=9$.

30. Используя формулу конечных приращений, дайте оценку величины $f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)\in\big[(b-a)\inf_{(a;b)}f'(x);\ (b-a)\sup_{(a;b)}f'(x)\big]$, если
(1) $f(x)=\frac{1}{x}$, $a=99$, $b=101$. **(2)** $f(x)=\frac{1}{x}$, $a=1$, $b=1{,}001$. **(3)** $f(x)=\sqrt{x}$, $a=16$, $b=25$.
(4) $f(x)=\operatorname{arctg} x$, $a=9$, $b=10$. **(5)** $f(x)=\operatorname{arctg} x$, $a=1000$, $b=1001$. **(6)** $f(x)=\sin x$, $a=\frac{\pi}{6}$, $b=\frac{\pi}{3}$.
(7) $f(x)=\arcsin x$, $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{\sqrt{2}}$. **(8)** $f(x)=\frac{\sin}{x}$, $a=0{,}1$, $b=0{,}2$. **(9)** $f(x)=x^{1001}$, $a=1$, $b=1{,}001$.

31. Найдите значение многочлена Тейлора с центром $x_0=0$ указанного порядка n в указанной точке x, если **(1)** $f(x)=(2+x)^3$, $x=1$, $n=3$. **(2)** $f(x)=(1+x)^{2006}$, $x=1$, $n=2005$. **(3)** $f(x)=e^x$, $x=2$, $n=4$.

(4) $f(x)=xe^x,\ x=2,\ n=4.$ **(5)** $f(x)=\sin x,\ x=1,\ n=5.$ **(6)** $f(x)=\cos x,\ x=2,\ n=4.$
(7) $f(x)=\sqrt{1-x},\ x=0{,}36,\ n=2.$ **(8)** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}},\ x=0,64,\ n=2.$ **(9)** $f(x)=\frac{1}{1-x},\ x=1,\ n=2006.$
(10) $f(x)=\frac{1}{1+x},\ x=1,\ n=2006.$ **(11)** $f(x)=\ln(1-x),\ x=1,\ n=5.$ **(12)** $f(x)=\operatorname{arctg}(x),\ x=1,\ n=3.$
(13) $f(x)=\arcsin(x),\ x=1,\ n=3.$

32. Найдите значение многочлена Тейлора с центром $x_0=0$ указанного порядка n в указанной точке x, если
(1) $f(x)=(2+x)^2,\ x=1,\ n=2.$ **(2)** $f(x)=x^7,\ x=1,\ n=5.$ **(3)** $f(x)=e^{-x},\ x=2,\ n=3.$
(4) $f(x)=xe^{-x},\ x=1,\ n=2.$ **(5)** $f(x)=\sin x,\ x=3,\ n=5.$ **(6)** $f(x)=\cos x,\ x=\frac{1}{2},\ n=2.$
(7) $f(x)=\sqrt{1+x},\ x=0{,}21,\ n=2.$ **(8)** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}},\ x=0,44,\ n=2.$ **(9)** $f(x)=\frac{1}{1-x},\ x=\frac{1}{2},\ n=3.$
(10) $f(x)=\frac{1}{1+x},\ x=\frac{1}{3},\ n=7.$ **(11)** $f(x)=\ln(1+x),\ x=1,\ n=5.$ **(12)** $f(x)=\operatorname{arctg}(x),\ x=\sqrt{3},\ n=3.$
(13) $f(x)=\arcsin(x),\ x=\frac{1}{2},\ n=3.$

33. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x)=\frac{x}{x}$, **(2)** $f(x)=\frac{1}{x}$, **(3)** $f(x)=\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-4)}$, **(4)** $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}$,
(5) $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2+x+1}$, **(6)** $f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$, **(7)** $f(x)=\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(x-3)(x-4)(x-5)}$,

34. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x)=\operatorname{tg}x$, **(2)** $f(x)=\sin\frac{1}{x}$, **(3)** $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$, **(4)** $f(x)=\frac{\operatorname{tg}x}{x}$,
(5) $f(x)=\frac{x}{\operatorname{tg}x}$, **(6)** $f(x)=\operatorname{tg}x\cos x$, **(7)** $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, **(8)** $f(x)=\operatorname{tg}\frac{3\pi x}{1+x^2}$,

35. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x)=\sin\frac{1}{x}\cdot\ln|x|$, **(2)** $f(x)=e^{-1/x}$, **(3)** $f(x)=(1+x)^{1/x}$,
(4) $f(x)=(1+\frac{1}{x})^x$, **(5)** $f(x)=(\cos x)^{\frac{1}{x}}$, **(6)** $f(x)=(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$, **(7)** $f(x)=x^{17}e^{-1/x}$, **(8)** $f(x)=e^{\operatorname{tg}x}$,
(9) $f(x)=\operatorname{tg}(e^x)$, **(10)** $f(x)=\ln|x|$, **(11)** $f(x)=x\ln|x|$, **(12)** $f(x)=\frac{x^2-1}{\ln|x|}$.

36. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, найдите вторую производную, исследуйте направление выпуклости, найдите точки перегиба, нарисуйте эскиз графика функции. **(1)** $f(x)=3x^2-2x^3$, **(2)** $f(x)=2x^6-3x^4$, **(3)** $f(x)=3x^5-5x^3$,
(4) $f(x)=x^3-3x^2+3x-1$, **(5)** $f(x)=x^3-6x^2+9x$, **(6)** $f(x)=x(4-x)^3$, **(7)** $f(x)=x^2(5-x)^3$,
(8) $f(x)=(x-2)^3(10-x)^5$. **(9)** $f(x)=x(x-1)(x+1)$. **(10)** $f(x)=(4-x)\sqrt[3]{x}$, **(11)** $f(x)=(3-x)\sqrt{x}$.

37. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, найдите вторую производную, исследуйте направление выпуклости, найдите точки перегиба, нарисуйте эскиз графика функции. **(1)** $f(x)=\sqrt{x(2-x)}$, **(2)** $f(x)=\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{2-x}$, **(3)** $f(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{6-x}$.

38. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, найдите вторую производную, исследуйте направление выпуклости, найдите точки перегиба, нарисуйте эскиз графика функции. **(1)** $f(x)=x\ln x$, **(2)** $f(x)=\begin{cases}x\ln|x| \text{ при } x\neq 0,\\ 0 \text{ при } x=0,\end{cases}$
(3) $f(x)=\begin{cases}|x|\ln|x| \text{ при } x\neq 0,\\ 0 \text{ при } x=0,\end{cases}$ **(4)** $f(x)=x^2\ln x$, **(5)** $f(x)=x\big(\ln x\big)^2$, **(6)** $f(x)=\begin{cases}x^2\ln|x| \text{ при } x\neq 0,\\ 0 \text{ при } x=0,\end{cases}$
(7) $f(x)=\begin{cases}x|x|\ln|x| \text{ при } x\neq 0,\\ 0 \text{ при } x=0,\end{cases}$ **(8)** $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, **(9)** $f(x)=\frac{x}{\ln x}$,

39. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, найдите вторую производную, исследуйте направление выпуклости, найдите точки перегиба, нарисуйте эскиз графика функции. **(1)** $f(x)=xe^{-x}$, **(2)** $f(x)=x^2e^{-x}$, **(3)** $f(x)=x^3e^{-x}$, **(4)** $f(x)=\sqrt{x}e^{-x}$,
(5) $f(x)=\sqrt[3]{x}e^{-x}$.

40. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, найдите вторую производную, исследуйте направление выпуклости, найдите точки перегиба, нарисуйте эскиз графика функции. $f(x)=x+\frac{1}{x}$, **(1)** $f(x)=4x+\frac{9}{x}$, **(2)** $f(x)=\frac{2}{x^2+1}$, **(3)** $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$,
(4) $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$, **(5)** $f(x)=\frac{x^2}{1-x^2}$, **(6)** $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$, **(7)** $f(x)=\frac{3}{x^2+x+1}$.

41. Найдите наклонные асимптоты (правостороннюю и левостороннюю), **(1)** $f(x)=x\ln\frac{x+2}{x}$, **(2)** $f(x)=x^2\ln\frac{x+2}{x}$,

42. Найдите множество всех предельных точек последовательности **(1)** $x_n=\frac{n-1}{n}$, **(2)** $x_n=\sin\frac{\pi n}{6}$,
(3) $x_n=(-1)^n\cdot\frac{n-1}{n}$, **(4)** $y_1=0,\ y_{n+1}=y_n+\frac{1}{n},\ x_n=$ дробная часть(y_n). **(5)** $x_n=\overline{a_1}$, если в десятичной записи $n=\overline{a_ka_{k-1}\dots a_1a_0}$. **(6)** $x_n=\overline{a_1a_0}$, если в десятичной записи $n=\overline{a_ka_{k-1}\dots a_1a_0}$. **(7)** $1;\ 1;\ 2;\ 1;\ 2;\ 3;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\dots$.
Найдите верхний и нижний пределы этих последовательностей.

43. Найдите **(1)** $\sum_{n=0}^{+\infty}(0{,}5)^n$, **(2)** $\sum_{n=0}^{+\infty}(-0{,}5)^n$, **(3)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$, **(4)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$, **(5)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$,
(6) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

44. Найдите частичные суммы рядов **(1)** $\sum_{k=0}^{+\infty}2^k$, **(2)** $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$, **(3)** $\sum_{k=1}^{+\infty}\ln\big(1+\frac{3}{3k-1}\big)$,
(4) $\sum_{k=1}^{+\infty}\big(\sin(k+1)-\sin(k)\big)$, докажите что эти ряды расходятся.

45. Используя интегральный признак сходимости, исследуйте сходимость **(1)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$, **(2)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, **(3)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$, **(4)** $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n}$, **(5)** $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$.

46. Найдите **(1)** $\int dx$, **(2)** $\int x dx$, **(3)** $\int x^7 dx$, **(4)** $\int\frac{dx}{x}$, **(5)** $\int\frac{dx}{x^2}$, **(6)** $\int\sqrt{x}\,dx$, **(7)** $\int\sqrt[3]{x}\,dx$, **(8)** $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}$, **(9)** $\int\frac{dx}{\cos^2 x}$, **(10)** $\int\frac{dx}{\cos x}$, **(11)** $\int\frac{dx}{\sin x}$, **(12)** $\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$, **(13)** $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$, **(14)** $\int\frac{dx}{4+x^2}$, **(15)** $\int\frac{x\,dx}{4+x^2}$.

47. Найдите, интегрируя по частям, **(1)** $\int x^3(1-x)^7\,dx$, **(2)** $\int xe^{-x}\,dx$, **(3)** $\int x^2e^x\,dx$, **(4)** $\int x\sin x\,dx$, **(5)** $\int x^2\cos x\,dx$, **(6)** $\int x\ln x\,dx$, **(7)** $\int \operatorname{arctg} x\,dx$, **(8)** $\int x\arcsin x\,dx$,

48. Найдите, используя метод замены переменной, **(1)** $\int\frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$, **(2)** $\int\frac{(\operatorname{arctg} x)^3}{1+x^2}dx$, **(3)** $\int\frac{\cos(\ln x)}{x}dx$, **(4)** $\int x\cos(x^2)\,dx$, **(5)** $\int\frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$, **(6)** $\int\frac{\sin(\operatorname{arctg} x)}{1+x^2}dx$, **(7)** $\int\frac{\ln x}{x}dx$, **(8)** $\int xe^{-x^2}dx$, **(9)** $\int\frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

49. Найдите **(1)** $\int\frac{dx}{1-x^2}$, **(2)** $\int\frac{x\,dx}{1-x^2}$, **(3)** $\int\frac{dx}{x^2-5x+6}$, **(4)** $\int\frac{xdx}{x^2-5x+6}$, **(5)** $\int\frac{(2x-3)dx}{x^2-5x+6}$, **(6)** $\int\frac{x^2dx}{x^2-5x+6}$, **(7)** $\int\frac{x^3dx}{x^2-5x+6}$, **(8)** $\int\frac{dx}{(x-2)^2}$, **(9)** $\int\frac{xdx}{(x-2)^2}$, **(10)** $\int\frac{dx}{x^2+x+1}$, **(11)** $\int\frac{xdx}{x^2+x+1}$, **(12)** $\int\frac{dx}{e^x-1}$, **(13)** $\int\frac{e^x dx}{e^x-1}$, **(14)** $\int\frac{e^x dx}{e^{2x}-1}$,

50. **(1)** Интегрируя по частям $\int\frac{1}{1+x^2}dx$, найдите $\int\frac{1}{(1+x^2)^2}dx$. **(2)** Интегрируя по частям $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, найдите $\int\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}dx$. **(3)** Интегрируя по частям $\int\frac{1}{(1+x^2)^2}dx$, найдите $\int\frac{1}{(1+x^2)^3}dx$. **(4)** Интегрируя по частям $\int\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}dx$, найдите $\int\frac{1}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}dx$.

51. Найдите, интегрируя по частям два раза, **(1)** $\int e^x\sin x\,dx$, **(2)** $\int e^x\cos x\,dx$, **(3)** $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$, **(4)** $\int e^{-3x}\cos 2x\,dx$, **(5)** $\int\sin(\ln x)\,dx$, **(6)** $\int\cos(\ln x)\,dx$. **(7)** $\int x\sin(\ln x)\,dx$, **(8)** $\int x\cos(\ln x)\,dx$.

52. Оцените значение выражения $(1+x)^m$, используя тождество $(1+x)^m = e^{m\ln(1+x)}$. Для оценки $\ln(1+x)$ используйте многочлен Тейлора $P_2 = x - \frac{x^2}{2}$. **(1)** $(1{,}01)^2$, **(2)** $(1{,}01)^{100}$, **(3)** $(0{,}99)^{200}$, **(4)** $(1{,}01)^{100}-(1{,}02)^{50}$, **(5)** $(0{,}99)^{100}-(0{,}98)^{50}$,

53. Оцените величину остаточного члена формулы Тейлора $R_{n+1}(x|x_0) = f(x) - P_n(x|x_0)$, $P_n(x|x_0) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, если **(1)** $f(x)=\sin x,\ x_0=0,\ x=1,\ n=5$. **(2)** $f(x)=\sin x,\ x_0=0,\ x=\frac{1}{2},\ n=5$. **(3)** $f(x)=\sin x,\ x_0=0,\ x=2,\ n=5$. **(4)** $f(x)=e^x,\ x_0=0,\ x=2,\ n=6$. **(5)** $f(x)=\ln(1+x),\ x_0=0,\ x=\frac{1}{2},\ n=4$. **(6)** $f(x)=\frac{1}{1-x},\ x_0=0,\ x=\frac{1}{2},\ n=4$.

54. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым. Найдите **(e)** внутренность, **(f)** границу, **(g)** $\star$ множество всех предельных точек, **(h)** замыкание, **(i)** выпуклую оболочку указанного множества. Каждый раз мы указываем пространство, подмножеством которого является даное множество.
(1) Отрезок на плоскости (без концов), **(2)** Шар (вместе со сферой), **(3)** Звезда (пятиугольная) на плоскости (включая внутренность), **(4)** Отрезок на плоскости (с концами), **(5)** Круг на плоскости (вместе с окружностью), **(6)** Звезда (пятиугольная) на плоскости (без внутренности), **(7)** Круг на плоскости (без окружности), **(8)** Треугольник на плоскости (включая внутренность), **(9)** Треугольник на плоскости (без внутренности), **(10)** Шар (без сферы). **(11)** Буква М русского алфавита. **(12)** Буква Г русского алфавита.

55. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым. Найдите **(e)** внутренность, **(f)** границу, **(g)** $\star$ множество всех предельных точек, **(h)** замыкание, **(i)** выпуклую оболочку указанного множества.
Множество, состоящее из всех точек на поскости с координатами $(x;y)$, для которых **(1)** $x^2+y^2=1$, **(2)** $x^2+y^2>1$, **(3)** $|x|+|y|\leqslant 1$, **(4)** $\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 2,\\ -1<x<1,\end{cases}$ **(5)** $x^2+y^2<1$, **(6)** $|x|+|y|\geqslant 1$, **(7)** $1\leqslant|x|+|y|<2$, **(8)** $\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 2,\\ -|x|\leqslant y\leqslant|x|,\end{cases}$ **(9)** $x^2+y^2\leqslant 1$, **(10)** $x^2+y^2\geqslant 1$, **(11)** $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$, **(12)** $1<x^2+y^2<4$, **(13)** $1\leqslant x^2+y^2<4$, **(14)** $|x|+|y|=1$, **(15)** $|x|+|y|<1$, **(16)** $|x|+|y|>1$, **(17)** $1\leqslant|x|+|y|\leqslant 2$, **(18)** $x+y=1$, **(19)** $\begin{cases}x+y=1,\\ -1\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$ **(20)** $\begin{cases}x+y=1,\\ -1<x<1,\end{cases}$ **(21)** $\begin{cases}x^2+y^2=2,\\ -1<x<1,\end{cases}$ **(22)** $\begin{cases}x^2+y^2=2,\\ -1\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$ **(23)** $\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 2,\\ -|x|<y<|x|,\end{cases}$ **(24)** $x^2+9y^2=9\bigcup 9x^2+y^2=9$, **(25)** $\begin{cases}x^2+9y^2\leqslant 9,\\ 9x^2+y^2\leqslant 9,\end{cases}$ **(26)** $\begin{cases}x^2+9y^2<9,\\ 9x^2+y^2\leqslant 9,\end{cases}$ **(27)** $\begin{cases}x^2+9y^2<9,\\ 9x^2+y^2<9,\end{cases}$

56. Является ли указанное множество точек **(a)** ограниченным, **(b)** открытым, **(c)** замкнутым. Найдите **(d)** внутренность, **(e)** границу, **(f)** Множество всех предельных точек, **(g)** замыкание, **(h)** выпуклую оболочку указанного множества.
Множество точек $(x_n;y_n)$, $n\in N$ (все натуральные числа), если **(1)** $x_n=\cos\frac{\pi}{n},\ y_n=\sin\frac{\pi}{n}$. **(2)** $x_n=\cos\frac{\pi n}{2},\ y_n=\sin\frac{\pi n}{2}$. **(3)** $x_n=\frac{1}{n},\ y_n=\frac{1}{n}$. **(4)** $x_n=\cos\frac{\pi n}{3},\ y_n=\sin\frac{\pi n}{3}$. **(5)** $x_n=\cos\frac{\pi n}{4},\ y_n=\sin\frac{\pi n}{4}$. **(6)** $x_n=\cos\frac{\pi n}{6},\ y_n=\sin\frac{\pi n}{6}$. **(7)** $x_n=\cos\frac{\pi n}{8},\ y_n=\sin\frac{\pi n}{8}$. **(8)** $x_n=\cos\frac{2\pi n}{5},\ y_n=\sin\frac{2\pi n}{5}$. **(9)** $x_n=\cos\frac{\pi n}{4},\ y_n=\sin\frac{\pi n}{8}$. **(10)** $x_n=\cos n,\ y_n=\sin n$. **(11)** $x_1=1,\ y_1=0$, **(12)** $x_{n+1}=-y_n,\ y_{n+1}=x_n$.

57. Найдите **(a)** Предел, если таковой существует, **(b)** Множество всех предельных точек указанной последовательности.

(1) $x_n=\frac{n+1}{n},\ y_n=\frac{n-1}{n}$. **(2)** $x_n=n\operatorname{tg}\frac{1}{n},\ y_n=\sqrt{n}\operatorname{tg}\frac{2}{\sqrt{n}}$. **(3)** $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ y_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.
(4) $x_n=\sin\frac{1}{n},\ y_n=\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}},\ n>1$. **(5)** $x_n=\frac{3n+2}{2n+3},\ y_n=\frac{4n-1}{3n+1}$. **(6)** $x_n=n\sin\frac{1}{n},\ y_n=n^2\sin\frac{1}{n^2}$.
(7) $x_n=\left(1-\frac{2}{n}\right)^{3n},\ y_n=\left(1+\sin\frac{1}{3n}\right)^{2n}$. **(8)** $x_n=\operatorname{tg}\frac{\pi n+1}{4n-1},\ y_n=2^{x_n}$. **(9)** $x_n=\frac{5n+6}{6n+5},\ y_n=\frac{n-1}{n+2}$.
(10) $x_n=n^2\operatorname{tg}\frac{1}{n^2},\ y_n=n\sin\frac{1}{n^2}$. **(11)** $x_n=\left(1-\sin 5n\right)^{3n},\ y_n=\left(1+\operatorname{tg}\frac{1}{n}\right)^{2n}$. **(12)** $x_n=\sqrt[n]{n},\ y_n=\sqrt[n]{\frac{1}{n}}$.
(13) $x_n=\cos\frac{\pi}{n},\ y_n=\sin\frac{\pi}{n}$. **(14)** $x_n=\cos\frac{\pi n}{4},\ y_n=\sin\frac{\pi n}{4}$. **(15)** $x_n=\frac{2n+3}{2n-1},\ y_n=2x_{n-1}-x_{n-2},\ n>3$.
(16) $x_n=\operatorname{tg}\frac{\pi n+1}{3n-1},\ y_n=\log_3(x_n)$. **(17)** $x_n=\cos\frac{\pi n}{4},\ y_n=\sin\frac{\pi n}{8}$. **(18)** $x_n=\cos n,\ y_n=\sin n$.
(19) $x_n=\left(\frac{1+n}{en}\right)^{n^2},\ y_n=\left(\frac{1-n}{en}\right)^{n^2}$. **(20)** $x_n=\cos\left(\frac{\pi n}{4}+\frac{1}{n}\right),\ y_n=\sin\left(\frac{\pi n}{4}+\frac{1}{n}\right)$.
(21) $x_n=\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)+\frac{1}{n},\ y_n=\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)+\frac{1}{n}$. **(22)** $x_n=\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)+\frac{1}{n}\cos n,\ y_n=\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)+\frac{1}{n}\sin n$.

58. Нарисуйте семейство линий равного уровня функции **(1)** $u=x+y$, **(2)** $u=\frac{y}{x}$, **(3)** $u=xy$, **(4)** $u=\frac{x^2+y^2}{2x}$, **(5)** $u=2x+3y$, **(6)** $u=\frac{x^2}{y}$, **(7)** $u=\frac{x^2+y^2}{2y}$, **(8)** $u=x^2+y^2$, **(9)** $u=x-y$, **(10)** $u=\frac{y^2}{x}$, **(11)** $u=x^2+xy+y^2$, **(12)** $u=x^2+2xy+y^2$, **(13)** $u=x^2+3xy+y^2$, **(14)** $u=\frac{x^2+y^2}{2x+2y}$, Значения уровней подберите самостоятельно.

59. Нарисуйте семейство линий равного уровня функции **(1)** $u=|x|+|y|$, **(2)** $u=|x|+y$, **(3)** $u=x-|y|$, **(4)** $u=|x|-|y|$, **(5)** $u=|x+y|+|x-y|$, **(6)** $u=|x+y|-|x-y|$,
Значения уровней подберите самостоятельно.

60. Нарисуйте семейство линий равного уровня функции **(1)** $u=\min(x,y+y)$, **(2)** $u=\min(x^2+y^2,\ 2xy)$, **(3)** $u=\max(x^2-2xy+y^2,\ 1-2xy)$. **(4)** $u=\min(x,x-y)$, **(5)** $u=\min(x^2+2xy+y^2,\ 2xy+1)$, **(6)** $u=\max(x^2-2xy+y^2,\ x^2-1+y^2)$. **(7)** $u=\min(y-x,y)$, **(8)** $u=\min(y+y^2,x^2+y^2)$, **(9)** $u=\min(2y+2x,x^2+2x+y)$, **(10)** $u=\min(x+y,x-y)$, **(11)** $u=\min(x^2+y^2,\ 1-2xy)$, Значения уровней подберите самостоятельно.

61. Найдите (если существуют) повторные пределы $\lim_{x\to a}\left[\lim_{y\to b}u(x,y)\right]$, $\lim_{y\to b}\left[\lim_{x\to a}u(x,y)\right]$, если $a=0,\ b=0$, **(1)** $u(x,y)=\frac{x^2}{x^2+y^2}$, **(2)** $u(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$, **(3)** $u(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, **(4)** $u(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, **(5)** $u(x,y)=\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$, **(6)** $u(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$, **(7)** $u(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$, **(8)** $u(x,y)=y\ln(x^2+y^2)$, **(9)** $u(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$, **(10)** $u(x,y)=\frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}$, **(11)** $u(x,y)=(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$, **(12)** $u(x,y)=\frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$, **(13)** $u(x,y)=\frac{x^2+y^2}{\ln(x^2+y^2)}$, **(14)** $u(x,y)=\frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$, **(15)** $u(x,y)=\frac{e^{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$, **(16)** $u(x,y)=\frac{\sin(xy)}{xy}$, **(17)** $u(x,y)=\frac{\sin(xy)}{x}$, **(18)** $u(x,y)=\frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$, **(19)** $u(x,y)=(x^2+y^2)\cdot\sin\frac{1}{x^2+y^2}$, **(20)** $u(x,y)=x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}$,

62. Найдите предел в бесконечно удаленной точке или докажите, что предел не существует, **(1)** $u(x,y)=xe^{-x}+ye^{-y}$, **(2)** $u(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$, **(3)** $u(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, **(4)** $u(x,y)=e^{-x}+e^{-y}$, **(5)** $u(x,y)=\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$, **(6)** $u(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$, **(7)** $u(x,y)=ye^{-x}+xe^{-y}$, **(8)** $u(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^4+y^4}$, **(9)** $u(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$, **(10)** $u(x,y)=\frac{xy}{x^2+xy+y^2}$, **(11)** $u(x,y)=xye^{-x^2-y^2}$, **(12)** $u(x,y)=e^{-x^2}$, **(13)** $u(x,y)=ye^{-x^2}$, **(14)** $u(x,y)=\frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$, **(15)** $u(x,y)=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$, **(16)** $u(x,y)=(x^2+y^2)\operatorname{tg}\frac{1}{x^2+y^2}$, **(17)** $u(x,y)=(x^2+y^2)\arcsin\frac{1}{x^2+y^2}$, **(18)** $u(x,y)=(x^2+y^2)\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2+y^2}$,

63. Найдите частные производные первого порядка, градиент. Найдите первый дифференциал. Напишите уравнение нормали и уравнение касательной плоскости к поверхности $z=u(x,y)$ в точке M_0 с координатами $(x_0;y_0)$. Найдите производную по направлению вектора $\vec{L}$ в точке M_0. **(1)** $u=2x+3y$, $M_0=(1;\ 1)$, $\vec{L}_1=(3;-2)$, $\vec{L}_2=(2;3)$. **(2)** $u=xy$, $M_0=(1;1)$, $\vec{L}_1=(1;\ 1)$, $\vec{L}_2=(1;\ -1)$, **(3)** $u=x^3+y^3-3xy$, $M_0=(1;1)$, $\vec{L}=(1;\ 2)$. **(4)** $u=3x-2y$, $M_0=(1;\ 1)$, $\vec{L}_1=(3;-2)$, $\vec{L}_2=(2;3)$. $\vec{L}_3=(-3;2)$, **(5)** $u=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $M_0=(2;3)$, $\vec{L}_1=(3;-2)$, $\vec{L}_2=(2;3)$. **(6)** $u=xy(3-x-y)$, $M_1=(1;1)$, $\vec{L}_1=(1;1)$. $M_2=(0;0)$, $\vec{L}_{2a}=(1;1)$, $\vec{L}_{2b}=(1;-1)$, $\vec{L}_{2c}=(1;0)$. **(7)** $u=x^y$, $M_0=(1;1)$, $\vec{L}=(3;-2)$; **(8)** $u=xy^2(4-x-2y)$, $M_0=(1;1)$, $\vec{L}=(1;1)$. **(9)** $u=xy(3-x-y)$, $M_0=(2;3)$, $\vec{L}=(1;-1)$. **(10)** $u=x^2+2y^2-2x^4-y^4$, $M_1=(1;0{,}5)$, $\vec{L}_1=(1;-1)$. $M_2=(1;1)$, $\vec{L}_2=(1;1)$. **(11)** $u=xy\ln(x^2+y^2)$, $M_0=((2e)^{-0,5};\ (2e)^{-0,5})$, $\vec{L}=(3;\ -2)$; $M_0=(2^{-0,5};\ 2^{-0,5})$, $\vec{L}=(1;\ -1)$; **(12)** $u=(x^2+y^2)^2e^{-x^2-y^2}$, $M_0=(1;\ 1)$, $\vec{L}=(3;\ -2)$.

64. Найдите частные производные первого порядка, градиент. Найдите первый дифференциал. Найдите производную по направлению вектора $\vec{L}$ в точке с заданными координатами (x_0,y_0,z_0).
(1) $u=2x+3y+4x,\ M_0=(1;1;1)$, $\vec{L}_1=(2;3;4)$, $\vec{L}_2=(1;6;-5)$. **(2)** $u=x^2+y^2+z^2,\ M_0=(2;3;4)$, $\vec{L}_1=(2;3;4)$, $\vec{L}_2=(1;6;-5)$. **(3)** $u=x^3+x+y+xyz,\ M_0=(1;1;-1)$, $\vec{L}=(1;1;1)$, **(4)** $u=xy^2z^3(7-x-2y-3z), M_0=(1;1;1)$, $\vec{L}=(1;1;1)$.

65. Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x)$, если $f(t)$ – дифференцируемая функция, **(1)** $u(x)=f(2x+1)$, **(2)** $u(x)=f(x^2)$, **(3)** $u(x)=e^{f(x)}$, **(4)** $u(x)=f(3x-2)$, **(5)** $u(x)=f(e^x)$, **(6)** $u(x)=\ln f(x)$, **(7)** $u(x)=f(\ln x)$, **(8)** $u(x)=f(f(x))$, **(9)** $u(x)=\sqrt{f(x)}$,

66. Найдите дифференциал первого порядка функции **(1)** $p^{\ln(x^2+y^2)\cdot\arcsin\frac{y}{x}}$, **(2)** $(\sin x)^q$, **(3)** $(\sin x)^{\ln(x^2+y^2)\cdot\arcsin\frac{y}{x}}$, **(4)** $p^{(x^2+y^2)\cdot\sin\ln\frac{y}{x}}$, **(5)** $(\arcsin x)^q$, **(6)** $(\arcsin x)^{(x^2+y^2)\cdot\sin\ln\frac{y}{x}}$, **(7)** $p^{\cos(x^2+y^2)\cdot\ln\frac{2xy}{x^2+y^2}}$, **(8)** $(\operatorname{arctg} x)^q$, **(9)** $(\operatorname{arctg} x)^{\cos(x^2+y^2)\cdot\ln\frac{2xy}{x^2+y^2}}$,

67. Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x)$, если $f(t,s)$ – дифференцируемая функция, **(1)** $u(x)=f(x,2x)$, **(2)** $u(x)=\ln f(x,2x)$, **(3)** $u(x)=f(x^2,x^3)$, **(4)** $u(x)=e^{f(2x,x)}$, **(5)** $u(x)=f(3x-2,e^x)$, **(6)** $u(x)=\sin\big(f(3x-2,e^x)\big)$, **(7)** $u(x)=f(\sqrt{x},x)$,

68. Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x,y)$, если $f(t)$ – дифференцируемая функция, **(1)** $u(x,y)=f(x)+f(y)$, **(2)** $u(x,y)=f(x+y)$, **(3)** $u(x,y)=\frac{f(x)}{f(y)}$, **(4)** $u(x,y)=f(x^2+y^2)$, **(5)** $u(x,y)=f(xy)$, **(6)** $u(x,y)=f(x)f(y)$, **(7)** $u(x,y)=f(x)^{f(y)}$, **(8)** $u(x,y)=\log_{f(x)}f(y)$,

69. Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x,y)$, если $f(t,s)$ – дифференцируемая функция, **(1)** $u(x,y)=f(2x,3y)$, **(2)** $u(x,y)=f(x,y)\cdot f(y,x)$, **(3)** $u(x,y)=f(x+y,x-y)$, **(4)** $u(x,y)=f(x+y,x-y)\cdot f(x-y,x+y)$, **(5)** $u(x,y)=f(x,y)+f(y,x)$, **(6)** $u(x,y)=f(x,y)-f(y,x)$, **(7)** $u(x,y)=f(f(x,y),f(y,x))$, **(8)** $u(x,y)=f(x,y)^{f(x,y)}$, **(9)** $u(x,y)=\log_{f(x,y)}f(x,y)$,

70. Найдите дифференциалы первого и второго порядка сложной функции $u(...)$, если f – дважды число раз дифференцируемая функция всех своих переменных, **(1)** $u(x,y)=f(xy)$, **(2)** $u(x,y)=f(x+y)$, **(3)** $u(x,y)=\frac{f(x)}{f(y)}$, **(4)** $u(x,y)=f(x^2+y^2)$, **(5)** $u(x,y)=f(x+y,x-y)$, **(6)** $u(x)=f(x,x)$, **(7)** $u(x)=f(x,x^2,x^3)$, **(8)** $u(x,y)=f(x-y)+f(x+y)$. **(9)** $u(x,y)=f(x,y)-f(y,x)$. **(10)** $u(x,y)=\frac{f(x,y)}{f(y,x)}$.

71. Найдите дифференциал первого порядка сложной функции $u(...)$, если f,g,h – нужное число раз дифференцируемые функции всех своих переменных, **(1)** $u(x,y)=f(x)+g(y)$, **(2)** $u(x,y,z)=f(x,y)+f(y,z)+f(z,x)$, **(3)** $u(x,y,z)=f(x)+g(y)+h(z)$, **(4)** $u(x,y)=\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$. **(5)** $u(x,y)=f(x)g(y)$, **(6)** $u(x,y,z)=f(x)g(y)h(z)$, **(7)** $u(x,y)=f(x-y)+g(x+y)$. **(8)** $u(x,y)=f(x,y)+g(x,y)$. **(9)** $u(x,y)=f(x,y)\cdot g(x,y)$.

72. Найдите дифференциалы первого и второго порядка сложной функции $u(...)$, если f,g,h – нужное число раз дифференцируемые функции всех своих переменных, **(1)** $u(x,y)=f(x)g(y)$, **(2)** $u(x,y)=f(x)+g(y)$, **(3)** $u(x,y,z)=f(x)+g(y)+h(z)$, **(4)** $u(x,y,z)=f(x)g(y)h(z)$, **(5)** $u(x,y)=f(x-y)+g(x+y)$. **(6)** $u(x,y)=f(x,y)+g(x,y)$. **(7)** $u(x,y)=f(x,y)+g(y,x)$.

73. Найдите все точки возможного экстремума, проверьте выполнение достаточных условий: **(1)** $u(x,y)=x^2+y^2$, **(2)** $u(x,y)=x^2-y^2$, **(3)** $u(x,y)=x^2-xy+y^2$, **(4)** $u(x,y)=x^2-2xy+y^2$, **(5)** $u(x,y)=x^2-3xy+y^2$, **(6)** $u(x,y)=xy$, **(7)** $u(x,y)=xy^2$, **(8)** $u(x,y)=x^2y^2$, **(9)** $u(x,y)=x^3+y^3-3xy$, **(10)** $u(x,y)=xy(3-x-y)$, **(11)** $u(x,y)=x^2y^3(6-x-y)$, **(12)** $u(x,y)=xy\ln(1-x^2-y^2)$, **(13)** $u(x,y)=xy+\frac{50}{x}+\frac{20}{y}$, **(14)** $u(x,y)=(5-2x+y)e^{x^2-y}$, **(15)** $u(x,y)=(x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$, **(16)** $u(x,y)=xye^{-x^2/2-y^2/2}$, **(17)** $u(x,y)=x^3y^4e^{-x-y}$, **(18)** $u(x,y)=x^3y^4e^{-x-y^2}$, **(19)** $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, **(20)** $u(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$, **(21)** $u(x,y,z)=xyz$, **(22)** $u(x,y,z)=x^2y^2z^2$, **(23)** $u(x,y,z)=2x^2+2y^2+2z^2-xy-xz-yz$, **(24)** $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz$, **(25)** $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz$, **(26)** $u(x,y,z)=xy^2z^3(7-x-2y-3z)$, **(27)** $u(x,y,z)=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}$.

74. Найдите первую и вторую производные неявной функции $y=f(x)$, заданной уравнением $u(x,y)=0$. Найдите все точки возможного экстремума функции $f(x)$. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума в каждой точке возможного экстремеума (если таковые существуют). Не следует явно выражать y через x, даже если это возможно. **(1)** $u(x,y)=2x+3y-5$, **(2)** $u(x,y)=x^3+y^3-3xy$, **(3)** $u(x,y)=x^2+y^2-1$, **(4)** $u(x,y)=(x^2+y^2)^2-x^2y$, **(5)** $u(x,y)=x^4+y^4-1$, **(6)** $u(x,y)=xy-1$, **(7)** $u(x,y)=x^4+y^4+y-2$, $y>0$, **(8)** $u)x,y)=e^{x+y}+x+y-1$, **(9)** $u(x,y)=y^4+x^4+4x-5$, **(10)** $u(x,y)=(x^2+y^2)^2-xy^2$, **(11)** $u(x,y)=(x^2+y)^2-8(x^2-y)$, **(12)** $u(x,y)=x^3+y^3+y-2$, $y>0$, **(13)** $u(x,y)=(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)$, $x>0$, **(14)** $u(x,y)=(x^2+y^2)^2-4xy$, $x>0$, **(15)** $u(x,y)=8x^2y-x^4-y^4$, **(16)** $u(x,y)=x^y-y^x$. Не следует пытаться получить решение уравнения $u(x,y)=0$ в явном виде, даже если это возможно.

75. Найдите первые и вторые производные неявной функции $z=f(x,y)$, заданной уравнением $u(x,y,z)=0$. Найдите все точки возможного экстремума функции $f(x,y)$. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума в каждой точке возможного экстремума (если таковые существуют). **(1)** $u=x^2+y^2-z$, **(2)** $u=x^2+y^2+z^2-1$, **(3)** $u=z^3+x+y+xyz$, **(4)** $u=x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2$, **(5)** $u=(x^2+y^2+z^2)^2-8(x^2+y^2-z^2)$, **(6)** $u=(x^2+y^2+z^2)^3-27x^2y^2z$.
Не следует пытаться получить решение уравнения $u(x,y,z)=0$ в явном виде, даже если это возможно.

76. Используя метод Лагранжа, найдите все точки экстремума функции $u(x,y)$ при условии $f(x,y)=0$. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума: **(1)** $u=x+y$, $f=x^2+y^2-2$; **(2)** $u=x^2+y^2$, $f=x+y-2$; **(3)** $u=xy$, $f=x+y-2$; **(4)** $u=x+y$, $f=xy-1$; **(5)** $u=x+y$, $f=x^2+y^2-2x$; **(6)** $u=x+y$,

$f = x^2 - 2y$; **(7)** $u = y - x^2$, $f = x^2 + y^2 - 4$. **(8)** $u = xy$, $f = x^3 + y^3 - 2xy$. **(9)** $u = xy^2$, $f = x + 2y - 3$. **(10)** $u = xy^2$, $f = x + y - 3$. **(11)** $u = x^2y^3$, $f = 2x + 3y - 5$. **(12)** $u = x^2y^3$, $f = x + y - 900$.

77. Используя метод Лагранжа, найдите все точки экстремума функции $u(x, y, z)$ при условии $f(x, y, z) = 0$. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума: **(1)** $u = x^2y^3z^4$, $f = 2x + 3y + 4z - 9$. **(2)** $f = x + y + z$, $u = xyz - 1$. **(3)** $u = x + y + z$, $f = x^2 + y^2 + z^2 - 3$. **(4)** $u = xyz$, $f = x + y + z - 3$. **(5)** $u = x^2 + y^2 + z^2$, $f = x + y + z - 3$. **(6)** $u = x^2 + y^2 + z^2$, $f = xyz - 1$. **(7)** $u = xyz$, $f = x^2 + y^2 + z^2 - 3$. **(8)** $u = x + y + z$, $f = x^2 + y^2 + z^2 - 3$. **(9)** $u = 2x + 3y + 4z$, $f = x^2y^3z^4 - 1$. **(10)** $u = x^2y^3z^4$, $f = x + y + z - 18$, $x > 0 \bigcap y > 0 \bigcap z > 0$.

78. Найдите производную функции **(1)** $f(x) = \int_0^x \sin(t^2)\, dt$, **(2)** $f(x) = \int_x^1 \arcsin\sqrt{t}\, dt$, **(3)** $f(x) = \int_0^{x^2} \ln(\frac{\cos t}{1+t^3})\, dt$, **(4)** $f(x) = \int_{\operatorname{arctg} x}^{\cos x} e^{-t^2}\, dt$.

79. Найдите **(1)** $\int_0^2 x(2-x)\, dx$, **(2)** $\int_0^2 x^3(2-x)^2\, dx$, **(3)** $\int_0^\pi x\sin x\, dx$, **(4)** $\int_1^e x\ln x\, dx$, **(5)** $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$, **(6)** $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, **(7)** $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$, **(8)** $\int_2^3 \frac{dx}{x^2-6x+5}$, **(9)** $\int_0^\pi e^x \sin x\, dx$, **(10)** $\int_1^{e^\pi} \sin\ln x\, dx$, **(11)** $\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \frac{dx}{\sin x}$,

80. Запишите указанный повторный интеграл в виде двойного интеграла, нарисуйте область интегрирования, запишите в виде повторного интеграла, поменяв порядок интегрирования, найдите значение:
(1) $\int_0^1 \left(\int_0^x x^2y\, dy\right) dx$, **(2)** $\int_0^1 \left(\int_y^1 xy\, dx\right) dy$, **(3)** $\int_0^\pi \left(\int_0^{\sin x} 2y\, dy\right) dx$, **(4)** $\int_0^2 \left(\int_0^{x(2-x)} xy\, dy\right) dx$, **(5)** $\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} 2y\, dy\right) dx$, **(6)** $\int_0^1 \left(\int_{\arcsin x}^{\pi/2} \cos y\, dy\right) dx$.

81. Найдите значение, интегрируя в полярных координатах, **(1)** $\iint_G (x^2 + y^2)\, dx\, dy$, $G = \{x^2 + y^2 \leqslant 6\}$, **(2)** $\iint_G xy\, dx\, dy$, $G = \{1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\} \bigcap \{\frac{\pi}{6} \leqslant \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \leqslant \frac{\pi}{3}\} \bigcap x > 0$, **(3)** $\iint_G (x^2 + y^2)\, dx\, dy$, $G = \{1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\} \bigcap \{\frac{\pi}{6} \leqslant \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \leqslant \frac{\pi}{3}\} \bigcap x > 0$, **(4)** $\iint_G (x^2 - y^2)\, dx\, dy$, $G = \{1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\} \bigcap \{\frac{\pi}{6} \leqslant \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \leqslant \frac{\pi}{4}\} \bigcap x > 0$,

82. Найдите площадь фигуры, ограниченной линией **(1)** $x^2 + y^2 = 2x$, **(2)** $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2 \bigcap x > 0$, **(3)** $(x^2 + y^2)^2 = 4xy \bigcap x > 0 \bigcap y > 0$.

83. Пусть $y_1(x) \leqslant y_2(x)$ при $x \in [a;\, b]$, область D определена неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$, $M[1] \stackrel{\text{def}}{=\!=} \int_D 1dxdy$, $M[1] = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy$, $M[1] = \int_a^b \bigl(y_2(x) - y_1(x)\bigr)dx$, $M[x] \stackrel{\text{def}}{=\!=} \int_D xdxdy$, $M[x] = \int_a^b x\bigl(y_2(x) - y_1(x)\bigr)dx$, $M[x^2] = \int_a^b x^2\bigl(y_2(x) - y_1(x)\bigr)dx$, $\langle x\rangle \stackrel{\text{def}}{=\!=} \frac{M[x]}{M[1]}$, $\langle x^2\rangle \stackrel{\text{def}}{=\!=} \frac{M[x^2]}{M[1]}$, $Dx \stackrel{\text{def}}{=\!=} \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$, $M[y] \stackrel{\text{def}}{=\!=} \int_D ydxdy$, $M[y] = \frac{1}{2}\int_a^b \bigl(y_2^2(x) - y_1^2(x)\bigr)dx$, $\langle y\rangle \stackrel{\text{def}}{=\!=} \frac{M[y]}{M[1]}$, $\mathrm{VOX}[1] \stackrel{\text{def}}{=\!=} \int_D 2\pi ydxdy$, $\mathrm{VOX}[1] = \pi\int_a^b \bigl(y_2^2(x) - y_1^2(x)\bigr)dx$, $\mathrm{VOX}[x] \stackrel{\text{def}}{=\!=} \int_D 2\pi xydxdy$, $\mathrm{VOX}[x] = \pi\int_a^b x\bigl(y_2^2(x) - y_1^2(x)\bigr)dx$, $\mathrm{VOX}\langle x\rangle \stackrel{\text{def}}{=\!=} \frac{VOX[x]}{VOX[1]}$, $\mathrm{VOX}[y] = 0$, $\mathrm{VOX}[y^2] \stackrel{\text{def}}{=\!=} \int_D 2\pi y^3dxdy$, $\mathrm{VOX}[y^2] = \frac{\pi}{2}\int_a^b \bigl(y_2^4(x) - y_1^4(x)\bigr)dx$, $\mathrm{VOY}[1] \stackrel{\text{def}}{=\!=} \int_D 2\pi xdxdy$, $\mathrm{VOY}[1] = 2\pi\int_a^b x\bigl(y_2(x) - y_1(x)\bigr)dx$, $\mathrm{VOY}[y] \stackrel{\text{def}}{=\!=} \int_D 2\pi xydxdy$, $\mathrm{VOY}[y] = \pi\int_a^b x\bigl(y_2^2(x) - y_1^2(x)\bigr)dx$, $\mathrm{VOY}\langle y\rangle \stackrel{\text{def}}{=\!=} \frac{\mathrm{VOY}[y]}{\mathrm{VOY}[1]}$, $\mathrm{VOY}[x] = 0$, $\mathrm{VOY}[x^2] \stackrel{\text{def}}{=\!=} \int_D 2\pi x^3dxdy$, $\mathrm{VOY}[x^2] = 2\pi\int_a^b x^3\bigl(y_2(x) - y_1(x)\bigr)dx$. Вычислите все указанные величины для **(1)** $\rho(x) = 1,\ x \in [0;\, 1]$, **(2)** $\rho(x) = x,\ x \in [0;\, 1]$, **(3)** $\rho(x) = x^2,\ x \in [0;\, 12]$, **(4)** $\rho(x) = x(2-x),\ x \in [0;\, 2]$, **(5)** $\rho(x) = x^2(3-x),\ x \in [0;\, 3]$, **(6)** $\rho(x) = x^2(1-x^2),\ x \in [0;\, 1]$, **(7)** $\rho(x) = \sin x,\ x \in [0;\, \pi]$, **(8)** $\rho(x) = \frac{3}{x^4},\ x \in [1;\, 10^8]$, **(9)** $\rho(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ x \in [10^{-8};\, 1]$, **(10)** $\rho(x) = e^{-x},\ x \in [0;\, 1000]$,

84. Пусть интегрируемая функция $\rho(x)$ определена на $[a;\, b]$, $\rho(x) \geqslant 0$, $M[1] = \int_a^b \rho(x)dx$, $M[1] > 0$, $M[x] \stackrel{\text{def}}{=\!=} \int_a^b x\rho(x)dx$, $M[x^2] \stackrel{\text{def}}{=\!=} \int_a^b x^2\rho(x)dx$, $\langle x\rangle \stackrel{\text{def}}{=\!=} \frac{M[x]}{M[1]}$, $\langle x^2\rangle \stackrel{\text{def}}{=\!=} \frac{M[x^2]}{M[x]}$, $Dx \stackrel{\text{def}}{=\!=} \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$. Вычислите все указанные величины для **(1)** $\rho(x) = \sin x,\ x \in [0;\, \pi/2]$, **(2)** $\rho(x) = \operatorname{arctg} x,\ x \in [0;\, 1]$, **(3)** $\rho(x) = \arcsin x,\ x \in [0;\, 1]$, **(4)** $\rho(x) = e^{-x},\ x \in [0;\, 1]$, **(5)** $\rho(x) = e^{-x},\ x \in [0;\, 10^{12}]$, **(6)** $\rho(x) = \ln x,\ x \in [e^{-4};\, 1]$,

85. Пусть $f(x)$ - непрерывная функция на $[a;\, b]$, $f(x) > 0,\ x \in (a;\, b)$, область G на плоскости задана неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$. Определим числа $M[1] = \iint_G dx\, dy$, $M[x] = \iint_G x\, dx\, dy$, $M[x^2] = \iint_G x^2\, dx\, dy$, $M[y] = \iint_G y\, dx\, dy$, $M[y^2] = \iint_G y^2\, dx\, dy$, $< x > \stackrel{\text{def}}{=\!=} \frac{M[x]}{M[1]}$, $< y > \stackrel{\text{def}}{=\!=} \frac{M[y]}{M[1]}$. Запишите величины $M[1]$, $M[x]$, $M[x^2]$ в виде определенного интеграла. Вычислите все указанные величины для **(1)** $f(x) = 1,\ x \in [0;\, 1]$, **(2)** $f(x) = x,\ x \in [0;\, 2]$, **(3)** $f(x) = x(4-x),\ x \in [0;\, 4]$, **(4)** $f(x) = \sin x,\ x \in [0;\, \pi]$, **(5)** $f(x) = \ln x,\ x \in [10^{-3};\, 1]$, **(6)** $f(x) = x^{-1},\ x \in [10^{-3};\, 1]$, **(7)** $f(x) = e^{-x},\ x \in [0;\, 1000]$. Обьясните физический смысл.

86. Пусть $f(x)$ – непрерывная функция на $[a;\, b]$, $f(x) > 0,\ x \in (a;\, b)$, область G на плоскости задана неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$, $\rho(x, y)$ – непрерывная функция в области G, $\rho(x, y) > 0$ внутри G. Определим числа $M[1] = \iint_G \rho(x, y)\, dx\, dy$, $M[x] = \iint_G x \cdot \rho(x, y)\, dx\, dy$, $M[x^2] = \iint_G x^2 \cdot \rho(x, y)\, dx\, dy$, $M[y] = \iint_G y \cdot \rho(x, y)\, dx\, dy$, $M[y^2] = \iint_G y^2 \cdot \rho(x, y)\, dx\, dy$, $< x > \stackrel{\text{def}}{=\!=} \frac{M[x]}{M[1]}$, $< y > \stackrel{\text{def}}{=\!=} \frac{M[y]}{M[1]}$. Вычислите все указанные величины для **(1)** $f(x) = 1,\ x \in [0;\, 1]$, $\rho(x, y) = x$; **(2)** $f(x) = x,\ x \in [0;\, 1]$, $\rho(x, y) = y$; **(3)** $f(x) = x,\ x \in [0;\, 2]$, $\rho(x, y) = xy$; **(4)** $f(x) = x(4-x),\ x \in [0;\, 4]$, $\rho(x, y) = y$; Обьясните физический смысл.

Итоговая контрольная работа 1 модуля 1 курса

Контрольная работаvвариант 1108-11

1. Найдите производную функции $f(x) = \sin(3x)$.

2. Найдите производную функции $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{x-1}$ в точке $x = 5$.

3. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = x^4$ в точке $x = 2$ и найдите абсциссу точки, в которой касательная пересекает ось абсцисс.

4. Вычислите первый и второй дифференциалы функции $f(x) = \sqrt{15+x}$, если $x = 10,\ dx = 3$.

5. Найдите $\lim_{n\to+\infty} \frac{8n+5}{2n+1}$.

6. Найдите $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$.

7. Найдите $\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+9}-4}{x-7}$.

8. Найдите $\lim_{x\to 0} \frac{3\sin x - \operatorname{tg} 3x}{x^3}$.

9. Найдите $\lim_{x\to 0}\bigl(1+\sin 2x\bigr)^{\frac{3}{x}}$.

10. Укажите наибольшее значение параметра δ, при котором $\forall x : 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$. Сделайте это для следующих функции и параметров: $f(x) = 3^x,\ a = 4,\ b = f(a),\ \varepsilon = 1$.

11. Пусть $f(x) = \sin x - x$ и $x \to 0$, $f(x) = o(x^\alpha)$ означает $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0$, или, что то же самое, $\frac{f(x)}{x^\alpha} = o(1)$. Укажите все верные утверждения: **(a)** $f(x) = o(1)$. **(b)** $f(x) = o(x)$. **(c)** $f(x) = o(x^2)$. **(d)** $f(x) = o(x^3)$. **(e)** $f(x) = o(x^4)$. **(f)** $f(x) = o(x^5)$.

12. Сформулируйте определение: "Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$".

T577 (2007-2008) Итоговая контрольная работа 2 модуля 1 курса Курс 1 Модуль 2 w16–v1

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

1. Найдите $f'(x)$, если $f(x) = \left(\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}\right)^2$.

2. Найдите производную порядка n функции $f(x) = x^2 \ln x$.

3. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt[3]{4x}$, касающейся графика этой функции в точке с абсциссой $x = 16$. Найдите точки пересечения касательной с осями абсцисс и ординат.

4. Найдите df и d^2f, если $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x = 16$ и $dx = 9$.

5. Найдите, используя правило Лопиталя, $\lim_{x\to e} \frac{e^{ex} - x^{e^2}}{(x-e)^2}$

6. Используя формулы Тейлора, найдите $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{arctg} 3x - 5x}{x^3}$

7. Используя формулу конечных приращений, оцените $f(b) - f(a)$, если $f(x) = \frac{30}{11}\sqrt{x},\ a = 25,\ b = 36$.

8. Напишите выражение для многочлена Тейлора n-го порядка для функции $f(x) = e^x$ с центром $x_0 = 0$. Оцените величину остаточного члена в форме Лагранжа для $n = 6,\ x = 3$.

9. Нарисуйте эскиз графика функции $f(x) = 6x^2 - 2x^6$, найдите точки экстремума и точки перегиба.

10. Нарисуйте эскиз графика функции $f(x) = x^3 \ln x$.

11. Нарисуйте эскиз графика функции $f(x) = \sqrt[5]{\frac{(x-5)^7}{x^2}}$, найдите точки экстремума и наклонную асимптоту.

12. Банк начисляет $n\%$ на вложенный капитал каждый месяц на протяжении m месяцев. Найдите приближенно капитал в конце указанного периода, если в начале периода капитал составлял 10 тысяч условных единиц и заданы значения $n = 0{,}6;\ m = 50$. Используйте при необходимости таблицу (в которой проведено округление с точностью не хуже единицы последнего указанного десятичного разряда),

x	$0,3$	$0,4$	$0,5$	$0,75$	1	$1,5$	2	$2,5$	3	5
e^x	$1,3499$	$1,4918$	$1,6487$	$2,1170$	$2,7183$	$4,4817$	$7,3891$	$12,182$	$20,086$	$148,41$

Выполните оценку погрешности.

Государственный университет Высшая школа экономики Факультет бизнес-информатики
Экзамен за 3 и 4 модули 1 курса, январь-апрель 2008
Функции нескольких переменных и интегрирование (3 и 4 модули) Вариант 1407-21

1. Пусть $u(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2x},\ u(0,y)=0$. **(1)** Нарисуйте семейство линий равного уровня функции $u(x,y)$. **(2)** Является ли функция $u(x,y)$ непрерывной в точке $x=0,\ y=0$?

2. Пусть $u(x,y)=x^3+y^6-3xy^2$. Найдите частные производные первого и второго порядков функции $u(x,y)$. Найдите du и d^2u. Напишите уравнение касательной плоскости к поверхности $z=u(x,y)$ в точке $M_0=(x_0;\ y_0),\ x_0=3,\ y_0=1$. Найдите все точки локального экстремума функции $u(x,y)$. Найдите du и d^2u в одной из точек локального экстремума.

3. Пусть $u(x,y)=x^4+y^4-4x^2y$. Найдите первый и второй дифференциалы функции $y=f(x)$, определяемой уравнением $u(x,y)=0$. Найдите все точки возможного экстремума функции $y=f(x)$, расположенные в области $x^2+y^2>0$. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума.

4. Решите методом Лагранжа задачу об экстремуме функции $u(x,y)=x^4+y^2$ при условии $x^2y=1$ в области $G=\{x>0;\ y>0\}$

5. **(1)** Найдите $\int 9\sqrt{x}\,\ln x\,dx$. **(2)** Найдите $\int_1^{e^2} 9\sqrt{x}\,\ln x\,dx$.

6. **(1)** Нарисуйте фигуру D на плоскости $(x;y)$, для которой $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_{-1}^{1}dy\int_y^{2y+1}dx\,f(x,y)$.
(2) Найдите указанный интеграл для $f(x,y)=y^3$. **(3)** Выполните операцию перемены порядка интегрирования.

7. Пусть функция $z=f(x,y)$ задана уравнением $z^3+5xyz=x^5+y^5+4z^5$. Найдите dz. Найдите все точки возможного экстремума функции $z=f(x,y)$. Найдите d^2z. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума.

8. Найдите $\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^4+y^4)\,dxdy$.

9. Найдите $M[1]=\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$, $M[x]=\int_a^{+\infty}xf(x)\,dx$, $<x>=\frac{M[x]}{M[1]}$, для $f(x)=x^2e^{-3x}$, $a=0$.

10. Найдите методом Лагранжа все точки экстремума функции $u(x,y,z)$ с условием $f(x,y,z)=0$ для $u=x^2y^3z^4$, $f=x+y+z-9$ в области $\{x>0\bigcap y>0\bigcap z>0\}$.

11. Пусть $u(x,y)=\sqrt[3]{xy(x+y)}$. **(1)** Является ли данная функция непрерывной в точке $(0;\,0)$? **(2)** Имеет ли данная функция частные производные первого порядка в точке $(0;\,0)$? Если имеет, найдите их. **(3)** Верно ли, что данная функция имеет производную по любому направлению в точке $(0;\,0)$? Если имеет, найдите производную по направлению $\vec{l}=(\cos\varphi,\sin\varphi)$. **(4)** Верно ли, что производная по направлению $\vec{l}$ в точке $(0;\,0)$ равна $\left(\operatorname{grad}u,\,\vec{l}\right)$? **(5)** Верно ли, что $u(x,y)-x\frac{\partial u}{\partial x}(0;0)-y\frac{\partial u}{\partial y}(0;0)=o(\rho)$, где $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$? **(6)** Является ли функция $u(x,y)$ дифференцируемой в точке $(0;0)$?

12. Руководитель дома моды может нанять x менеджеров, y дизайнеров и z портных, при этом его прибыль пропорциональна величине $x^5y^3z^2$, если x,y,z выражены в сотнях человек. Однако, общая площадь помещения ограничена и при большом количестве работников они мешают друг другу. Поэтому его прибыль пропорциональна также величине $11-5x-3y-2z$, т.е. в конечном счете прибыль равна $x^5y^3z^2\big(11-5x-3y-2z\big)$. **(1)** Докажите, что максимальная прибыль получится при $x=y=z=1$. **(2)** Используя первый и второй дифференциалы, оцените прибыль при $x=y=z=1{,}02$. **(3)** В данный момент в доме моды работают 30 менеджеров, 30 дизайнеров и 30 портных, т.е. $x=y=z=0{,}3$. Можно нанять еще Δx менеджеров, Δy дизайнеров и Δz портных, причем по финансовым соображениям $(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2=r^2$, где r – некоторое небольшое число. Какие значения должно иметь отношение $\Delta x:\Delta y:\Delta z$, чтобы прирост прибыли был максимален?

Государственный университет Высшая школа экономики

Факультет бизнес-информатики

Экзамен, курс 2 модуль 2, dec 2008 v11

1. При каких значениях α сходится $\int_1^{+\infty} x^{3-\alpha} dx$? Найдите этот интеграл.

2. **(1)** Найдите $\int 8x(\ln x)^2\, dx$. **(2)** Найдите $\int_0^1 8x(\ln x)^2\, dx$.

3. Найдите $\int_0^{+\infty} x^{41} e^{-x^6}\, dx$.

4. **(1)** При каких x сходится ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$? **(2)** Найдите сумму этого ряда.

5. Разложите функцию $\int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$ в степенной ряд с центром $x_0 = 0$.

6. Найдите $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x\, dx$ методом двукратного интегрирования по частям.

7. Найдите $\int_0^{+\infty} x e^{-x} \sin x\, dx$ методом дифференцирования по параметру (предварительно введите параметр в нужном месте).

8. **(1)** Нарисуйте фигуру D на плоскости $(x; y)$, для которой $\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} dy \int_{-2y}^{1-y} dx\, f(x,y)$.
(2) Найдите указанный интеграл для $f(x,y) = y^4$. **(3)** Выполните операцию перемены порядка интегрирования.

9. Найдите площадь фигуры $(x^2 + y^2)^{12} \leqslant x^2 y^{18}$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$

10. Пусть $\rho(x) = x^9 \big(\ln x\big)^{20}$, $0 < x < 1$. **(1)** Найдите значение $M1 = \int_0^1 \rho(x)\, dx$, $Mx = \int_0^1 x\rho(x)\, dx$, $Mx^2 = \int_0^1 x^2 \rho(x)\, dx$. **(2)** Найдите $< x >= \frac{Mx}{M1}$. **(3)** Найдите $< x^2 >= \frac{Mx^2}{M1}$. **(4)** Найдите Dx. Оцените с точностью не хуже 5% без калькулятора.

11. Докажите, что функциональная последовательность $f_n(x) = \arcsin(x^n)$ на промежутке $x \in [-1;\ 1]$ не является равномерно сходящейся

12. Докажите, что $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.