Типовые задачи, разбираемые на лекциях и на семинарах и входящие в программу зачета и экзамена

1. Укажите бесконечно малые и бесконечно большие функции при $x \to +\infty$ и при $x \to 0$. **(1)** $f(x) = \operatorname{tg} x$, **(2)** $f(x) = \sin x$, **(3)** $f(x) = x \sin x$, **(4)** $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, **(5)** $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, **(6)** $f(x) = \ln x$, **(7)** $f(x) = x \ln x$, **(8)** $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, **(9)** $f(x) = x^{-1}$, **(10)** $f(x) = \operatorname{arctg} x$, **(11)** $f(x) = \frac{x}{\operatorname{arctg} x}$, **(12)** $f(x) = x^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$, **(13)** $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, **(14)** $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+5}$.

2. Является ли верным утверждение: **(1)** $x = o(x^2)$ при $x \to 0$, **(2)** $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$, **(3)** $x^{-1} = o(x^{-2})$ при $x \to +\infty$, **(4)** $x^{-2} = o(x^{-1})$ при $x \to +\infty$, **(5)** $(\ln x)^{-1} = o(x)$ при $x \to 0$, **(6)** $(\ln x)^{-1} = o(x^{-1})$ при $x \to +\infty$, **(7)** $x^{-1} = o((\ln x)^{-1})$ при $x \to +\infty$, **(8)** $\frac{1}{x \ln x} = o(\frac{1}{x})$ при $x \to +\infty$, **(9)** $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$ при $x \to 0$, **(10)** $\sin x = x + o(x^2)$ при $x \to 0$, **(11)** $\ln(1-x) = -x + o(x^2)$ при $x \to 0$, **(12)** $\ln(1-x) = -x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ при $x \to 0$, **(13)** $\ln(1+x) = x + o(x^2)$ при $x \to +\infty$, **(14)** $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ при $x \to +\infty$, **(15)** $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ при $x \to 0$, **(16)** $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ при $x \to +\infty$, **(17)** $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ при $x \to 0$, **(18)** $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = o(x^{-1})$ при $x \to +\infty$.

3. При каких α и β является верным утверждение $f(x) = \alpha + \beta x + o(x)$ при $x \to 0$, если **(1)** $f(x) = (1+x)^2$, **(2)** $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}-1}{x}$, **(3)** $f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$, **(4)** $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, **(5)** $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, **(6)** $f(x) = \frac{e^x-1}{x}$. Тот же вопрос для утверждения **(7)** $\sin x = \alpha x + \beta x^3 + o(x^3)$, **(8)** $\arcsin x = \alpha x + \beta x^3 + o(x^3)$. **(9)** $\ln(1+x) = \alpha x + \beta x^2 + o(x^2)$.

4. Используя формулы $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$, найдите такие A, b, C, D, что является верным утверждение **(1)** $\sqrt{\cos x} = A + Bx + Cx^2 + o(x^3)$ при $x \to 0$, **(2)** $\frac{1}{1+\sin x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$, **(3)** $\sin(\operatorname{tg} 2x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$,

5. Используя формулы $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$, найдите такие A, b, C, D, что является верным утверждение **(1)** $\operatorname{tg}(2\sin x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$, **(2)** $\operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg} x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$.

6. Используя формулы $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$, найдите такие A, b, C, D, что является верным утверждение **(1)** $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$, **(2)** $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$.

7. При каких α и β является верным утверждение $f(x) = \alpha + \beta x + o(x)$ при $x \to 0$, если **(1)** $f(x) = (1+x)^2$, **(2)** $f(x) = (1+x)^{-1}$, **(3)** $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}-1}{x}$, **(4)** $f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$, **(5)** $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, **(6)** $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, **(7)** $f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x}$. Тот же вопрос для утверждения **(8)** $\sin x = \alpha x + \beta x^3 + o(x^3)$, **(9)** $\operatorname{arctg} x = \alpha x + \beta x^3 + o(x^3)$,

8. Используя тригонометрические формулы, найдите **(1)** $\lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a}$, **(2)** $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(a+x) - 2\cos a + \cos(a-x)}{x^2}$, **(3)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x - 3\sin x}{x^3}$, **(4)** $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{x^2}$.

9. Найдите **(1)** $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$, **(2)** $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[12]{x}-1}$, **(3)** $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$, **(4)** $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13}-4}{x-3}$, **(5)** $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13}-4}{\sqrt{x+6}-3}$, **(6)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+8}-2}$, **(7)** $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 3x}$. **(8)** $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\sin 3x}{\ln\sin 2x}$.

10. Найдите **(1)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$, **(2)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt{9+x}}{x}$, **(3)** $\lim_{x\to+\infty}(x - \sqrt{x^2-x})$, **(4)** $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x+2} - \sqrt{x^2-x-2})$, **(5)** $\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-2})$, **(6)** $\lim_{x\to+\infty} x^2(\sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt[3]{x^3-2})$, **(7)** $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2})$, **(8)** $\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x}(\sqrt{x-1} - 2\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$, **(9)** $\lim_{x\to+\infty} x^3(\sqrt{x^2-1} - 2x + \sqrt{x^2+1})$.

11. Найдите **(1)** $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{x}$, **(2)** $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, **(3)** $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^{123}}{x^{123}}$, **(4)** $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{2^x}$, **(5)** $\lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln x}{x}$.

12. Найдите **(1)** $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$, **(2)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n}$, **(3)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^{0,01}}$, **(4)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^{17}}{n^{0,01}}$, **(5)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n}$, **(6)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{2006}}{(1{,}001)^n}$, **(7)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n}$, **(8)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{2006}}{n!}$, **(9)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{2006}}{n^n}$, **(10)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n!}$, **(11)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^n}$.

13. Найдите, используя правило Лопиталя. **(1)** $\lim_{x\to+0} x\ln x$, **(2)** $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$, **(3)** $\lim_{x\to+0} x^{1/x}$, **(4)** $\lim_{x\to 1-0} \frac{\arcsin x - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x}}$, **(5)** $\lim_{x\to 2} \frac{2^x - x^2}{x-2}$.

14. Найдите, используя правило Лопиталя, **(1)** $\lim_{x\to e} \frac{e^x - x^e}{x-e}$, **(2)** $\lim_{x\to e} \frac{e^{2x} - x^{2e}}{(x-e)^2}$, **(3)** $\lim_{x\to 1} \frac{e^{e^2 x} - (ex)^{e^2}}{(x-1)^2}$. **(4)** $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}$, **(5)** $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x} - e}{x^2}$.

15. Используя формулу первого замечательного предела, найдите **(1)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$, **(2)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}$, **(3)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{3x}$, **(4)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$, **(5)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}$, **(6)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-\sin x}{x}$, **(7)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} x}{x}$, **(8)** $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-2\cos 2x+\cos x}{x^2}$, **(9)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$.

16. Используя формулы $\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)$, $\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$, $\operatorname{tg} x = x+\frac{x^3}{3}+o(x^4)$, найдите **(1)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2\sin x}{x^3}$, **(2)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin 3x-\sin 4x}{x^3}$, **(3)** $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}$, **(4)** $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\cos 3x-2\cos 2x}{x^2}$, **(5)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 3x-3\operatorname{tg} x}{x^3}$, **(6)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 3x-\operatorname{tg} 4x}{x^3}$, **(7)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$.

17. Найдите **(1)** $\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x}$, **(2)** $\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x^2}$, **(3)** $\lim_{x\to+\infty} x^2\big(\cos\frac{1}{x}-1\big)$, **(4)** $\lim_{x\to+\infty} x^3\big(\sin\frac{1}{x}-\operatorname{tg}\frac{1}{x}\big)$,

18. Найдите **(1)** $\lim_{x\to+\infty}\big(1+\frac{2}{x}\big)^{3x}$, **(2)** $\lim_{x\to+\infty}\big(1+\frac{1}{x^2}\big)^{x^2}$, **(3)** $\lim_{x\to 0}\big(1-3x\big)^{2/x}$, **(4)** $\lim_{x\to 0}\big(1-2x\big)^{3x}$, **(5)** $\lim_{x\to 0}\big(\cos x\big)^{1/x^2}$, **(6)** $\lim_{x\to 0}\big(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\big)^{1/x^2}$, **(7)** $\lim_{x\to 0}\big(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\big)^{1/x^2}$, **(8)** $\lim_{x\to 0}\big(\frac{\sin x}{x}\big)^{1/x^2}$, **(9)** $\lim_{x\to 0}\big(\frac{\arcsin x}{x}\big)^{1/x^2}$, **(10)** $\lim_{n\to+\infty}\big(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}\big)^{n}$.

19. Найдите **(1)** $\lim_{n\to+\infty}\big(1+\frac{2}{n}\big)^{3n}$, **(2)** $\lim_{n\to+\infty}\big(1-\frac{3}{n}\big)^{4n}$, **(3)** $\lim_{n\to+\infty}\big(1+n\big)^{1/n}$.

20. Найдите производную: **(1)** $f(x)=x$, **(2)** $f(x)=x^2$, **(3)** $f(x)=2x^3+3x^2+6x+12$, **(4)** $f(x)=x^\pi$, **(5)** $f(x)=\sqrt{x}$, **(6)** $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, **(7)** $f(x)=\frac{1}{x^2}$, **(8)** $f(x)=\sqrt{x-1}$, **(9)** $f(x)=\sin x$, **(10)** $f(x)=\operatorname{tg} x$, **(11)** $f(x)=\sin(2x)$, **(12)** $f(x)=\ln x$, **(13)** $f(x)=\log_2 x$, **(14)** $f(x)=e^x$, **(15)** $f(x)=\pi^x$, **(16)** $f(x)=2^{-x}$, **(17)** $f(x)=\arcsin x$, **(18)** $f(x)=\arcsin 2x$.

21. Найдите производную: **(1)** $f(x)=\frac{x}{\sin x}$, **(2)** $f(x)=\frac{2x+1}{x+2}$, **(3)** $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$, **(4)** $f(x)=x^2\sin x$, **(5)** $f(x)=x\cos x$, **(6)** $f(x)=e^x\cos x$, **(7)** $f(x)=\sqrt{x}\operatorname{tg} x$, **(8)** $f(x)=x^3\sin 2x$, **(9)** $f(x)=x\ln x$, **(10)** $f(x)=\frac{x}{\ln x}$, **(11)** $f(x)=x^2\cdot 2^x$, **(12)** $f(x)=\frac{e^x}{x}$, **(13)** $f(x)=x\arcsin x$, **(14)** $f(x)=\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

22. Найдите производную: **(1)** $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, **(2)** $f(x)=\sin\sqrt{x}$, **(3)** $f(x)=\ln(2\sqrt{e^x})$, **(4)** $f(x)=\arcsin\sqrt{x}$, **(5)** $f(x)=\sqrt{\operatorname{arctg} x}$, **(6)** $f(x)=e^{\sqrt{-x}}$, **(7)** $f(x)=\big|x^2-5x+6\big|$.

23. Найдите $f^{(n)}(x)$, если **(1)** $f(x)=x^m$, $m<n$, $m,n\in\mathcal{N}$, **(2)** $f(x)=x^m$, $m=n$, $m,n\in\mathcal{N}$, **(3)** $f(x)=x^m$, $m>n$, $m,n\in\mathcal{N}$, **(4)** $f(x)=e^x$, **(5)** $f(x)=e^{2x}$, **(6)** $f(x)=xe^x$, **(7)** $f(x)=xe^{-x}$, **(8)** $f(x)=x^2e^x$, **(9)** $f(x)=\sqrt{x}$, **(10)** $f(x)=\ln x$, **(11)** $f(x)=\ln(x^2+x)$, **(12)** $f(x)=\ln\frac{2x-3}{3x-2}$, **(13)** $f(x)=x\ln x$, **(14)** $f(x)=x^2\ln x$, **(15)** $f(x)=\sin(x)$, **(16)** $f(x)=\sin(3x)$, **(17)** $f(x)=x\sin(x)$, **(18)** $f(x)=x\sin(2x)$, **(19)** $f(x)=x^2\cos(2x)$.

24. Найдите первую производную и первый дифференциал функции **(1)** $f(x)=x^2-6x+5$, **(2)** $f(x)=x^3$, **(3)** $f(x)=\ln x$, **(4)** $f(x)=\sqrt{x}$, **(5)** $f(x)=e^{-x}$, **(6)** $f(x)=xe^{-x}$, **(7)** $f(x)=\sin x$, **(8)** $f(x)=x\sin x$, **(9)** $f(x)=\sin(x^2)$, **(10)** $f(x)=\operatorname{arctg} x$, **(11)** $f(x)=\arcsin x$, **(12)** $f(x)=\arcsin\sqrt{x}$.

25. Найдите вторую производную и второй дифференциал функции **(1)** $f(x)=x^2-6x+5$, **(2)** $f(x)=x^3$, **(3)** $f(x)=\ln x$, **(4)** $f(x)=\sqrt{x}$, **(5)** $f(x)=e^{-x}$, **(6)** $f(x)=xe^{-x}$, **(7)** $f(x)=\sin x$, **(8)** $f(x)=x\sin x$, **(9)** $f(x)=\sin(x^2)$, **(10)** $f(x)=\operatorname{arctg} x$, **(11)** $f(x)=\arcsin x$, **(12)** $f(x)=\arcsin\sqrt{x}$.

26. Найдите **(a)** df, **(b)** d^2f, **(c)** $f(x)+df+\frac{1}{2}d^2f$, **(d)** $f(x+dx)$, если **(1)** $f(x)=2x+3$, $x=2$, $dx=3$, **(2)** $f(x)=x^3$, $x=1$, $dx=1$, **(3)** $f(x)=x^3$, $x=1$, $dx=0{,}1$, **(4)** $f(x)=\ln x$, $x=1$, $dx=1$, **(5)** $f(x)=\sqrt{x}$, $x=16$, $dx=9$, **(6)** $f(x)=\sqrt{1+x}$, $x=1$, $dx=0{,}1$, **(7)** $f(x)=e^x$, $x=\ln 10$, $dx=\ln 2$, **(8)** $f(x)=\sin x$, $x=\frac{\pi}{6}$, $dx=\frac{\pi}{6}$, **(9)** $f(x)=\arcsin x$, $x=\frac{1}{2}$, $dx=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$.

27. Вычислите **(a)** df, **(b)** d^2f, **(c)** $f(x)+df+\frac{1}{2}d^2f$, **(d)** $f(x+dx)$, сравните значения **(c)** и **(d)** с помощью калькулятора, если **(1)** $f(x)=2x+3$, $x=2$, $dx=3$, **(2)** $f(x)=x^3$, $x=1$, $dx=1$, **(3)** $f(x)=\ln x$, $x=1$, $dx=1$, **(4)** $f(x)=\sqrt{x}$, $x=100$, $dx=21$, **(5)** $f(x)=\sin x$, $x=0$, $dx=1$, **(6)** $f(x)=\arcsin x$, $x=0$, $dx=\frac{1}{2}$.

28. Вычислите **(a)** df, **(b)** $f(x)+df$, **(c)** $f(x+dx)$, сравните значения **(b)** и **(c)** с помощью калькулятора, если **(1)** $f(x)=\sqrt{x}$, $x=100$, $dx=21$, **(2)** $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x=8$, $dx=19$, **(3)** $f(x)=\sin x$, $x=\frac{\pi}{6}$, $dx=\frac{\pi}{6}$, **(4)** $f(x)=\operatorname{arctg} x$, $x=0$, $dx=1$, **(5)** $f(x)=\arcsin x$, $x=\frac{1}{2}$, $dx=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$.

29. Найдите d^nf, если **(1)** $f(x)=x^3$, $n=2$, **(2)** $f(x)=x^3$, $n=3$, **(3)** $f(x)=x^3$, $n=4$, **(4)** $f(x)=x^4$, $n=3$, **(5)** $f(x)=\frac{1}{x}$, **(6)** $f(x)=\ln x$, **(7)** $f(x)=x\ln x$, **(8)** $f(x)=\sqrt{x}$, **(9)** $f(x)=\sqrt{x}$, $n=3$, $x=4$, $dx=5$, **(10)** $f(x)=e^x$, **(11)** $f(x)=e^x$, $n=2006$, $x=\ln 36$, $dx=\frac{1}{2}$, **(12)** $f(x)=\sin x$, $n=2004$, **(13)** $f(x)=\sin x$, $n=2005$, **(14)** $f(x)=\sin x$, $n=2006$, **(15)** $f(x)=\sin x$, $n=2007$, **(16)** $f(x)=\cos x$, $n=2007$, $x=\frac{\pi}{3}$, $dx=\frac{1}{2}$, **(17)** $f(x)=x\sin x$, $n=8$, **(18)** $f(x)=x^2\cos x$, $n=9$.

30. Используя формулу конечных приращений, дайте оценку величины
$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)\in\big[(b-a)\inf_{(a;b)}f'(x);\ (b-a)\sup_{(a;b)}f'(x)\big]$, если
(1) $f(x)=\frac{1}{x}$, $a=99$, $b=101$. **(2)** $f(x)=\frac{1}{x}$, $a=1$, $b=1{,}001$. **(3)** $f(x)=\sqrt{x}$, $a=16$, $b=25$.
(4) $f(x)=\operatorname{arctg} x$, $a=9$, $b=10$. **(5)** $f(x)=\operatorname{arctg} x$, $a=1000$, $b=1001$. **(6)** $f(x)=\sin x$, $a=\frac{\pi}{6}$, $b=\frac{\pi}{3}$.
(7) $f(x)=\arcsin x$, $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{\sqrt{2}}$. **(8)** $f(x)=\frac{\sin}{x}$, $a=0{,}1$, $b=0{,}2$. **(9)** $f(x)=x^{1001}$, $a=1$, $b=1{,}001$.

31. Найдите значение многочлена Тейлора с центром $x_0=0$ указанного порядка n в указанной точке x, если **(1)** $f(x)=(2+x)^3$, $x=1$, $n=3$. **(2)** $f(x)=(1+x)^{2006}$, $x=1$, $n=2005$. **(3)** $f(x)=e^x$, $x=2$, $n=4$.

(4) $f(x) = xe^x,\ x = 2,\ n = 4.$ **(5)** $f(x) = \sin x,\ x = 1,\ n = 5.$ **(6)** $f(x) = \cos x,\ x = 2,\ n = 4.$
(7) $f(x) = \sqrt{1-x},\ x = 0{,}36,\ n = 2.$ **(8)** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}},\ x = 0,64,\ n = 2.$ **(9)** $f(x) = \frac{1}{1-x},\ x = 1,\ n = 2006.$
(10) $f(x) = \frac{1}{1+x},\ x = 1,\ n = 2006.$ **(11)** $f(x) = \ln(1-x),\ x = 1,\ n = 5.$ **(12)** $f(x) = \operatorname{arctg}(x),\ x = 1,\ n = 3.$
(13) $f(x) = \arcsin(x),\ x = 1,\ n = 3.$

32. Найдите значение многочлена Тейлора с центром $x_0 = 0$ указанного порядка n в указанной точке x, если
(1) $f(x) = (2+x)^2,\ x = 1,\ n = 2.$ **(2)** $f(x) = x^7,\ x = 1,\ n = 5.$ **(3)** $f(x) = e^{-x},\ x = 2,\ n = 3.$
(4) $f(x) = xe^{-x},\ x = 1,\ n = 2.$ **(5)** $f(x) = \sin x,\ x = 3,\ n = 5.$ **(6)** $f(x) = \cos x,\ x = \frac{1}{2},\ n = 2.$
(7) $f(x) = \sqrt{1+x},\ x = 0{,}21,\ n = 2.$ **(8)** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}},\ x = 0,44,\ n = 2.$ **(9)** $f(x) = \frac{1}{1-x},\ x = \frac{1}{2},\ n = 3.$
(10) $f(x) = \frac{1}{1+x},\ x = \frac{1}{3},\ n = 7.$ **(11)** $f(x) = \ln(1+x),\ x = 1,\ n = 5.$ **(12)** $f(x) = \operatorname{arctg}(x),\ x = \sqrt{3},\ n = 3.$
(13) $f(x) = \arcsin(x),\ x = \frac{1}{2},\ n = 3.$

33. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x) = \frac{x}{x}$, **(2)** $f(x) = \frac{1}{x}$, **(3)** $f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-4)}$, **(4)** $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}$,
(5) $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2+x+1}$, **(6)** $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$, **(7)** $f(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(x-3)(x-4)(x-5)}$,

34. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x) = \operatorname{tg} x$, **(2)** $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, **(3)** $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$, **(4)** $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$,
(5) $f(x) = \frac{x}{\operatorname{tg} x}$, **(6)** $f(x) = \operatorname{tg} x \cos x$, **(7)** $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, **(8)** $f(x) = \operatorname{tg}\frac{3\pi x}{1+x^2}$,

35. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x) = \sin\frac{1}{x} \cdot \ln|x|$, **(2)** $f(x) = e^{-1/x}$, **(3)** $f(x) = (1+x)^{1/x}$,
(4) $f(x) = (1+\frac{1}{x})^x$, **(5)** $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$, **(6)** $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$, **(7)** $f(x) = x^{17}e^{-1/x}$, **(8)** $f(x) = e^{\operatorname{tg} x}$,
(9) $f(x) = \operatorname{tg}(e^x)$, **(10)** $f(x) = \ln|x|$, **(11)** $f(x) = x\ln|x|$, **(12)** $f(x) = \frac{x^2-1}{\ln|x|}$.

36. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, найдите вторую производную, исследуйте направление выпуклости, найдите точки перегиба, нарисуйте эскиз графика функции. **(1)** $f(x) = 3x^2 - 2x^3$, **(2)** $f(x) = 2x^6 - 3x^4$, **(3)** $f(x) = 3x^5 - 5x^3$,
(4) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, **(5)** $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, **(6)** $f(x) = x(4-x)^3$, **(7)** $f(x) = x^2(5-x)^3$,
(8) $f(x) = (x-2)^3(10-x)^5$. **(9)** $f(x) = x(x-1)(x+1)$. **(10)** $f(x) = (4-x)\sqrt[3]{x}$, **(11)** $f(x) = (3-x)\sqrt{x}$.

37. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, найдите вторую производную, исследуйте направление выпуклости, найдите точки перегиба, нарисуйте эскиз графика функции. **(1)** $f(x) = \sqrt{x(2-x)}$, **(2)** $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{2-x}$, **(3)** $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{6-x}$.

38. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, найдите вторую производную, исследуйте направление выпуклости, найдите точки перегиба, нарисуйте эскиз графика функции. **(1)** $f(x) = x\ln x$, **(2)** $f(x) = \begin{cases} x\ln|x| \text{ при } x \neq 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \end{cases}$
(3) $f(x) = \begin{cases} |x|\ln|x| \text{ при } x \neq 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \end{cases}$ **(4)** $f(x) = x^2\ln x$, **(5)** $f(x) = x(\ln x)^2$, **(6)** $f(x) = \begin{cases} x^2\ln|x| \text{ при } x \neq 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \end{cases}$
(7) $f(x) = \begin{cases} x|x|\ln|x| \text{ при } x \neq 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \end{cases}$ **(8)** $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, **(9)** $f(x) = \frac{x}{\ln x}$,

39. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, найдите вторую производную, исследуйте направление выпуклости, найдите точки перегиба, нарисуйте эскиз графика функции. **(1)** $f(x) = xe^{-x}$, **(2)** $f(x) = x^2e^{-x}$, **(3)** $f(x) = x^3e^{-x}$, **(4)** $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$,
(5) $f(x) = \sqrt[3]{x}e^{-x}$.

40. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, найдите вторую производную, исследуйте направление выпуклости, найдите точки перегиба, нарисуйте эскиз графика функции. $f(x) = x + \frac{1}{x}$, **(1)** $f(x) = 4x + \frac{9}{x}$, **(2)** $f(x) = \frac{2}{x^2+1}$, **(3)** $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$,
(4) $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$, **(5)** $f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$, **(6)** $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, **(7)** $f(x) = \frac{3}{x^2+x+1}$.

41. Найдите наклонные асимптоты (правостороннюю и левостороннюю), **(1)** $f(x) = x\ln\frac{x+2}{x}$, **(2)** $f(x) = x^2\ln\frac{x+2}{x}$,

42. Найдите множество всех предельных точек последовательности **(1)** $x_n = \frac{n-1}{n}$, **(2)** $x_n = \sin\frac{\pi n}{6}$,
(3) $x_n = (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n}$, **(4)** $y_1 = 0,\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{n},\ x_n =$ дробная часть(y_n). **(5)** $x_n = \overline{a_1}$, если в десятичной записи $n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0}$. **(6)** $x_n = \overline{a_1 a_0}$, если в десятичной записи $n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0}$. **(7)** $1;\ 1;\ 2;\ 1;\ 2;\ 3;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ldots$.
Найдите верхний и нижний пределы этих последовательностей.

43. Найдите **(1)** $\sum_{n=0}^{+\infty}(0{,}5)^n$, **(2)** $\sum_{n=0}^{+\infty}(-0{,}5)^n$, **(3)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$, **(4)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$, **(5)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$,
(6) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

44. Найдите частичные суммы рядов **(1)** $\sum_{k=0}^{+\infty}2^k$, **(2)** $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$, **(3)** $\sum_{k=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{3}{3k-1}\right)$,
(4) $\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sin(k+1) - \sin(k)\right)$, докажите что эти ряды расходятся.

45. Используя интегральный признак сходимости, исследуйте сходимость **(1)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$, **(2)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, **(3)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$, **(4)** $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n}$, **(5)** $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$.

46. Найдите **(1)** $\int dx$, **(2)** $\int x dx$, **(3)** $\int x^7 dx$, **(4)** $\int \frac{dx}{x}$, **(5)** $\int\frac{dx}{x^2}$, **(6)** $\int\sqrt{x}\,dx$, **(7)** $\int\sqrt[3]{x}\,dx$, **(8)** $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}$, **(9)** $\int\frac{dx}{\cos^2 x}$, **(10)** $\int\frac{dx}{\cos x}$, **(11)** $\int\frac{dx}{\sin x}$, **(12)** $\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$, **(13)** $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$, **(14)** $\int\frac{dx}{4+x^2}$, **(15)** $\int\frac{x\,dx}{4+x^2}$.

47. Найдите, интегрируя по частям, **(1)** $\int x^3(1-x)^7\,dx$, **(2)** $\int xe^{-x}\,dx$, **(3)** $\int x^2e^x\,dx$, **(4)** $\int x\sin x\,dx$, **(5)** $\int x^2\cos x\,dx$, **(6)** $\int x\ln x\,dx$, **(7)** $\int \operatorname{arctg} x\,dx$, **(8)** $\int x\arcsin x\,dx$,

48. Найдите, используя метод замены переменной, **(1)** $\int\frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$, **(2)** $\int\frac{(\operatorname{arctg} x)^3}{1+x^2}dx$, **(3)** $\int\frac{\cos(\ln x)}{x}dx$, **(4)** $\int x\cos(x^2)\,dx$, **(5)** $\int\frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$, **(6)** $\int\frac{\sin(\operatorname{arctg} x)}{1+x^2}dx$, **(7)** $\int\frac{\ln x}{x}dx$, **(8)** $\int xe^{-x^2}dx$, **(9)** $\int\frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

49. Найдите **(1)** $\int\frac{dx}{1-x^2}$, **(2)** $\int\frac{x\,dx}{1-x^2}$, **(3)** $\int\frac{dx}{x^2-5x+6}$, **(4)** $\int\frac{xdx}{x^2-5x+6}$, **(5)** $\int\frac{(2x-3)dx}{x^2-5x+6}$, **(6)** $\int\frac{x^2dx}{x^2-5x+6}$, **(7)** $\int\frac{x^3dx}{x^2-5x+6}$, **(8)** $\int\frac{dx}{(x-2)^2}$, **(9)** $\int\frac{xdx}{(x-2)^2}$, **(10)** $\int\frac{dx}{x^2+x+1}$, **(11)** $\int\frac{xdx}{x^2+x+1}$, **(12)** $\int\frac{dx}{e^x-1}$, **(13)** $\int\frac{e^x dx}{e^x-1}$, **(14)** $\int\frac{e^x dx}{e^{2x}-1}$,

50. **(1)** Интегрируя по частям $\int\frac{1}{1+x^2}dx$, найдите $\int\frac{1}{(1+x^2)^2}dx$. **(2)** Интегрируя по частям $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, найдите $\int\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}dx$. **(3)** Интегрируя по частям $\int\frac{1}{(1+x^2)^2}dx$, найдите $\int\frac{1}{(1+x^2)^3}dx$. **(4)** Интегрируя по частям $\int\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}dx$, найдите $\int\frac{1}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}dx$.

51. Найдите, интегрируя по частям два раза, **(1)** $\int e^x\sin x\,dx$, **(2)** $\int e^x\cos x\,dx$, **(3)** $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$, **(4)** $\int e^{-3x}\cos 2x\,dx$, **(5)** $\int\sin(\ln x)\,dx$, **(6)** $\int\cos(\ln x)\,dx$. **(7)** $\int x\sin(\ln x)\,dx$, **(8)** $\int x\cos(\ln x)\,dx$.

52. Оцените значение выражения $(1+x)^m$, используя тождество $(1+x)^m = e^{m\ln(1+x)}$. Для оценки $\ln(1+x)$ используйте многочлен Тейлора $P_2 = x-\frac{x^2}{2}$. **(1)** $(1{,}01)^2$, **(2)** $(1{,}01)^{100}$, **(3)** $(0{,}99)^{200}$, **(4)** $(1{,}01)^{100}-(1{,}02)^{50}$, **(5)** $(0{,}99)^{100}-(0{,}98)^{50}$,

53. Оцените величину остаточного члена формулы Тейлора $R_{n+1}(x|x_0) = f(x)-P_n(x|x_0)$, $P_n(x|x_0) = f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, если **(1)** $f(x)=\sin x,\ x_0=0,\ x=1,\ n=5.$ **(2)** $f(x)=\sin x,\ x_0=0,\ x=\frac{1}{2},\ n=5.$ **(3)** $f(x)=\sin x,\ x_0=0,\ x=2,\ n=5.$ **(4)** $f(x)=e^x,\ x_0=0,\ x=2,\ n=6.$ **(5)** $f(x)=\ln(1+x),\ x_0=0,\ x=\frac{1}{2},\ n=4.$ **(6)** $f(x)=\frac{1}{1-x},\ x_0=0,\ x=\frac{1}{2},\ n=4.$

54. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым. Найдите **(e)** внутренность, **(f)** границу, **(g)** $\star$ множество всех предельных точек, **(h)** замыкание, **(i)** выпуклую оболочку указанного множества. Каждый раз мы указываем пространство, подмножеством которого является даное множество.
(1) Отрезок на плоскости (без концов), **(2)** Шар (вместе со сферой), **(3)** Звезда (пятиугольная) на плоскости (включая внутренность), **(4)** Отрезок на плоскости (с концами), **(5)** Круг на плоскости (вместе с окружностью), **(6)** Звезда (пятиугольная) на плоскости (без внутренности), **(7)** Круг на плоскости (без окружности), **(8)** Треугольник на плоскости (включая внутренность), **(9)** Треугольник на плоскости (без внутренности), **(10)** Шар (без сферы). **(11)** Буква М русского алфавита. **(12)** Буква Г русского алфавита.

55. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым. Найдите **(e)** внутренность, **(f)** границу, **(g)** $\star$ множество всех предельных точек, **(h)** замыкание, **(i)** выпуклую оболочку указанного множества.
Множество, состоящее из всех точек на поскости с координатами $(x;y)$, для которых **(1)** $x^2+y^2=1$, **(2)** $x^2+y^2>1$, **(3)** $|x|+|y|\leqslant 1$, **(4)** $\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 2,\\ -1<x<1,\end{cases}$ **(5)** $x^2+y^2<1$, **(6)** $|x|+|y|\geqslant 1$, **(7)** $1\leqslant|x|+|y|<2$, **(8)** $\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 2,\\ -|x|\leqslant y\leqslant|x|,\end{cases}$ **(9)** $x^2+y^2\leqslant 1$, **(10)** $x^2+y^2\geqslant 1$, **(11)** $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$, **(12)** $1<x^2+y^2<4$, **(13)** $1\leqslant x^2+y^2<4$, **(14)** $|x|+|y|=1$, **(15)** $|x|+|y|<1$, **(16)** $|x|+|y|>1$, **(17)** $1\leqslant|x|+|y|\leqslant 2$, **(18)** $x+y=1$, **(19)** $\begin{cases}x+y=1,\\ -1\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$ **(20)** $\begin{cases}x+y=1,\\ -1<x<1,\end{cases}$ **(21)** $\begin{cases}x^2+y^2=2,\\ -1<x<1,\end{cases}$ **(22)** $\begin{cases}x^2+y^2=2,\\ -1\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$ **(23)** $\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 2,\\ -|x|<y<|x|,\end{cases}$ **(24)** $x^2+9y^2=9\bigcup 9x^2+y^2=9$, **(25)** $\begin{cases}x^2+9y^2\leqslant 9,\\ 9x^2+y^2\leqslant 9,\end{cases}$ **(26)** $\begin{cases}x^2+9y^2<9,\\ 9x^2+y^2\leqslant 9,\end{cases}$ **(27)** $\begin{cases}x^2+9y^2<9,\\ 9x^2+y^2<9,\end{cases}$

56. Является ли указанное множество точек **(a)** ограниченным, **(b)** открытым, **(c)** замкнутым. Найдите **(d)** внутренность, **(e)** границу, **(f)** Множество всех предельных точек, **(g)** замыкание, **(h)** выпуклую оболочку указанного множества.
Множество точек $(x_n;y_n)$, $n\in N$ (все натуральные числа), если **(1)** $x_n=\cos\frac{\pi}{n},\ y_n=\sin\frac{\pi}{n}$. **(2)** $x_n=\cos\frac{\pi n}{2},\ y_n=\sin\frac{\pi n}{2}$. **(3)** $x_n=\frac{1}{n},\ y_n=\frac{1}{n}$. **(4)** $x_n=\cos\frac{\pi n}{3},\ y_n=\sin\frac{\pi n}{3}$. **(5)** $x_n=\cos\frac{\pi n}{4},\ y_n=\sin\frac{\pi n}{4}$. **(6)** $x_n=\cos\frac{\pi n}{6},\ y_n=\sin\frac{\pi n}{6}$. **(7)** $x_n=\cos\frac{\pi n}{8},\ y_n=\sin\frac{\pi n}{8}$. **(8)** $x_n=\cos\frac{2\pi n}{5},\ y_n=\sin\frac{2\pi n}{5}$. **(9)** $x_n=\cos\frac{\pi n}{4},\ y_n=\sin\frac{\pi n}{8}$. **(10)** $x_n=\cos n,\ y_n=\sin n$. **(11)** $x_1=1,\ y_1=0$, **(12)** $x_{n+1}=-y_n,\ y_{n+1}=x_n$.

57. Найдите **(a)** Предел, если таковой существует, **(b)** Множество всех предельных точек указанной последовательности.

(1) $x_n=\frac{n+1}{n},\ y_n=\frac{n-1}{n}$. **(2)** $x_n=n\operatorname{tg}\frac{1}{n},\ y_n=\sqrt{n}\operatorname{tg}\frac{2}{\sqrt{n}}$. **(3)** $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ y_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.
(4) $x_n=\sin\frac{1}{n},\ y_n=\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}},\ n>1$. **(5)** $x_n=\frac{3n+2}{2n+3},\ y_n=\frac{4n-1}{3n+1}$. **(6)** $x_n=n\sin\frac{1}{n},\ y_n=n^2\sin\frac{1}{n^2}$.
(7) $x_n=\left(1-\frac{2}{n}\right)^{3n},\ y_n=\left(1+\sin\frac{1}{3n}\right)^{2n}$. **(8)** $x_n=\operatorname{tg}\frac{\pi n+1}{4n-1},\ y_n=2^{x_n}$. **(9)** $x_n=\frac{5n+6}{6n+5},\ y_n=\frac{n-1}{n+2}$.
(10) $x_n=n^2\operatorname{tg}\frac{1}{n^2},\ y_n=n\sin\frac{1}{n^2}$. **(11)** $x_n=\left(1-\sin 5n\right)^{3n},\ y_n=\left(1+\operatorname{tg}\frac{1}{n}\right)^{2n}$. **(12)** $x_n=\sqrt[n]{n},\ y_n=\sqrt[n]{\frac{1}{n}}$.
(13) $x_n=\cos\frac{\pi}{n},\ y_n=\sin\frac{\pi}{n}$. **(14)** $x_n=\cos\frac{\pi n}{4},\ y_n=\sin\frac{\pi n}{4}$. **(15)** $x_n=\frac{2n+3}{2n-1},\ y_n=2x_{n-1}-x_{n-2},\ n>3$.
(16) $x_n=\operatorname{tg}\frac{\pi n+1}{3n-1},\ y_n=\log_3(x_n)$. **(17)** $x_n=\cos\frac{\pi n}{4},\ y_n=\sin\frac{\pi n}{8}$. **(18)** $x_n=\cos n,\ y_n=\sin n$.
(19) $x_n=\left(\frac{1+n}{en}\right)^{n^2},\ y_n=\left(\frac{1-n}{en}\right)^{n^2}$. **(20)** $x_n=\cos\left(\frac{\pi n}{4}+\frac{1}{n}\right),\ y_n=\sin\left(\frac{\pi n}{4}+\frac{1}{n}\right)$.
(21) $x_n=\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)+\frac{1}{n},\ y_n=\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)+\frac{1}{n}$. **(22)** $x_n=\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)+\frac{1}{n}\cos n,\ y_n=\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)+\frac{1}{n}\sin n$.

58. Нарисуйте семейство линий равного уровня функции **(1)** $u=x+y$, **(2)** $u=\frac{y}{x}$, **(3)** $u=xy$, **(4)** $u=\frac{x^2+y^2}{2x}$, **(5)** $u=2x+3y$, **(6)** $u=\frac{x^2}{y}$, **(7)** $u=\frac{x^2+y^2}{2y}$, **(8)** $u=x^2+y^2$, **(9)** $u=x-y$, **(10)** $u=\frac{y^2}{x}$, **(11)** $u=x^2+xy+y^2$, **(12)** $u=x^2+2xy+y^2$, **(13)** $u=x^2+3xy+y^2$, **(14)** $u=\frac{x^2+y^2}{2x+2y}$, Значения уровней подберите самостоятельно.

59. Нарисуйте семейство линий равного уровня функции **(1)** $u=|x|+|y|$, **(2)** $u=|x|+y$, **(3)** $u=x-|y|$, **(4)** $u=|x|-|y|$, **(5)** $u=|x+y|+|x-y|$, **(6)** $u=|x+y|-|x-y|$,
Значения уровней подберите самостоятельно.

60. Нарисуйте семейство линий равного уровня функции **(1)** $u=\min(x,y+y)$, **(2)** $u=\min(x^2+y^2,\ 2xy)$, **(3)** $u=\max(x^2-2xy+y^2,\ 1-2xy)$. **(4)** $u=\min(x,x-y)$, **(5)** $u=\min(x^2+2xy+y^2,\ 2xy+1)$, **(6)** $u=\max(x^2-2xy+y^2,\ x^2-1+y^2)$. **(7)** $u=\min(y-x,y)$, **(8)** $u=\min(y+y^2,x^2+y^2)$, **(9)** $u=\min(2y+2x,x^2+2x+y)$, **(10)** $u=\min(x+y,x-y)$, **(11)** $u=\min(x^2+y^2,\ 1-2xy)$, Значения уровней подберите самостоятельно.

61. Найдите (если существуют) повторные пределы $\lim_{x\to a}\left[\lim_{y\to b}u(x,y)\right]$, $\lim_{y\to b}\left[\lim_{x\to a}u(x,y)\right]$, если $a=0,\ b=0$, **(1)** $u(x,y)=\frac{x^2}{x^2+y^2}$, **(2)** $u(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$, **(3)** $u(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, **(4)** $u(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, **(5)** $u(x,y)=\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$, **(6)** $u(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$, **(7)** $u(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$, **(8)** $u(x,y)=y\ln(x^2+y^2)$, **(9)** $u(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$, **(10)** $u(x,y)=\frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}$, **(11)** $u(x,y)=(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$, **(12)** $u(x,y)=\frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$, **(13)** $u(x,y)=\frac{x^2+y^2}{\ln(x^2+y^2)}$, **(14)** $u(x,y)=\frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$, **(15)** $u(x,y)=\frac{e^{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$, **(16)** $u(x,y)=\frac{\sin(xy)}{xy}$, **(17)** $u(x,y)=\frac{\sin(xy)}{x}$, **(18)** $u(x,y)=\frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$, **(19)** $u(x,y)=(x^2+y^2)\cdot\sin\frac{1}{x^2+y^2}$, **(20)** $u(x,y)=x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}$,

62. Найдите предел в бесконечно удаленной точке или докажите, что предел не существует, **(1)** $u(x,y)=xe^{-x}+ye^{-y}$, **(2)** $u(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$, **(3)** $u(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, **(4)** $u(x,y)=e^{-x}+e^{-y}$, **(5)** $u(x,y)=\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$, **(6)** $u(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$, **(7)** $u(x,y)=ye^{-x}+xe^{-y}$, **(8)** $u(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^4+y^4}$, **(9)** $u(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$, **(10)** $u(x,y)=\frac{xy}{x^2+xy+y^2}$, **(11)** $u(x,y)=xye^{-x^2-y^2}$, **(12)** $u(x,y)=e^{-x^2}$, **(13)** $u(x,y)=ye^{-x^2}$, **(14)** $u(x,y)=\frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$, **(15)** $u(x,y)=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$, **(16)** $u(x,y)=(x^2+y^2)\operatorname{tg}\frac{1}{x^2+y^2}$, **(17)** $u(x,y)=(x^2+y^2)\arcsin\frac{1}{x^2+y^2}$, **(18)** $u(x,y)=(x^2+y^2)\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2+y^2}$,

63. Найдите частные производные первого порядка, градиент. Найдите первый дифференциал. Напишите уравнение нормали и уравнение касательной плоскости к поверхности $z=u(x,y)$ в точке M_0 с координатами $(x_0;y_0)$. Найдите производную по направлению вектора $\vec{L}$ в точке M_0. **(1)** $u=2x+3y$, $M_0=(1;\,1)$, $\vec{L}_1=(3;-2)$, $\vec{L}_2=(2;3)$. **(2)** $u=xy$, $M_0=(1;1)$, $\vec{L}_1=(1;\,1)$, $\vec{L}_2=(1;\,-1)$, **(3)** $u=x^3+y^3-3xy$, $M_0=(1;1)$, $\vec{L}=(1;\,2)$. **(4)** $u=3x-2y$, $M_0=(1;\,1)$, $\vec{L}_1=(3;-2)$, $\vec{L}_2=(2;3)$. $\vec{L}_3=(-3;2)$, **(5)** $u=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $M_0=(2;3)$, $\vec{L}_1=(3;-2)$, $\vec{L}_2=(2;3)$. **(6)** $u=xy(3-x-y)$, $M_1=(1;1)$, $\vec{L}_1=(1;1)$. $M_2=(0;0)$, $\vec{L}_{2a}=(1;1)$, $\vec{L}_{2b}=(1;-1)$, $\vec{L}_{2c}=(1;0)$. **(7)** $u=x^y$, $M_0=(1;1)$, $\vec{L}=(3;-2)$; **(8)** $u=xy^2(4-x-2y)$, $M_0=(1;1)$, $\vec{L}=(1;1)$. **(9)** $u=xy(3-x-y)$, $M_0=(2;3)$, $\vec{L}=(1;-1)$. **(10)** $u=x^2+2y^2-2x^4-y^4$, $M_1=(1;0{,}5)$, $\vec{L}_1=(1;-1)$. $M_2=(1;1)$, $\vec{L}_2=(1;1)$. **(11)** $u=xy\ln(x^2+y^2)$, $M_0=((2e)^{-0,5};\ (2e)^{-0,5})$, $\vec{L}=(3;\ -2)$; $M_0=(2^{-0,5};\ 2^{-0,5})$, $\vec{L}=(1;\ -1)$; **(12)** $u=(x^2+y^2)^2e^{-x^2-y^2}$, $M_0=(1;\ 1)$, $\vec{L}=(3;\ -2)$.

64. Найдите частные производные первого порядка, градиент. Найдите первый дифференциал. Найдите производную по направлению вектора $\vec{L}$ в точке с заданными координатами (x_0,y_0,z_0). **(1)** $u=2x+3y+4x,\ M_0=(1;1;1)$, $\vec{L}_1=(2;3;4)$, $\vec{L}_2=(1;6;-5)$. **(2)** $u=x^2+y^2+z^2,\ M_0=(2;3;4)$, $\vec{L}_1=(2;3;4)$, $\vec{L}_2=(1;6;-5)$. **(3)** $u=x^3+x+y+xyz,\ M_0=(1;1;-1)$, $\vec{L}=(1;1;1)$, **(4)** $u=xy^2z^3(7-x-2y-3z), M_0=(1;1;1)$, $\vec{L}=(1;1;1)$.

65. Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x)$, если $f(t)$ – дифференцируемая функция, **(1)** $u(x)=f(2x+1)$, **(2)** $u(x)=f(x^2)$, **(3)** $u(x)=e^{f(x)}$, **(4)** $u(x)=f(3x-2)$, **(5)** $u(x)=f(e^x)$, **(6)** $u(x)=\ln f(x)$, **(7)** $u(x)=f(\ln x)$, **(8)** $u(x)=f(f(x))$, **(9)** $u(x)=\sqrt{f(x)}$,

66. Найдите дифференциал первого порядка функции **(1)** $p^{\ln(x^2+y^2)\cdot\arcsin\frac{y}{x}}$, **(2)** $(\sin x)^q$, **(3)** $(\sin x)^{\ln(x^2+y^2)\cdot\arcsin\frac{y}{x}}$, **(4)** $p^{(x^2+y^2)\cdot\sin\ln\frac{y}{x}}$, **(5)** $(\arcsin x)^q$, **(6)** $(\arcsin x)^{(x^2+y^2)\cdot\sin\ln\frac{y}{x}}$, **(7)** $p^{\cos(x^2+y^2)\cdot\ln\frac{2xy}{x^2+y^2}}$, **(8)** $(\operatorname{arctg} x)^q$, **(9)** $(\operatorname{arctg} x)^{\cos(x^2+y^2)\cdot\ln\frac{2xy}{x^2+y^2}}$,

67. Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x)$, если $f(t,s)$ – дифференцируемая функция, **(1)** $u(x)=f(x,2x)$, **(2)** $u(x)=\ln f(x,2x)$, **(3)** $u(x)=f(x^2,x^3)$, **(4)** $u(x)=e^{f(2x,x)}$, **(5)** $u(x)=f(3x-2,e^x)$, **(6)** $u(x)=\sin\big(f(3x-2,e^x)\big)$, **(7)** $u(x)=f(\sqrt{x},x)$,

68. Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x,y)$, если $f(t)$ – дифференцируемая функция, **(1)** $u(x,y)=f(x)+f(y)$, **(2)** $u(x,y)=f(x+y)$, **(3)** $u(x,y)=\frac{f(x)}{f(y)}$, **(4)** $u(x,y)=f(x^2+y^2)$, **(5)** $u(x,y)=f(xy)$, **(6)** $u(x,y)=f(x)f(y)$, **(7)** $u(x,y)=f(x)^{f(y)}$, **(8)** $u(x,y)=\log_{f(x)}f(y)$,

69. Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x,y)$, если $f(t,s)$ – дифференцируемая функция, **(1)** $u(x,y)=f(2x,3y)$, **(2)** $u(x,y)=f(x,y)\cdot f(y,x)$, **(3)** $u(x,y)=f(x+y,x-y)$, **(4)** $u(x,y)=f(x+y,x-y)\cdot f(x-y,x+y)$, **(5)** $u(x,y)=f(x,y)+f(y,x)$, **(6)** $u(x,y)=f(x,y)-f(y,x)$, **(7)** $u(x,y)=f(f(x,y),f(y,x))$, **(8)** $u(x,y)=f(x,y)^{f(x,y)}$, **(9)** $u(x,y)=\log_{f(x,y)}f(x,y)$,

70. Найдите дифференциалы первого и второго порядка сложной функции $u(...)$, если f – дважды число раз дифференцируемая функция всех своих переменных, **(1)** $u(x,y)=f(xy)$, **(2)** $u(x,y)=f(x+y)$, **(3)** $u(x,y)=\frac{f(x)}{f(y)}$, **(4)** $u(x,y)=f(x^2+y^2)$, **(5)** $u(x,y)=f(x+y,x-y)$, **(6)** $u(x)=f(x,x)$, **(7)** $u(x)=f(x,x^2,x^3)$, **(8)** $u(x,y)=f(x-y)+f(x+y)$. **(9)** $u(x,y)=f(x,y)-f(y,x)$. **(10)** $u(x,y)=\frac{f(x,y)}{f(y,x)}$.

71. Найдите дифференциал первого порядка сложной функции $u(...)$, если f,g,h – нужное число раз дифференцируемые функции всех своих переменных, **(1)** $u(x,y)=f(x)+g(y)$, **(2)** $u(x,y,z)=f(x,y)+f(y,z)+f(z,x)$, **(3)** $u(x,y,z)=f(x)+g(y)+h(z)$, **(4)** $u(x,y)=\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$. **(5)** $u(x,y)=f(x)g(y)$, **(6)** $u(x,y,z)=f(x)g(y)h(z)$, **(7)** $u(x,y)=f(x-y)+g(x+y)$. **(8)** $u(x,y)=f(x,y)+g(x,y)$. **(9)** $u(x,y)=f(x,y)\cdot g(x,y)$.

72. Найдите дифференциалы первого и второго порядка сложной функции $u(...)$, если f,g,h – нужное число раз дифференцируемые функции всех своих переменных, **(1)** $u(x,y)=f(x)g(y)$, **(2)** $u(x,y)=f(x)+g(y)$, **(3)** $u(x,y,z)=f(x)+g(y)+h(z)$, **(4)** $u(x,y,z)=f(x)g(y)h(z)$, **(5)** $u(x,y)=f(x-y)+g(x+y)$. **(6)** $u(x,y)=f(x,y)+g(x,y)$. **(7)** $u(x,y)=f(x,y)+g(y,x)$.

73. Найдите все точки возможного экстремума, проверьте выполнение достаточных условий: **(1)** $u(x,y)=x^2+y^2$, **(2)** $u(x,y)=x^2-y^2$, **(3)** $u(x,y)=x^2-xy+y^2$, **(4)** $u(x,y)=x^2-2xy+y^2$, **(5)** $u(x,y)=x^2-3xy+y^2$, **(6)** $u(x,y)=xy$, **(7)** $u(x,y)=xy^2$, **(8)** $u(x,y)=x^2y^2$, **(9)** $u(x,y)=x^3+y^3-3xy$, **(10)** $u(x,y)=xy(3-x-y)$, **(11)** $u(x,y)=x^2y^3(6-x-y)$, **(12)** $u(x,y)=xy\ln(1-x^2-y^2)$, **(13)** $u(x,y)=xy+\frac{50}{x}+\frac{20}{y}$, **(14)** $u(x,y)=(5-2x+y)e^{x^2-y}$, **(15)** $u(x,y)=(x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$, **(16)** $u(x,y)=xye^{-x^2/2-y^2/2}$, **(17)** $u(x,y)=x^3y^4e^{-x-y}$, **(18)** $u(x,y)=x^3y^4e^{-x-y^2}$, **(19)** $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, **(20)** $u(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$, **(21)** $u(x,y,z)=xyz$, **(22)** $u(x,y,z)=x^2y^2z^2$, **(23)** $u(x,y,z)=2x^2+2y^2+2z^2-xy-xz-yz$, **(24)** $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz$, **(25)** $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz$, **(26)** $u(x,y,z)=xy^2z^3(7-x-2y-3z)$, **(27)** $u(x,y,z)=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}$.

74. Найдите первую и вторую производные неявной функции $y=f(x)$, заданной уравнением $u(x,y)=0$. Найдите все точки возможного экстремума функции $f(x)$. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума в каждой точке возможного экстремеума (если таковые существуют). Не следует явно выражать y через x, даже если это возможно. **(1)** $u(x,y)=2x+3y-5$, **(2)** $u(x,y)=x^3+y^3-3xy$, **(3)** $u(x,y)=x^2+y^2-1$, **(4)** $u(x,y)=(x^2+y^2)^2-x^2y$, **(5)** $u(x,y)=x^4+y^4-1$, **(6)** $u(x,y)=xy-1$, **(7)** $u(x,y)=x^4+y^4+y-2$, $y>0$, **(8)** $u)x,y)=e^{x+y}+x+y-1$, **(9)** $u(x,y)=y^4+x^4+4x-5$, **(10)** $u(x,y)=(x^2+y^2)^2-xy^2$, **(11)** $u(x,y)=(x^2+y)^2-8(x^2-y)$, **(12)** $u(x,y)=x^3+y^3+y-2$, $y>0$, **(13)** $u(x,y)=(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)$, $x>0$, **(14)** $u(x,y)=(x^2+y^2)^2-4xy$, $x>0$, **(15)** $u(x,y)=8x^2y-x^4-y^4$, **(16)** $u(x,y)=x^y-y^x$. Не следует пытаться получить решение уравнения $u(x,y)=0$ в явном виде, даже если это возможно.

75. Найдите первые и вторые производные неявной функции $z=f(x,y)$, заданной уравнением $u(x,y,z)=0$. Найдите все точки возможного экстремума функции $f(x,y)$. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума в каждой точке возможного экстремума (если таковые существуют). **(1)** $u=x^2+y^2-z$, **(2)** $u=x^2+y^2+z^2-1$, **(3)** $u=z^3+x+y+xyz$, **(4)** $u=x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2$, **(5)** $u=(x^2+y^2+z^2)^2-8(x^2+y^2-z^2)$, **(6)** $u=(x^2+y^2+z^2)^3-27x^2y^2z$.
Не следует пытаться получить решение уравнения $u(x,y,z)=0$ в явном виде, даже если это возможно.

76. Используя метод Лагранжа, найдите все точки экстремума функции $u(x,y)$ при условии $f(x,y)=0$. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума: **(1)** $u=x+y$, $f=x^2+y^2-2$; **(2)** $u=x^2+y^2$, $f=x+y-2$; **(3)** $u=xy$, $f=x+y-2$; **(4)** $u=x+y$, $f=xy-1$; **(5)** $u=x+y$, $f=x^2+y^2-2x$; **(6)** $u=x+y$,

$f = x^2 - 2y$; **(7)** $u = y - x^2$, $f = x^2 + y^2 - 4$. **(8)** $u = xy$, $f = x^3 + y^3 - 2xy$. **(9)** $u = xy^2$, $f = x + 2y - 3$. **(10)** $u = xy^2$, $f = x + y - 3$. **(11)** $u = x^2y^3$, $f = 2x + 3y - 5$. **(12)** $u = x^2y^3$, $f = x + y - 900$.

77. Используя метод Лагранжа, найдите все точки экстремума функции $u(x, y, z)$ при условии $f(x, y, z) = 0$. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума: **(1)** $u = x^2y^3z^4$, $f = 2x + 3y + 4z - 9$. **(2)** $f = x + y + z$, $u = xyz - 1$. **(3)** $u = x + y + z$, $f = x^2 + y^2 + z^2 - 3$. **(4)** $u = xyz$, $f = x + y + z - 3$. **(5)** $u = x^2 + y^2 + z^2$, $f = x + y + z - 3$. **(6)** $u = x^2 + y^2 + z^2$, $f = xyz - 1$. **(7)** $u = xyz$, $f = x^2 + y^2 + z^2 - 3$. **(8)** $u = x + y + z$, $f = x^2 + y^2 + z^2 - 3$. **(9)** $u = 2x + 3y + 4z$, $f = x^2y^3z^4 - 1$. **(10)** $u = x^2y^3z^4$, $f = x + y + z - 18$, $x > 0 \bigcap y > 0 \bigcap z > 0$.

78. Найдите производную функции **(1)** $f(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,dt$, **(2)** $f(x) = \int_x^1 \arcsin\sqrt{t}\,dt$, **(3)** $f(x) = \int_0^{x^2} \ln(\frac{\cos t}{1+t^3})\,dt$, **(4)** $f(x) = \int_{\operatorname{arctg} x}^{\cos x} e^{-t^2}\,dt$.

79. Найдите **(1)** $\int_0^2 x(2-x)\,dx$, **(2)** $\int_0^2 x^3(2-x)^2\,dx$, **(3)** $\int_0^\pi x\sin x\,dx$, **(4)** $\int_1^e x\ln x\,dx$, **(5)** $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$, **(6)** $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, **(7)** $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$, **(8)** $\int_2^3 \frac{dx}{x^2-6x+5}$, **(9)** $\int_0^\pi e^x\sin x\,dx$, **(10)** $\int_1^{e^\pi} \sin\ln x\,dx$, **(11)** $\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \frac{dx}{\sin x}$,

80. Запишите указанный повторный интеграл в виде двойного интеграла, нарисуйте область интегрирования, запишите в виде повторного интеграла, поменяв порядок интегрирования, найдите значение: **(1)** $\int_0^1 \left(\int_0^x x^2y\,dy\right)dx$, **(2)** $\int_0^1 \left(\int_y^1 xy\,dx\right)dy$, **(3)** $\int_0^\pi \left(\int_0^{\sin x} 2y\,dy\right)dx$, **(4)** $\int_0^2 \left(\int_0^{x(2-x)} xy\,dy\right)dx$, **(5)** $\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} 2y\,dy\right)dx$, **(6)** $\int_0^1 \left(\int_{\arcsin x}^{\pi/2} \cos y\,dy\right)dx$.

81. Найдите значение, интегрируя в полярных координатах, **(1)** $\iint_G (x^2+y^2)\,dx\,dy$, $G = \{x^2 + y^2 \leqslant 6\}$, **(2)** $\iint_G xy\,dx\,dy$, $G = \{1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\} \bigcap \{\frac{\pi}{6} \leqslant \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \leqslant \frac{\pi}{3}\} \bigcap x > 0$, **(3)** $\iint_G (x^2+y^2)\,dx\,dy$, $G = \{1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\} \bigcap \{\frac{\pi}{6} \leqslant \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \leqslant \frac{\pi}{3}\} \bigcap x > 0$, **(4)** $\iint_G (x^2-y^2)\,dx\,dy$, $G = \{1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\} \bigcap \{\frac{\pi}{6} \leqslant \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \leqslant \frac{\pi}{4}\} \bigcap x > 0$,

82. Найдите площадь фигуры, ограниченной линией **(1)** $x^2 + y^2 = 2x$, **(2)** $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2 \bigcap x > 0$, **(3)** $(x^2+y^2)^2 = 4xy \bigcap x > 0 \bigcap y > 0$.

83. Пусть $y_1(x) \leqslant y_2(x)$ при $x \in [a;\, b]$, область D определена неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$, $M[1] \overset{\text{def}}{=\!=} \int_D 1dxdy$, $M[1] = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy$, $M[1] = \int_a^b \big(y_2(x) - y_1(x)\big)dx$, $M[x] \overset{\text{def}}{=\!=} \int_D xdxdy$, $M[x] = \int_a^b x\big(y_2(x) - y_1(x)\big)dx$, $M[x^2] = \int_a^b x^2\big(y_2(x) - y_1(x)\big)dx$, $\langle x\rangle \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{M[x]}{M[1]}$, $\langle x^2\rangle \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{M[x^2]}{M[1]}$, $Dx \overset{\text{def}}{=\!=} \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$, $M[y] \overset{\text{def}}{=\!=} \int_D ydxdy$, $M[y] = \frac{1}{2}\int_a^b \big(y_2^2(x) - y_1^2(x)\big)dx$, $\langle y\rangle \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{M[y]}{M[1]}$, $\text{VOX}[1] \overset{\text{def}}{=\!=} \int_D 2\pi ydxdy$, $\text{VOX}[1] = \pi\int_a^b \big(y_2^2(x) - y_1^2(x)\big)dx$, $\text{VOX}[x] \overset{\text{def}}{=\!=} \int_D 2\pi xydxdy$, $\text{VOX}[x] = \pi\int_a^b x\big(y_2^2(x) - y_1^2(x)\big)dx$, $\text{VOX}\,\langle x\rangle \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{VOX[x]}{VOX[1]}$, $\text{VOX}[y] = 0$, $\text{VOX}[y^2] \overset{\text{def}}{=\!=} \int_D 2\pi y^3dxdy$, $\text{VOX}[y^2] = \frac{\pi}{2}\int_a^b \big(y_2^4(x) - y_1^4(x)\big)dx$, $\text{VOY}[1] \overset{\text{def}}{=\!=} \int_D 2\pi xdxdy$, $\text{VOY}[1] = 2\pi\int_a^b x\big(y_2(x) - y_1(x)\big)dx$, $\text{VOY}[y] \overset{\text{def}}{=\!=} \int_D 2\pi xydxdy$, $\text{VOY}[y] = \pi\int_a^b x\big(y_2^2(x) - y_1^2(x)\big)dx$, $\text{VOY}\,\langle y\rangle \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{\text{VOY}[y]}{\text{VOY}[1]}$, $\text{VOY}[x] = 0$, $\text{VOY}[x^2] \overset{\text{def}}{=\!=} \int_D 2\pi x^3dxdy$, $\text{VOY}[x^2] = 2\pi\int_a^b x^3\big(y_2(x) - y_1(x)\big)dx$. Вычислите все указанные величины для **(1)** $\rho(x) = 1,\ x \in [0;\, 1]$, **(2)** $\rho(x) = x,\ x \in [0;\, 1]$, **(3)** $\rho(x) = x^2,\ x \in [0;\, 12]$, **(4)** $\rho(x) = x(2-x),\ x \in [0;\, 2]$, **(5)** $\rho(x) = x^2(3-x),\ x \in [0;\, 3]$, **(6)** $\rho(x) = x^2(1-x^2),\ x \in [0;\, 1]$, **(7)** $\rho(x) = \sin x,\ x \in [0;\, \pi]$, **(8)** $\rho(x) = \frac{3}{x^4},\ x \in [1;\, 10^8]$, **(9)** $\rho(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ x \in [10^{-8};\, 1]$, **(10)** $\rho(x) = e^{-x},\ x \in [0;\, 1000]$,

84. Пусть интегрируемая функция $\rho(x)$ определена на $[a;\, b]$, $\rho(x) \geqslant 0$, $M[1] = \int_a^b \rho(x)dx$, $M[1] > 0$, $M[x] \overset{\text{def}}{=\!=} \int_a^b x\rho(x)dx$, $M[x^2] \overset{\text{def}}{=\!=} \int_a^b x^2\rho(x)dx$, $\langle x\rangle \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{M[x]}{M[1]}$, $\langle x^2\rangle \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{M[x^2]}{M[x]}$, $Dx \overset{\text{def}}{=\!=} \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$. Вычислите все указанные величины для **(1)** $\rho(x) = \sin x,\ x \in [0;\, \pi/2]$, **(2)** $\rho(x) = \operatorname{arctg} x,\ x \in [0;\, 1]$, **(3)** $\rho(x) = \arcsin x,\ x \in [0;\, 1]$, **(4)** $\rho(x) = e^{-x},\ x \in [0;\, 1]$, **(5)** $\rho(x) = e^{-x},\ x \in [0;\, 10^{12}]$, **(6)** $\rho(x) = \ln x,\ x \in [e^{-4};\, 1]$,

85. Пусть $f(x)$ - непрерывная функция на $[a;\, b]$, $f(x) > 0,\ x \in (a;\, b)$, область G на плоскости задана неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$. Определим числа $M[1] = \iint_G dx\,dy$, $M[x] = \iint_G x\,dx\,dy$, $M[x^2] = \iint_G x^2\,dx\,dy$, $M[y] = \iint_G y\,dx\,dy$, $M[y^2] = \iint_G y^2\,dx\,dy$, $< x > \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{M[x]}{M[1]}$, $< y > \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{M[y]}{M[1]}$. Запишите величины $M[1]$, $M[x]$, $M[x^2]$ в виде определенного интеграла. Вычислите все указанные величины для **(1)** $f(x) = 1,\ x \in [0;\, 1]$, **(2)** $f(x) = x,\ x \in [0;\, 2]$, **(3)** $f(x) = x(4-x),\ x \in [0;\, 4]$, **(4)** $f(x) = \sin x,\ x \in [0;\, \pi]$, **(5)** $f(x) = \ln x,\ x \in [10^{-3};\, 1]$, **(6)** $f(x) = x^{-1},\ x \in [10^{-3};\, 1]$, **(7)** $f(x) = e^{-x},\ x \in [0;\, 1000]$. Обьясните физический смысл.

86. Пусть $f(x)$ – непрерывная функция на $[a;\, b]$, $f(x) > 0,\ x \in (a;\, b)$, область G на плоскости задана неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$, $\rho(x, y)$ – непрерывная функция в области G, $\rho(x, y) > 0$ внутри G. Определим числа $M[1] = \iint_G \rho(x, y)\,dx\,dy$, $M[x] = \iint_G x \cdot \rho(x, y)\,dx\,dy$, $M[x^2] = \iint_G x^2 \cdot \rho(x, y)\,dx\,dy$, $M[y] = \iint_G y \cdot \rho(x, y)\,dx\,dy$, $M[y^2] = \iint_G y^2 \cdot \rho(x, y)\,dx\,dy$, $< x > \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{M[x]}{M[1]}$, $< y > \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{M[y]}{M[1]}$. Вычислите все указанные величины для **(1)** $f(x) = 1,\ x \in [0;\, 1]$, $\rho(x, y) = x$; **(2)** $f(x) = x,\ x \in [0;\, 1]$, $\rho(x, y) = y$; **(3)** $f(x) = x,\ x \in [0;\, 2]$, $\rho(x, y) = xy$; **(4)** $f(x) = x(4-x),\ x \in [0;\, 4]$, $\rho(x, y) = y$; Обьясните физический смысл.

Итоговая контрольная работа 1 модуля 1 курса

Контрольная работаvвариант 1108-11

1. Найдите производную функции $f(x) = \sin(3x)$.

2. Найдите производную функции $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{x-1}$ в точке $x = 5$.

3. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = x^4$ в точке $x = 2$ и найдите абсциссу точки, в которой касательная пересекает ось абсцисс.

4. Вычислите первый и второй дифференциалы функции $f(x) = \sqrt{15+x}$, если $x = 10,\ dx = 3$.

5. Найдите $\lim_{n\to+\infty} \frac{8n+5}{2n+1}$.

6. Найдите $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$.

7. Найдите $\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+9}-4}{x-7}$.

8. Найдите $\lim_{x\to 0} \frac{3\sin x - \operatorname{tg} 3x}{x^3}$.

9. Найдите $\lim_{x\to 0}\bigl(1+\sin 2x\bigr)^{\frac{3}{x}}$.

10. Укажите наибольшее значение параметра δ, при котором $\forall x : 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$. Сделайте это для следующих функции и параметров: $f(x) = 3^x,\ a = 4,\ b = f(a),\ \varepsilon = 1$.

11. Пусть $f(x) = \sin x - x$ и $x \to 0$, $f(x) = o(x^\alpha)$ означает $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0$, или, что то же самое, $\frac{f(x)}{x^\alpha} = o(1)$. Укажите все верные утверждения: **(a)** $f(x) = o(1)$. **(b)** $f(x) = o(x)$. **(c)** $f(x) = o(x^2)$. **(d)** $f(x) = o(x^3)$. **(e)** $f(x) = o(x^4)$. **(f)** $f(x) = o(x^5)$.

12. Сформулируйте определение: "Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$".

T577 (2007-2008) Итоговая контрольная работа 2 модуля 1 курса Курс 1 Модуль 2 w16–v1

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

1. Найдите $f'(x)$, если $f(x) = \left(\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}\right)^2$.

2. Найдите производную порядка n функции $f(x) = x^2 \ln x$.

3. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt[3]{4x}$, касающейся графика этой функции в точке с абсциссой $x = 16$. Найдите точки пересечения касательной с осями абсцисс и ординат.

4. Найдите df и d^2f, если $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x = 16$ и $dx = 9$.

5. Найдите, используя правило Лопиталя, $\lim_{x\to e} \frac{e^{ex} - x^{e^2}}{(x-e)^2}$

6. Используя формулы Тейлора, найдите $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{arctg} 3x - 5x}{x^3}$

7. Используя формулу конечных приращений, оцените $f(b) - f(a)$, если $f(x) = \frac{30}{11}\sqrt{x},\ a = 25,\ b = 36$.

8. Напишите выражение для многочлена Тейлора n-го порядка для функции $f(x) = e^x$ с центром $x_0 = 0$. Оцените величину остаточного члена в форме Лагранжа для $n = 6,\ x = 3$.

9. Нарисуйте эскиз графика функции $f(x) = 6x^2 - 2x^6$, найдите точки экстремума и точки перегиба.

10. Нарисуйте эскиз графика функции $f(x) = x^3 \ln x$.

11. Нарисуйте эскиз графика функции $f(x) = \sqrt[5]{\frac{(x-5)^7}{x^2}}$, найдите точки экстремума и наклонную асимптоту.

12. Банк начисляет $n\%$ на вложенный капитал каждый месяц на протяжении m месяцев. Найдите приближенно капитал в конце указанного периода, если в начале периода капитал составлял 10 тысяч условных единиц и заданы значения $n = 0{,}6;\ m = 50$. Используйте при необходимости таблицу (в которой проведено округление с точностью не хуже единицы последнего указанного десятичного разряда),

x	$0,3$	$0,4$	$0,5$	$0,75$	1	$1,5$	2	$2,5$	3	5
e^x	$1,3499$	$1,4918$	$1,6487$	$2,1170$	$2,7183$	$4,4817$	$7,3891$	$12,182$	$20,086$	$148,41$

Выполните оценку погрешности.

Государственный университет Высшая школа экономики Факультет бизнес-информатики
Экзамен за 3 и 4 модули 1 курса, январь-апрель 2008
Функции нескольких переменных и интегрирование (3 и 4 модули) Вариант 1407-21

1. Пусть $u(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2x},\ u(0,y)=0$. **(1)** Нарисуйте семейство линий равного уровня функции $u(x,y)$. **(2)** Является ли функция $u(x,y)$ непрерывной в точке $x=0,\ y=0$?

2. Пусть $u(x,y)=x^3+y^6-3xy^2$. Найдите частные производные первого и второго порядков функции $u(x,y)$. Найдите du и d^2u. Напишите уравнение касательной плоскости к поверхности $z=u(x,y)$ в точке $M_0=(x_0;\ y_0),\ x_0=3,\ y_0=1$. Найдите все точки локального экстремума функции $u(x,y)$. Найдите du и d^2u в одной из точек локального экстремума.

3. Пусть $u(x,y)=x^4+y^4-4x^2y$. Найдите первый и второй дифференциалы функции $y=f(x)$, определяемой уравнением $u(x,y)=0$. Найдите все точки возможного экстремума функции $y=f(x)$, расположенные в области $x^2+y^2>0$. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума.

4. Решите методом Лагранжа задачу об экстремуме функции $u(x,y)=x^4+y^2$ при условии $x^2y=1$ в области $G=\{x>0;\ y>0\}$

5. **(1)** Найдите $\int 9\sqrt{x}\,\ln x\,dx$. **(2)** Найдите $\int_1^{e^2} 9\sqrt{x}\,\ln x\,dx$.

6. **(1)** Нарисуйте фигуру D на плоскости $(x;y)$, для которой $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_{-1}^{1}dy\int_y^{2y+1}dx\,f(x,y)$. **(2)** Найдите указанный интеграл для $f(x,y)=y^3$. **(3)** Выполните операцию перемены порядка интегрирования.

7. Пусть функция $z=f(x,y)$ задана уравнением $z^3+5xyz=x^5+y^5+4z^5$. Найдите dz. Найдите все точки возможного экстремума функции $z=f(x,y)$. Найдите d^2z. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума.

8. Найдите $\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^4+y^4)\,dxdy$.

9. Найдите $M[1]=\int_a^{+\infty}f(x)\,dx,\ M[x]=\int_a^{+\infty}xf(x)\,dx,\ <x>=\frac{M[x]}{M[1]}$, для $f(x)=x^2e^{-3x},\ a=0$.

10. Найдите методом Лагранжа все точки экстремума функции $u(x,y,z)$ с условием $f(x,y,z)=0$ для $u=x^2y^3z^4,\ f=x+y+z-9$ в области $\{x>0\bigcap y>0\bigcap z>0\}$.

11. Пусть $u(x,y)=\sqrt[3]{xy(x+y)}$. **(1)** Является ли данная функция непрерывной в точке $(0;\,0)$? **(2)** Имеет ли данная функция частные производные первого порядка в точке $(0;\,0)$? Если имеет, найдите их. **(3)** Верно ли, что данная функция имеет производную по любому направлению в точке $(0;\,0)$? Если имеет, найдите производную по направлению $\vec{l}=(\cos\varphi,\sin\varphi)$. **(4)** Верно ли, что производная по направлению $\vec{l}$ в точке $(0;\ 0)$ равна $\left(\operatorname{grad}u,\,\vec{l}\right)$? **(5)** Верно ли, что $u(x,y)-x\frac{\partial u}{\partial x}(0;0)-y\frac{\partial u}{\partial y}(0;0)=o(\rho)$, где $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$? **(6)** Является ли функция $u(x,y)$ дифференцируемой в точке $(0;0)$?

12. Руководитель дома моды может нанять x менеджеров, y дизайнеров и z портных, при этом его прибыль пропорциональна величине $x^5y^3z^2$, если x,y,z выражены в сотнях человек. Однако, общая площадь помещения ограничена и при большом количестве работников они мешают друг другу. Поэтому его прибыль пропорциональна также величине $11-5x-3y-2z$, т.е. в конечном счете прибыль равна $x^5y^3z^2\big(11-5x-3y-2z\big)$. **(1)** Докажите, что максимальная прибыль получится при $x=y=z=1$. **(2)** Используя первый и второй дифференциалы, оцените прибыль при $x=y=z=1{,}02$. **(3)** В данный момент в доме моды работают 30 менеджеров, 30 дизайнеров и 30 портных, т.е. $x=y=z=0{,}3$. Можно нанять еще Δx менеджеров, Δy дизайнеров и Δz портных, причем по финансовым соображениям $(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2=r^2$, где r – некоторое небольшое число. Какие значения должно иметь отношение $\Delta x:\Delta y:\Delta z$, чтобы прирост прибыли был максимален?

Государственный университет Высшая школа экономики

Факультет бизнес-информатики

Экзамен, курс 2 модуль 2, dec 2008 v11

1. При каких значениях α сходится $\int_1^{+\infty} x^{3-\alpha}dx$? Найдите этот интеграл.

2. **(1)** Найдите $\int 8x(\ln x)^2\,dx$. **(2)** Найдите $\int_0^1 8x(\ln x)^2\,dx$.

3. Найдите $\int_0^{+\infty} x^{41}e^{-x^6}\,dx$.

4. **(1)** При каких x сходится ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$? **(2)** Найдите сумму этого ряда.

5. Разложите функцию $\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ в степенной ряд с центром $x_0 = 0$.

6. Найдите $\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\,dx$ методом двукратного интегрирования по частям.

7. Найдите $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\sin x\,dx$ методом дифференцирования по параметру (предварительно введите параметр в нужном месте).

8. **(1)** Нарисуйте фигуру D на плоскости $(x; y)$, для которой $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^1 dy\int_{-2y}^{1-y} dx\, f(x,y)$.
(2) Найдите указанный интеграл для $f(x,y) = y^4$. **(3)** Выполните операцию перемены порядка интегрирования.

9. Найдите площадь фигуры $(x^2+y^2)^{12} \leqslant x^2y^{18}$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$

10. Пусть $\rho(x) = x^9\big(\ln x\big)^{20}$, $0 < x < 1$. **(1)** Найдите значение $M1 = \int_0^1 \rho(x)\,dx$, $Mx = \int_0^1 x\rho(x)\,dx$, $Mx^2 = \int_0^1 x^2\rho(x)\,dx$. **(2)** Найдите $< x >= \frac{Mx}{M1}$. **(3)** Найдите $< x^2 >= \frac{Mx^2}{M1}$. **(4)** Найдите Dx. Оцените с точностью не хуже 5% без калькулятора.

11. Докажите, что функциональная последовательность $f_n(x) = \arcsin(x^n)$ на промежутке $x \in [-1;\ 1]$ не является равномерно сходящейся

12. Докажите, что $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x$.