2008-2009 Курс 1, семестр 1, семинар 00
Тема: Повторение школьной программы

1. Пусть функция $y = f(x)$ задана своим графиком, a, b, c – заданные числа. Нарисуйте графики функций **(1)** $f(x) = f(x-a)$, **(2)** $f(x) = f(x) - b$, **(3)** $f(x) = cf(x)$, **(4)** $f(x) = f(|x|)$, **(5)** $f(x) = |f(x)|$, **(6)** $f(x) = |f(|x|)|$, **(7)** $f(x) = f(-x)$, **(8)** $f(x) = -f(x)$, **(9)** $f(x) = -f(-x)$. Пусть $f(x)$ – строго возрастающая функция. Нарисуйте на плоскости $(x; y)$ множества точек **(10)** $x = f(y)$, **(11)** $x = -f(y)$, **(12)** $x = f(-y)$, **(13)** $x = -f(-y)$.

2. Нарисуйте графики **(1)** $f(x) = |x|$, **(2)** $f(x) = |x-1|$, **(3)** $f(x) = |x-1| - 1$, **(4)** $f(x) = ||x-3| - 2| - 1$.

3. Нарисуйте графики **(1)** $f(x) = x^2 - 6x + 5$, **(2)** $f(x) = x^2 - 6|x| + 5$, **(3)** $f(x) = \left|x^2 - 6x + 5\right|$, **(4)** $f(x) = \left|x^2 - 6|x| + 5\right|$, **(5)** $f(x) = x \cdot |x|$, **(6)** $f(x) = x \cdot |x-2|$, **(7)** $f(x) = (x-1) \cdot |x-5|$.

4. Нарисуйте графики **(1)** $f(x) = \dfrac{4x-9}{x-3}$, **(2)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, **(3)** $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$, **(4)** $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, **(5)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$, **(6)** $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$, **(7)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4x+3}$, **(8)** $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4x+3}$, **(9)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$, **(10)** $f(x) = \dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

5. Нарисуйте на одном чертеже графики функций **(1)** $f(x) = 2^x$, **(2)** $f(x) = 2^{-x}$, **(3)** $f(x) = 4^x$.

6. Нарисуйте на одном чертеже графики функций **(1)** $f(x) = 2^x$, **(2)** $f(x) = e^x$, **(3)** $f(x) = 3^x$.

7. Нарисуйте на одном чертеже графики функций **(1)** $f(x) = 2^x$, **(2)** $f(x) = x^2$.

8. Нарисуйте на одном чертеже графики функций **(1)** $f(x) = 4^x$, **(2)** $f(x) = x^4$.

9. Нарисуйте на одном чертеже графики функций **(1)** $f(x) = e^x$, **(2)** $f(x) = e^{|x|}$. **(3)** $f(x) = e^{-|x|}$.

10. Нарисуйте на одном чертеже графики функций **(1)** $f(x) = \log_2 x$, **(2)** $f(x) = \log_{0,5} x$.

11. Нарисуйте на одном чертеже графики функций **(1)** $f(x) = \log_2 x$, **(2)** $f(x) = \log_3 x$.

12. Нарисуйте на одном чертеже графики функций **(1)** $f(x) = \log_2 x$, **(2)** $f(x) = \ln x$, **(3)** $f(x) = \log_3 x$.

13. Найдите производные функций **(1)** $f(x) = 2x - 3$, **(2)** $f(x) = x^2 - 5x + 6$, **(3)** $f(x) = 2x^3 - 3x^2$, **(4)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$, **(5)** $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$, **(6)** $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$, **(7)** $f(x) = \dfrac{4x-9}{x-3}$, **(8)** $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4x+3}$, **(9)** $f(x) = \dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

14. Найдите производные функций **(1)** $f(x) = |x|$, **(2)** $f(x) = \sqrt{x}$, **(3)** $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, **(4)** $f(x) = \sqrt{x^2-4x+4}$.

15. Найдите производные функций **(1)** $f(x) = \sin x$, **(2)** $f(x) = \cos x$, **(3)** $f(x) = \sin 3x$, **(4)** $f(x) = \cos(2x-1)$, **(5)** $f(x) = \sin^2 x$, **(6)** $f(x) = \cos^2 x$, **(7)** $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$, **(8)** $f(x) = \sin^5 x + \cos^5 x$.

16. Найдите производные функций **(1)** $f(x) = \arcsin x$, **(2)** $f(x) = \arccos x$, **(3)** $f(x) = \operatorname{arctg} x$, **(4)** $f(x) = \sin(\arcsin x)$, **(5)** $f(x) = \arcsin(\sin x)$, **(6)** $f(x) = \cos(\arccos x)$, **(7)** $f(x) = \arccos(\cos x)$.

17. Найдите производные функций **(1)** $f(x) = \arcsin\sqrt{x}$, **(2)** $f(x) = \sqrt{\arcsin x}$, **(3)** $f(x) = \arcsin\sqrt{1-x^2}$, **(4)** $f(x) = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$, **(5)** $f(x) = \sqrt{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$.

18. Найдите производные функций **(1)** $f(x) = e^x$, **(2)** $f(x) = e^{3x}$, **(3)** $f(x) = e^{-x}$, **(4)** $f(x) = xe^x$, **(5)** $f(x) = xe^{-2x}$, **(6)** $f(x) = e^{-x^2}$. **(7)** $f(x) = \sin x \cdot e^{-x}$, **(8)** $f(x) = e^{\sin x}$, **(9)** $f(x) = \sin(e^x)$, **(10)** $f(x) = e^{\ln x}$, **(11)** $f(x) = \ln(e^x)$.

19. Найдите производные функций **(1)** $f(x) = \ln x$, **(2)** $f(x) = \ln(2x)$, **(3)** $f(x) = 2\ln x$.
(4) $f(x) = \log_2 x$, **(5)** $f(x) = x\ln x$, **(6)** $f(x) = x^2 \ln x$, **(7)** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x,}$ **(8)** $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln x.}$

20. Нарисуйте график функции **(1)** $f(x) = 2x^3 - 3x^2$, **(2)** $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$,
(3) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

21. Нарисуйте график функции **(1)** $f(x) = 3x + \dfrac{12}{x}$, **(2)** $f(x) = 16x^2 + \dfrac{1}{9x^2}$,

22. Нарисуйте график функции **(1)** $f(x) = x^2 + \dfrac{54}{x}$, **(2)** $f(x) = x + \dfrac{4}{x^2}$, **(3)** $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[5]{8-x}$,
(4) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{12-x}$.

23. Нарисуйте график функции **(1)** $f(x) = x^4 \cdot (20-x)^6$, **(2)** $f(x) = x^2 \cdot (5-x)^3$,
(3) $f(x) = x^3 \cdot (8-x)^5$.

24. Найдите точки экстремума функции **(1)** $f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x$. **(2)** $f(x) = \cos^5 x + \sin^5 x$.
(3) $f(x) = \cos^{12} x + \sin^{12} x$. **(4)** $f(x) = 4\cos^6 x - 3\cos^2 x$, **(5)** $f(x) = \cos x + x$,
(6) $f(x) = 2\cos x + x$.

25. Найдите точки экстремума функции **(1)** $f(x) = \cos x + \sin x$, **(2)** $f(x) = 3\cos x - 4\sin x$.

26. Нарисуйте график функции **(1)** $f(x) = \sin(2\arcsin x)$, **(2)** $f(x) = \cos(3\arccos x)$.

27. Нарисуйте график функции **(1)** $f(x) = xe^{-x}$, **(2)** $f(x) = x^2 e^x$, **(3)** $f(x) = x^3 e^{-x}$,
(4) $f(x) = x^4 e^x$.

28. Нарисуйте график функции **(1)** $f(x) = x\ln x$, **(2)** $f(x) = x^2 \ln x$, **(3)** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$,
(4) $f(x) = \dfrac{x^3}{\ln x}$, **(5)** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$.

29. Пусть значение параметра p таково, что уравнение $x^5 = px - 4$ имеет ровно два различных корня. Найдите больший из корней.

30. Материальная точка с массой 1 кг движется по прямой, причем зависимость координаты от времени описывается функцией $x(t) = t^2 - 5t + 6$. Нарисуйте график зависимости
(1) координаты от времени, **(2)** перемещения от времени, **(3)** пути от времени, **(4)** скорости от времени, **(5)** ускорения от времени, **(6)** силы, действующей на материальную точку, от времени.

31. Материальная точка движется по прямой, причем зависимость координаты от времени описывается функцией $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$. Нарисуйте график зависимости **(1)** координаты от времени, **(2)** перемещения от времени, **(3)** пути от времени, **(4)** скорости от времени,
(5) ускорения от времени. Укажите на каждом из графиков точки, в которых **(1)** координата равна нулю, **(2)** скорость равна нулю, **(3)** ускорение равно нулю.

32. Материальная точка движется по прямой, причем зависимость координаты от времени описывается функцией $x(t) = \cos(\omega t)$, $\omega = 2$. Выполните задание предыдущей задачи.

33. Материальная точка движется по прямой, причем зависимость скорости от времени описывается функцией $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$. В момент времени $t = 0$ точка находится в начале координат. Выполните задание предыдущей задачи.

34. Материальная точка движется по прямой, причем зависимость ускорения от времени описывается функцией $a(t) = 6t - 12$. В момент времени $t = 0$ точка находится в начале координат и имеет скорость $v_0 = 9$. Выполните задание предыдущей задачи.

35. Материальная точка движется по прямой, причем зависимость скорости от времени описывается функцией $v(t) = \cos\dfrac{t}{2}$. В момент времени $t = 0$ точка находится в начале координат. Выполните задание предыдущей задачи. Найдите максимальное удаление точки от начала координат.

36. Материальная точка движется по прямой, причем зависимость ускорения от времени описывается функцией $a(t) = \sin \dfrac{t}{3}$. В момент времени $t = 0$ точка находится в начале координат и имеет скорость $v_0 = 0$. Выполните задание предыдущей задачи. При каком значении v_0 точка неограниченно долго будет находиться в некоторой фиксированной окрестности начала координат?

37. Материальная точка движется по плоскости $(x,\ y)$, причем зависимость координат от времени описывается функциями $x(t) = \cos \dfrac{t}{2},\ \ y(t) = \sin \dfrac{t}{2}$. Нарисуйте траекторию движения. Найдите скорость, ускорение, перемещение, путь как функции времени.

38. Материальная точка движется по плоскости $(x,\ y)$, причем зависимость координат от времени описывается функциями $x(t) = 20t,\ \ y(t) = 20t - 5t^2$. Нарисуйте траекторию движения. Найдите скорость, ускорение, перемещение как функции времени.

39. Расход топлива за 1 час движения автомобиля со скоростью v равен $2a^3 + b^3v^3$. С какой скоростью должен ехать автомобиль для того, чтобы затратить на дорогу длиной L наименьшее количество топлива?

40. На плоской равнине нарисована система координат (x, y), вдоль оси x проложена дорога. Путник может передвигаться по равнине в любом направлении со скоростью v, а по дороге он передвигается со скоростью mv, где $m > 1$. В начале путник находится в точке A с координатами $x = 0,\ y = a$, где $a > 0$. По какой траектории он должен двигаться, чтобы попасть в точку B с координатами $x = b,\ y = 0,\ b > 0$, затратив на перемещение наименьшее возможное время?

2008-2009 Курс 1, семестр 1, семинар 00
Тема: Введение в анализ

1. Решение неравенств, связанных с понятием предела функции, 1

С Для обязательного разбора на семинаре.

1. Укажите все значения параметра δ, при которых $\forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$. Сделайте это для следующих функции и параметров: **(1)** $f(x) = 2x,\ a = 3,\ b = f(a) = 6,\ \varepsilon = 1$. **(2)** $f(x) = 2x,\ a = 3,\ b = f(a) = 6,\ \varepsilon = 0{,}1$. **(3)** $f(x) = 2x,\ a = 3,\ b = f(a) = 6,\ \varepsilon = 10^{-123}$. **(4)** $f(x) = \dfrac{3x+2}{2x+3},\ a = 1,\ b = f(a) = 1,\ \varepsilon = 0{,}1$. **(5)** $f(x) = \dfrac{6}{x},\ a = 2,\ b = f(a) = 3,\ \varepsilon = 1$. **(6)** $f(x) = \dfrac{6}{x},\ a = 2,\ b = f(a) = 3,\ \varepsilon = 0{,}1$. **(7)** $f(x) = x^2,\ a = 2,\ b = f(a) = 4,\ \varepsilon = 1$. **(8)** $f(x) = 3^x,\ a = 4,\ b = f(a) = 81,\ \varepsilon = 1$. **(9)** $f(x) = \sqrt{x},\ a = 0,\ b = f(a) = 0,\ \varepsilon = 1$. **(10)** $f(x) = \sqrt{x},\ a = 25,\ b = f(a) = 5,\ \varepsilon = 1$. **(11)** $f(x) = \log_3 x,\ a = 81,\ b = f(a) = 4,\ \varepsilon = 1$. **(12)** $f(x) = \sin x,\ a = 0,\ b = f(a) = 0,\ \varepsilon = \dfrac{1}{2}$. **(13)** $f(x) = \sin x,\ a = \dfrac{\pi}{6},\ b = f(a) = \dfrac{1}{2},\ \varepsilon = \dfrac{1}{2}$. **(14)** $f(x) = \sin x,\ a = \dfrac{\pi}{6},\ b = f(a) = \dfrac{1}{2},\ \varepsilon = \dfrac{1}{10}$. **(15)** $f(x) = \sin x,\ a = \dfrac{\pi}{2},\ b = f(a) = 1,\ \varepsilon = \dfrac{1}{2}$. **(16)** $f(x) = \arcsin x,\ a = \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ b = f(a) = \dfrac{\pi}{3},\ \varepsilon = \dfrac{\pi}{6}$. **(17)** $f(x) = \arcsin x,\ a = 0,\ b = f(a) = 0,\ \varepsilon = \dfrac{\pi}{6}$.

Д Обязательное задание на дом.

2. Укажите все значения параметра δ, при которых $\forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$. Сделайте это для следующих функции и параметров: **(1)** $f(x) = \dfrac{x}{6},\ a = 18,\ b = f(a) = 3,\ \varepsilon = 1$. **(2)** $f(x) = \dfrac{x}{6},\ a = 18,\ b = f(a) = 3,\ \varepsilon = 0{,}1$. **(3)** $f(x) = \dfrac{x}{6},\ a = 18,\ b = f(a) = 3,\ \varepsilon = 10^{-123}$. **(4)** $f(x) = \dfrac{6x+1}{x+1},\ a = 4,\ b = f(a) = 5,\ \varepsilon = 0{,}1$. **(5)** $f(x) = \dfrac{36}{x^2},\ a = 2,\ b = f(a) = 9,\ \varepsilon = 1$. **(6)** $f(x) = \dfrac{36}{x^2},\ a = 2,\ b = f(a) = 9,\ \varepsilon = 0{,}1$. **(7)** $f(x) = x^3,\ a = 3,\ b = f(a) = 27,\ \varepsilon = 1$. **(8)** $f(x) = 2^x,\ a = 5,\ b = f(a) = 32,\ \varepsilon = 1$. **(9)** $f(x) = \sqrt[3]{x},\ a = 0,\ b = f(a) = 0,\ \varepsilon = 1$. **(10)** $f(x) = \sqrt[3]{x},\ a = 27,\ b = f(a) = 3,\ \varepsilon = 1$. **(11)** $f(x) = \log_2 x,\ a = 32,\ b = f(a) = 5,\ \varepsilon = 1$. **(12)** $f(x) = \cos x,\ a = 0,\ b = f(a) = 1,\ \varepsilon = \dfrac{1}{2}$. **(13)** $f(x) = \cos x,\ a = \dfrac{\pi}{3},\ b = f(a) = \dfrac{1}{2},\ \varepsilon = \dfrac{1}{2}$. **(14)** $f(x) = \cos x,\ a = \dfrac{\pi}{2},\ b = f(a) = 0,\ \varepsilon = \dfrac{1}{2}$. **(15)** $f(x) = \operatorname{arctg} x,\ a = \sqrt{3},\ b = f(a) = \dfrac{\pi}{3},\ \varepsilon = \dfrac{\pi}{6}$. **(16)** $f(x) = \operatorname{arctg} x,\ a = 0,\ b = f(a) = 0,\ \varepsilon = \dfrac{\pi}{6}$.

2. Решение неравенств, связанных с понятием предела функции, 2

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

3. Укажите все значения параметра δ, при которых $\forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$. Сделайте это для следующих функции и параметров: **(1)** $f(x) = x,\ a = 3,\ b = 4,\ \varepsilon = 2$. **(2)** $f(x) = x,\ a = 3,\ b = 4,\ \varepsilon = 0{,}5$.

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

4. Укажите все значения параметра δ, при которых $\forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$. Сделайте это для следующих функции и параметров: **(1)** $f(x) = 2^x,\ a = 3,\ b = 9,\ \varepsilon = 2$. **(2)** $f(x) = 2^x,\ a = 3,\ b = 9,\ \varepsilon = 0{,}5$.

3. Решение неравенств, связанных с понятием предела последовательности

[С] Для обязательного разбора на семинаре.

5. Укажите наименьшее значение N : **(1)** $\forall n \geqslant N \Rightarrow \left|\dfrac{1}{n}\right| < 10^{-4}$. **(2)** $\forall n \geqslant N \Rightarrow \left|\dfrac{1}{n}\right| < 10^{-14}$.
(3) $\forall n \geqslant N \Rightarrow \left|\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right| < 10^{-2}$. **(4)** $\forall n \geqslant N \Rightarrow \left|\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right| < 10^{-4}$. **(5)** $\forall n \geqslant N \Rightarrow \left|\dfrac{n+1}{n-1} - 1\right| < 10^{-3}$.

[Д] Обязательное задание на дом.

6. Укажите наименьшее значение N : **(1)** $\forall n \geqslant N \Rightarrow \left|\dfrac{1}{n^2}\right| < 10^{-4}$. **(2)** $\forall n \geqslant N \Rightarrow \left|\dfrac{1}{n^2}\right| < 10^{-14}$.
(3) $\forall n \geqslant N \Rightarrow \left|\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right| < 10^{-2}$. **(4)** $\forall n \geqslant N \Rightarrow \left|\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right| < 10^{-4}$. **(5)** $\forall n \geqslant N \Rightarrow \left|\dfrac{4n+3}{2n-1} - 2\right| < 10^{-3}$.

[С] Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

7. Укажите наименьшее значение $N : \forall n \geqslant N \Rightarrow \left|\dfrac{40n^2+7}{8n^2+3} - 5\right| < 10^{-4}$.

[Д] Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

8. Укажите наименьшее значение $N : \forall n \geqslant N \Rightarrow \left|\dfrac{42n^2+58}{7n^2+5} - 6\right| < 10^{-4}$.

[С] Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

9. Укажите какое нибудь значение N : **(1)** $\forall n \geqslant N \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{2^n} < 10^{-2}$.
(2) $\forall n \geqslant N \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{n!} < 10^{-4}$.

[Д] Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

10. Укажите какое нибудь значение N : **(1)** $\forall n \geqslant N \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{3^n} < 10^{-2}$.
(2) $\forall n \geqslant N \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{n^n} < 10^{-10}$.

[С] Сложные задачи для разбора на семинаре.

11. Укажите какое нибудь значение N : **(1)** $\forall n \geqslant N \Rightarrow 0 < \dfrac{n^3}{3^n} < 10^{-4}$.
(2) $\forall n \geqslant N \Rightarrow 0 < \dfrac{3^n}{n!} < 10^{-4}$. **(3)** $\forall n \geqslant N \Rightarrow 0 < \dfrac{n!}{n^n} < 10^{-4}$.

[Д] Сложные задачи для самостоятельного решения.

12. Укажите какое нибудь значение N : **(1)** $\forall n \geqslant N \Rightarrow 0 < \dfrac{n^2}{2^n} < 10^{-4}$.
(2) $\forall n \geqslant N \Rightarrow 0 < \dfrac{2^n}{n!} < 10^{-4}$. **(3)** $\forall n \geqslant N \Rightarrow 0 < \dfrac{n!}{n^n} < 10^{-2}$.

4. Решение неравенств с помошью формулы бинома Ньютона

[С] Сложные задачи для разбора на семинаре.

13. Укажите какое нибудь значение $N : \forall n \geqslant N \Rightarrow 0 < \sqrt[n]{n} - 1 < 10^{-3}$.

[Д] Сложные задачи для самостоятельного решения.

14. Укажите какое нибудь значение $N : \forall n \geqslant N \Rightarrow 0 < \sqrt[n]{n} - 1 < 10^{-5}$.

5. Решение неравенств, связанных с понятием ограниченной функции

[С] Для обязательного разбора на семинаре.

15. Укажите все значения параметра A, при которых $\forall x \in X \Rightarrow |f(x)| \leqslant A$.
(1) $f(x) = x,\ X = [-11;\, 11]$. **(2)** $f(x) = \sqrt{x},\ X = [-144;\, 144]$. **(3)** $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2},\ X = (-\infty;\, +\infty)$.
(4) $f(x) = \sin x,\ X = (-\infty;\, +\infty)$. **(5)** $f(x) = \operatorname{arctg} x,\ X = (-\infty;\, +\infty)$.

Д Обязательное задание на дом.

16. Укажите все значения параметра A, при которых $\forall x \in X \Rightarrow |f(x)| \leqslant A$.
(1) $f(x) = 3x,\ X = [-11;\ 11]$. **(2)** $f(x) = \sqrt[3]{x},\ X = [-27;\ 27]$. **(3)** $f(x) = \cos x,\ X = (-\infty;\ +\infty)$.
(4) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2},\ X = (-\infty;\ +\infty)$. **(5)** $f(x) = \pi + \operatorname{arctg} x,\ X = (-\infty;\ +\infty)$.

6. Решение неравенств, связанных с понятием неограниченной функции

С Для обязательного разбора на семинаре.

17. Докажите, что $\forall A\ \exists x \in X : |f(x)| > A$.
(1) $f(x) = x,\ X = (-\infty;\ +\infty)$.
(2) $f(x) = x^2,\ X = (-\infty;\ +\infty)$. **(3)** $f(x) = \dfrac{x}{1\,000\,000},\ X = (-\infty;\ +\infty)$.
(4) $f(x) = \sqrt{x},\ X = (-\infty;\ +\infty)$. **(5)** $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1},\ X = (-\infty;\ +\infty)$.
(6) $f(x) = \log_2 x,\ X = (0;\ +\infty)$. **(7)** $f(x) = 2^x,\ X = (-\infty;\ +\infty)$.

Д Обязательное задание на дом.

18. Докажите, что $\forall A\ \exists x \in X : |f(x)| > A$.
(1) $f(x) = 2x,\ X = (-\infty;\ +\infty)$.
(2) $f(x) = x^3,\ X = (-\infty;\ +\infty)$. **(3)** $f(x) = \dfrac{x}{1\,234\,567\,890},\ X = (-\infty;\ +\infty)$.
(4) $f(x) = \sqrt[3]{x},\ X = (-\infty;\ +\infty)$. **(5)** $f(x) = \dfrac{2x+3}{3x+2},\ X = (-\infty;\ +\infty)$.
(6) $f(x) = \log_3 x,\ X = (0;\ +\infty)$. **(7)** $f(x) = 3^{-x},\ X = (-\infty;\ +\infty)$.

7. Графики элементарных функций

С Для обязательного разбора на семинаре.

19. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума. **(1)** $f(x) = x^2 - 5x + 6$, **(2)** $f(x) = 3x^2 - 2x^3$, **(3)** $f(x) = 3x^5 - 5x^3$, **(4)** $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, **(5)** $f(x) = x^2(5-x)^3$,

Д Обязательное задание на дом.

20. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума. **(1)** $f(x) = x^2 - 6x + 5$, **(2)** $f(x) = 5x^3 - 3x^5$, **(3)** $f(x) = (x^2 - 6x + 5)^2$, **(4)** $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$, **(5)** $f(x) = x(3-x)^2$,

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

21. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума. **(1)** $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, **(2)** $f(x) = x\sqrt{3-x}$, **(3)** $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$,

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

22. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума. **(1)** $f(x) = \dfrac{2x}{4+x^2}$, **(2)** $f(x) = x\sqrt[3]{4-x}$, **(3)** $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$,

С Сложные задачи для разбора на семинаре.

23. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума. **(1)** $f(x) = xe^{-x}$, **(2)** $f(x) = x^2 \ln x$, **(3)** $f(x) = 2e^{3x} - 3e^{2x}$,

Д Сложные задачи для самостоятельного решения.

24. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума. **(1)** $f(x) = x^2e^{-x}$, **(2)** $f(x) = x \ln x$, **(3)** $f(x) = 3e^{4x} - 4e^{3x}$,

2008-2009 Курс 1, семестр 1, семинар 01
Тема: Предел функции

1. Понятие предела функции

$\boxed{\text{С}}$ **Для обязательного разбора на семинаре.**

1. Укажите наибольшее значение параметра δ, при котором
$\forall x: 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-b| < \epsilon$. Сделайте это для следующих функции и параметров:
$f(x) = 2x+1,\ a = 3,\ b = 7,\ \epsilon = 0,01$. Ответ должен быть обоснован.

$\boxed{\text{Д}}$ **Обязательное задание на дом.**

2. Укажите наибольшее значение параметра δ, при котором
$\forall x: 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-b| < \epsilon$. Сделайте это для следующих функции и параметров:
$f(x) = 3x-2,\ a = 3,\ b = 7,\ \epsilon = 0,01$. Ответ должен быть обоснован.

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

3. Укажите наибольшее значение числа δ, при котором $\forall x: 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-b| < \epsilon$ для следующих функции и параметров: $f(x) = \sqrt[3]{x},\ a = 27,\ b = 3,\ \epsilon = 10^{-1}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

4. Укажите наибольшее значение параметра δ, при котором
$\forall x: 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-b| < \epsilon$. Сделайте это для следующих функции и параметров:
$f(x) = \sqrt[5]{x},\ a = 32,\ b = 2,\ \epsilon = 10^{-2}$.

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

5. Укажите наибольшее значение параметра δ, при котором
$\forall x: 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$. Сделайте это для следующих функции и параметров:
$f(x) = 3^x,\ a = 4,\ b = f(a),\ \varepsilon = 1$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

6. Укажите наибольшее значение параметра δ, при котором
$\forall x: 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$. Сделайте это для следующих функции и параметров:
$f(x) = \sin x,\ a = 2,\ b = f(a),\ \varepsilon = 0{,}01$.

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

7. Укажите такое $\varepsilon > 0$, что для любого числа $\delta > 0$ найдется такое число $x: 0 < |x-a| < \delta$, что $|f(x)-b| \geqslant \epsilon$, для следующих функции и параметров: **(1)** $f(x) = x,\ a = 3,\ b = 4$.
(2) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, $a = 0$, $b = 0$. **(3)** $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, $a = 0$, $b = 0$.

8. Укажите такое $\varepsilon > 0$, что для любого числа $\delta > 0$ и для любого числа b найдется такое число $x: 0 < |x-a| < \delta$, что $|f(x)-b| \geqslant \epsilon$, для следующих функции и параметров:
(1) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, $a = 0$. **(2)** $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, $a = 0$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

9. Укажите такое $\varepsilon > 0$, что для любого числа $\delta > 0$ найдется такое число $x: 0 < |x-a| < \delta$, что $|f(x)-b| \geqslant \epsilon$, для следующих функции и параметров: **(1)** $f(x) = x^2,\ a = 3,\ b = 8$.
(2) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, $a = 0$, $b = 1$. **(3)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $a = 0$, $b = 1$.

10. Укажите такое $\varepsilon > 0$, что для любого числа $\delta > 0$ и для любого числа b найдется такое число $x: 0 < |x-a| < \delta$, что $|f(x)-b| \geqslant \epsilon$, для следующих функции и параметров:
(1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2}$, $a = 2$. **(2)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $a = 0$.

2. Прямое вычисление предела функции в точке

С **Для обязательного разбора на семинаре.**

11. Найдите **(1)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$, **(3)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x-1}$.

12. Найдите **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$,
(3) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-x-2})$,

13. Найдите **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt{9+x}}{x}$,

14. Найдите **(1)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$, **(3)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[12]{x}-1}$, **(4)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-4}{x-3}$,
(5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-4}{\sqrt{x+6}-3}$, **(6)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+8}-2}$,

Д **Обязательное задание на дом.**

15. Найдите **(1)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$,

16. Найдите **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})$, **(3)** $\lim\limits_{x\to +\infty}x(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2})$,

17. Найдите **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+x}-\sqrt[4]{16+x}}{x}$,

18. $\star$ Найдите **(1)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt[3]{x+9}-3}$, **(3)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$, **(4)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{x+1}-2}$,

3. Прямое вычисление предела функции в бесконечно удаленной точке

С **Для обязательного разбора на семинаре.**

19. Найдите **(1)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$, **(3)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$.

20. Найдите **(1)** $\lim\limits_{x\to +\infty}x^2(\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt[3]{x^3-2})$,

Д **Обязательное задание на дом.**

21. Найдите **(1)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{x^2+1}$, **(3)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{x^3+1}$.

22. Найдите **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt{9+x}}{x}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3-x^2})$.

4. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

23. Каждая элементарная функция, x^α, $\frac{ax+b}{cx+d}$, $|x|$, $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x, \arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x, \log_a x, b^x$, а также композиция элементарных функций, имеет конечный предел во всех внутренних точках области определения, равный ее значению в этой точке. Укажите бесконечно малые и бесконечно большие функции.

(1) $f(x)=\operatorname{tg} x,\ x\to 0$. **(2)** $f(x)=\operatorname{tg} x,\ x\to\pi$. **(3)** $f(x)=\sin x,\ x\to 0$. **(4)** $f(x)=x\sin x,\ x\to 0$.
(5) $f(x)=\dfrac{1}{\sin x},\ x\to +0$. **(6)** $f(x)=\sin\dfrac{1}{x},\ x\to +\infty$. **(7)** $f(x)=\ln x,\ x\to 1$.
(8) $f(x)=\ln x,\ x\to +\infty$. **(9)** $f(x)=x^2\ln x,\ x\to +\infty$. **(10)** $f(x)=x^{-1},\ x\to +\infty$.
(11) $f(x)=\operatorname{arctg} x,\ x\to +\infty$. **(12)** $f(x)=\dfrac{x}{\operatorname{arctg} x},\ x\to +\infty$. **(13)** $f(x)=x^2\operatorname{arctg} x,\ x\to +\infty$.

(14) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x},\ x \to +\infty$. **(15)** $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-6x+5},\ x \to +\infty$. **(16)** $f(x) = \dfrac{x^2+6}{x^3+5},\ x \to +\infty$.
(17) $f(x) = \dfrac{x^3+6}{x^2+5},\ x \to +\infty$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

24. Каждая элементарная функция, x^α, $\frac{ax+b}{cx+d}$, $|x|$,
$\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x, \arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x,\ \log_a x, b^x$, а также композиция элементарных функций, имеет конечный предел во всех внутренних точках области определения, равный ее значению в этой точке. Укажите бесконечно малые и бесконечно большие функции.
(1) $f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \to \dfrac{\pi}{4}$. **(2)** $f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \to \dfrac{\pi}{2}$. **(3)** $f(x) = \sin x,\ x \to \pi$. **(4)** $f(x) = x \operatorname{tg} x,\ x \to 0$.
(5) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x},\ x \to \dfrac{\pi}{2}$. **(6)** $f(x) = \sin \dfrac{1}{x^2},\ x \to +\infty$. **(7)** $f(x) = \ln(x+1),\ x \to 0$.
(8) $f(x) = \ln x,\ x \to +0$. **(9)** $f(x) = x \ln x,\ x \to +\infty$. **(10)** $f(x) = x^{-2},\ x \to +\infty$.
(11) $f(x) = \operatorname{arctg} x,\ x \to 0$. **(12)** $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x},\ x \to +\infty$. **(13)** $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x},\ x \to +0$.
(14) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x},\ x \to 0$. **(15)** $f(x) = \dfrac{x^2-6x+5}{x^2-3x+2},\ x \to +\infty$. **(16)** $f(x) = \dfrac{x+6}{x^2+5},\ x \to +\infty$.
(17) $f(x) = \dfrac{x^2+6}{x+5},\ x \to +\infty$.

5. Свойства пределов

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

25. Постройте отрицание: $\exists \varepsilon > 0 : \forall N\ \exists n \geqslant N, \exists m \geqslant N : |x_n - x_m| \geqslant \varepsilon$.

26. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – функции, определенные в окрестности точки a. Укажите все верные утверждения (все пределы при $x \to a$).
(a) Если $f(x)$ имеет предел и $g(x)$ имеет предел, то $f(x) + g(x)$ имеет предел
(b) Если $f(x)$ не имеет предела и $g(x)$ имеет предел, то $f(x) + g(x)$ не имеет предела
(c) Если $f(x)$ не имеет предела и $g(x)$ не имеет предела, то $f(x) + g(x)$ не имеет предела
(d) Если $f(x) + g(x)$ имеет предел и $f(x)$ не имеет предела, то $g(x)$ не имеет предела
(e) Если $f(x) + g(x)$ не имеет предела и $f(x)$ имеет предел, то $g(x)$ не имеет предела
(f) Если $f(x) + g(x)$ не имеет предела и $f(x)$ не имеет предела, то $g(x)$ может иметь и может не иметь предел

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

27. Постройте отрицание: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geqslant N, \forall p \geqslant 1 \Rightarrow |x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$.

28. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – функции, определенные в окрестности точки a. Укажите все верные утверждения. Все пределы при $x \to a$.
(a) Если $f(x) - g(x)$ имеет предел и $f(x)$ не имеет предела, то $g(x)$ не имеет предела
(b) Если $f(x) - g(x)$ не имеет предела и $f(x)$ имеет предел, то $g(x)$ не имеет предела
(c) Если $f(x) - g(x)$ не имеет предела и $f(x)$ не имеет предела, то $g(x)$ может иметь и может не иметь предел
(d) Если $f(x)$ имеет предел и $g(x)$ имеет предел, то $f(x) - g(x)$ имеет предел
(e) Если $f(x)$ не имеет предела и $g(x)$ имеет предел, то $f(x) - g(x)$ не имеет предела
(f) Если $f(x)$ не имеет предела и $g(x)$ не имеет предела, то $f(x) - g(x)$ не имеет предела

6. Односторонние пределы

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

29. Найдите односторонние пределы $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$. Существует ли $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, если

(1) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, $a = 0$. **(2)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$, $a = 3$. **(3)** $f(x) = \dfrac{|x^2-5x+6|}{x-2}$, $a = 2$.

(4) $f(x) = \dfrac{|x^2-5x+6|}{|x^2-7x+12|}$, $a = 3$.

Д **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

30. Найдите односторонние пределы $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$. Существует ли $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, если

(1) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-|x|}$, $a = 0$. **(2)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-7x+12}}{x-3}$, $a = 3$. **(3)** $f(x) = \dfrac{|x^2-6x+5|}{x-1}$, $a = 1$.

(4) $f(x) = \dfrac{|x^2-4x+3|}{|x^2-9x+18|}$, $a = 3$.

2008-2009 Курс 1, семестр 1, семинар 02
Тема: Бесконечно малые функции

Соглашение об асимптотических формулах. При решении задач этого и всех последующих разделов можно использовать формулы

(1) $\sin x = x + o(x)$, $\sin x = x + o(x^2)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$,

(2) $\arcsin x = x + o(x^2)$, $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^6)$,

(3) $\cos x = 1 + o(x)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$,

(4) $\operatorname{tg} x = x + o(x^2)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$,

(5) $\operatorname{arctg} x = x + o(x^2)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$,

(6) $\frac{1}{1-x} = 1 + o(1)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$,

(7) $\frac{1}{1+x} = 1 + o(1)$, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$,

(8) $\sqrt{1+x} = 1 + o(1)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$,

(9) $\sqrt{1-x} = 1 + o(1)$, $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$, $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$,

(10) $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} + o(x)$, $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{2x^2}{27} + o(x^2)$,

(11) $\sqrt[3]{1-x} = 1 - \frac{x}{3} + o(x)$, $\sqrt[3]{1-x} = 1 - \frac{x}{3} - \frac{2x^2}{27} + o(x^2)$,

(12) $\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} + o(x)$, $\sqrt[n]{1-x} = 1 - \frac{x}{n} + o(x)$, $\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} - \frac{(n-1)x^2}{2n^2} + o(x^2)$, $\sqrt[n]{1-x} = 1 - \frac{x}{n} - \frac{(n-1)x^2}{2n^2} + o(x^2)$,

(13) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, $-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$,

(14) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$,

(15) $(1+x)^p = 1 + px + o(x)$, $(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + o(x^2)$, $(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + \frac{p(p-1)(p-1)}{6}x^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$.

Эти формулы называются "асимптотическими формулами". Каждая из этих формул является также "формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано". Можно использовать формулы первого и второго замечательных пределов, $\frac{\sin x}{x} = 1 + o(1)$ при $x \to 0$, $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e + o(1)$ при $x \to 0$, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e + o(1)$ при $x \to +\infty$, а также формулы $(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1 + o(1)$ при $x \to +\infty$, $x^{\frac{1}{x}} = 1 + o(1)$ при $x \to +\infty$. Доказательство каждой из этих формул будет дано в соответствующем месте нашего курса.

1. Понятие бесконечно малой функции более высокого порядка малости в точке

С Для обязательного разбора на семинаре.

1. Пусть $f(x) = o(x)$ при $x \to 0$. Укажите все верные утверждения: **(a)** $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
(b) $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. **(c)** $\exists \lim\limits_{x\to 0} x f(x) = 0$. **(d)** $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)/x = 0$.
(e) $\exists A,\ \exists\delta > 0 : \forall x :\ |x| < \delta \Longrightarrow |f(x)| \leqslant A$. **(f)** $\exists A,\ \exists\delta > 0 : \forall x :\ |x| < \delta \Longrightarrow |f(x)| \leqslant A|x|$.

Д Обязательное задание на дом.

2. Пусть $f(x) = o(1)$ при $x \to 0$. Укажите все верные утверждения: **(a)** $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
(b) $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. **(c)** $\exists \lim\limits_{x\to 0} x f(x) = 0$. **(d)** $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)/x = 0$.
(e) $\exists A,\ \exists\delta > 0 : \forall x :\ |x| < \delta \Longrightarrow |f(x)| \leqslant A$. **(f)** $\exists A,\ \exists\delta > 0 : \forall x :\ |x| < \delta \Longrightarrow |f(x)| \leqslant A|x|$.

2. Сравнение бесконечно малых функций в точке

С Для обязательного разбора на семинаре.

3. Является ли верным утверждение: **(1)** $x = o(1)$ при $x \to 0$, **(2)** $x = o(x^2)$ при $x \to 0$, **(3)** $x^3 = o(x^2)$ при $x \to 0$, **(4)** $(1+x)^2 = 1 + o(1)$ при $x \to 0$, **(5)** $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 + o(x^2)$ при $x \to 0$, **(6)** $\dfrac{1}{1+x} = 1 + o(1)$ при $x \to 0$, **(7)** $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$ при $x \to 0$,
(8) $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$ при $x \to 0$,

Д Обязательное задание на дом.

4. Является ли верным утверждение: **(1)** $x^2 = o(1)$ при $x \to 0$, **(2)** $x^2 = o(x^3)$ при $x \to 0$, **(3)** $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$, **(4)** $(1+x)^2 = 1 + 2x + o(x)$ при $x \to 0$, **(5)** $(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + o(x^2)$ при $x \to 0$, **(6)** $\dfrac{1}{1-x} = 1 + o(1)$ при $x \to 0$, **(7)** $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$ при $x \to 0$,
(8) $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$.

3. Сравнение бесконечно малых функций в бесконечно удаленной точке

С Для обязательного разбора на семинаре.

5. Является ли верным утверждение: **(1)** $x^{-1} = o(1)$ при $x \to +\infty$, **(2)** $x^{-2} = o(x^{-1})$ при $x \to +\infty$.

Д Обязательное задание на дом.

6. Является ли верным утверждение: **(1)** $x^{-2} = o(1)$ при $x \to +\infty$, **(2)** $x^{-3} = o(x^{-2})$ при $x \to +\infty$.

4. Асимптотические формулы для тригонометрических функций

С Для обязательного разбора на семинаре.

7. Является ли верным утверждение: **(1)** $\operatorname{tg} x = o(1)$ при $x \to 0$, **(2)** $\sin x = x + o(x)$ при $x \to 0$, **(3)** $\operatorname{tg} x = x + o(x^2)$ при $x \to 0$, **(4)** $\sin x = x + o(x)$ при $x \to +\infty$, **(5)** $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ при $x \to 0$, **(6)** $\cos x = 1 + o(x)$ при $x \to 0$, **(7)** $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$ при $x \to 0$.

Д Обязательное задание на дом.

8. Является ли верным утверждение: **(1)** $\sin x = o(1)$ при $x \to 0$, **(2)** $\operatorname{tg} x = x + o(x)$ при $x \to 0$, **(3)** $\sin x = x + o(x^2)$ при $x \to 0$, **(4)** $\operatorname{tg} x = x + o(x)$ при $x \to +\infty$, **(5)** $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ при $x \to +\infty$, **(6)** $\cos x = 1 + o(1)$ при $x \to 0$, **(7)** $\cos x = 1 + o(x^2)$ при $x \to 0$,
(8) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ при $x \to 0$.

5. Асимптотические формулы для иррациональных функций

$\boxed{\text{С}}$ **Для обязательного разбора на семинаре.**

9. Является ли верным утверждение: **(1)** $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} + o(x)$ при $x \to 0$,
(2) $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} + o(1)$ при $x \to 0$, **(3)** $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \dfrac{x}{3} + o(x)$ при $x \to 0$,
(4) $\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} = 2 + o(x)$ при $x \to 0$, **(5)** $\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x} = \dfrac{2x}{3} + o(x)$ при $x \to 0$,
(6) $\sqrt{1+x^2} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ при $x \to 0$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Обязательное задание на дом.**

10. Является ли верным утверждение: **(1)** $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} + o(1)$ при $x \to +\infty$,
(2) $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \dfrac{x}{3} + o(x)$ при $x \to +\infty$, **(3)** $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x} = o(1)$ при $x \to +\infty$,
(4) $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x} = 1 + o(1)$ при $x \to +\infty$, **(5)** $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = o(1)$ при $x \to +\infty$,
(6) $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = x^{-1} + o(x^{-1})$ при $x \to +\infty$.

6. Доказательство асимптотических формул

$\boxed{\text{С}}$ **Для обязательного разбора на семинаре.**

11. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора, что $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$ при $x \to 0$.

12. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора, что $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$ при $x \to 0$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Обязательное задание на дом.**

13. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора, что $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$ при $x \to 0$.

14. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора, что $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$ при $x \to 0$.

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

15. Не пользуясь формулой Тейлора докажите, что $\sqrt{1-x} = 1 - \dfrac{x}{2} + o(x)$ при $x \to 0$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

16. Не пользуясь формулой Тейлора докажите, что $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} + o(x)$ при $x \to 0$.

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

17. Не пользуясь формулой Тейлора докажите, что $\sqrt{1-x} = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

18. Не пользуясь формулой Тейлора докажите, что $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + o(x)$ при $x \to 0$.

7. Асимптотические формулы с зщаменой переменной

$\boxed{\text{С}}$ **Для обязательного разбора на семинаре.**

19. Запишите асимптотическую формулу вида $f(x) = A + Bx + o(x)$ при $x \to 0$, если
(1) $f(x) = \dfrac{1}{1+2x}$, **(2)** $f(x) = \sqrt{1-3x}$, **(3)** $f(x) = \ln 1 + 4x$, **(4)** $f(x) = \sin 5x$,
(5) $f(x) = \arcsin 6x$, **(6)** $f(x) = e^{7x}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Обязательное задание на дом.**

20. Запишите асимптотическую формулу вида $f(x) = A + Bx + o(x)$ при $x \to 0$, если

(1) $f(x) = \dfrac{1}{1-6x}$, **(2)** $f(x) = \sqrt{1+5x}$, **(3)** $f(x) = \ln 1 - 3x$, **(4)** $f(x) = \sin 2x$,
(5) $f(x) = \arcsin 4x$, **(6)** $f(x) = e^{-2x}$.

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

21. Запишите асимптотическую формулу вида $f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$, если
(1) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, **(2)** $f(x) = \sqrt{1-2x^2}$, **(3)** $f(x) = \ln(1+x^3)$, **(4)** $f(x) = \sin(5x^2)$,
(5) $f(x) = \arcsin(6x^2)$, **(6)** $f(x) = e^{-7x^3}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

22. Запишите асимптотическую формулу вида $f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + o(x^4)$ при $x \to 0$, если
(1) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$, **(2)** $f(x) = \sqrt{1+3x^3}$, **(3)** $f(x) = \ln(1-x^2)$, **(4)** $f(x) = \sin(5x^4)$,
(5) $f(x) = \arcsin(2x^3)$, **(6)** $f(x) = e^{2x^4}$.

8. Применение асимптотических формул для исследования сложной функции

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

23. Используя формулы $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$, найдите такие A, b, C, D, что является верным утверждение
(1) $\sqrt{\cos x} = A + Bx + Cx^2 + o(x^3)$ при $x \to 0$, **(2)** $\dfrac{1}{1+\sin x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$, **(3)** $\sin(\operatorname{tg} 2x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$,

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

24. Используя формулы $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$, найдите такие A, b, C, D, что является верным утверждение
(1) $\dfrac{1}{\cos x} = A + Bx + Cx^2 + o(x^3)$ при $x \to 0$, **(2)** $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg} x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$, **(3)** $\operatorname{tg}(\sin 2x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$,

2008-2009 Курс 1, семестр 1, семинар 03
Тема: Первый и второй замечательный предел

Соглашение об асимптотических формулах. При решении задач этого и всех последующих разделов можно использовать формулы

(1) $\sin x = x + o(x)$, $\sin x = x + o(x^2)$, $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$, $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$,
$\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o(x^5)$, $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o(x^6)$,

(2) $\arcsin x = x + o(x^2)$, $\arcsin x = x + \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^5}{40} + o(x^6)$,

(3) $\cos x = 1 + o(x)$, $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^5)$,

(4) $\operatorname{tg} x = x + o(x^2)$, $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^6)$,

(5) $\operatorname{arctg} x = x + o(x^2)$, $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + o(x^6)$,

(6) $\dfrac{1}{1-x} = 1 + o(1)$, $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$, $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$,
$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$,

(7) $\dfrac{1}{1+x} = 1 + o(1)$, $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$, $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$,
$\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$,

(8) $\sqrt{1+x} = 1 + o(1)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} + o(x)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + o(x^2)$,

(9) $\sqrt{1-x} = 1 + o(1)$, $\sqrt{1-x} = 1 - \dfrac{x}{2} + o(x)$, $\sqrt{1-x} = 1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + o(x^2)$,

(10) $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \dfrac{x}{3} + o(x)$, $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \dfrac{x}{3} - \dfrac{2x^2}{27} + o(x^2)$,

(11) $\sqrt[3]{1-x} = 1 - \dfrac{x}{3} + o(x)$, $\sqrt[3]{1-x} = 1 - \dfrac{x}{3} - \dfrac{2x^2}{27} + o(x^2)$,

(12) $\sqrt[n]{1+x} = 1 + \dfrac{x}{n} + o(x)$, $\sqrt[n]{1-x} = 1 - \dfrac{x}{n} + o(x)$, $\sqrt[n]{1+x} = 1 + \dfrac{x}{n} - \dfrac{(n-1)x^2}{2n^2} + o(x^2)$,
$\sqrt[n]{1-x} = 1 - \dfrac{x}{n} - \dfrac{(n-1)x^2}{2n^2} + o(x^2)$,

(13) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$, $-\ln(1-x) = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$,

(14) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$, $e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$,

(15) $(1+x)^p = 1 + px + o(x)$, $(1+x)^p = 1 + px + \dfrac{p(p-1)}{2}x^2 + o(x^2)$,
$(1+x)^p = 1 + px + \dfrac{p(p-1)}{2}x^2 + \dfrac{p(p-1)(p-1)}{6}x^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$.

Эти формулы называются "асимптотическими формулами". Каждая из этих формул является также "формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано". Можно использовать формулы первого и второго замечательных пределов, $\dfrac{\sin x}{x} = 1 + o(1)$ при $x \to 0$,
$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e + o(1)$ при $x \to 0$, $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e + o(1)$ при $x \to +\infty$, а также формулы
$(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1 + o(1)$ при $x \to +\infty$, $x^{\frac{1}{x}} = 1 + o(1)$ при $x \to +\infty$. Доказательство каждой из этих формул будет дано в соответствующем месте нашего курса.

1. Предел тригонометрических функций

С **Для обязательного разбора на семинаре.**

1. Используя тригонометрические формулы, найдите **(1)** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$,
(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(a+x)-2\cos a+\cos(a-x)}{x^2}$, **(3)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-3\sin x}{x^3}$, **(4)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{x^2}$.

2. Используя формулу первого замечательного предела, найдите **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$,
(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{3x}$, **(4)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x}$, **(5)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}$, **(6)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-\sin x}{x}$, **(7)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} x}{x}$,
(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-2\cos 2x+\cos x}{x^2}$, **(9)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$.

3. Найдите **(1)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\dfrac{1}{x^2}$, **(3)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\cos\dfrac{1}{x}-1\right)$, **(4)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(\sin\dfrac{1}{x}-\operatorname{tg}\dfrac{1}{x}\right)$,

Д **Обязательное задание на дом.**

4. Используя тригонометрические формулы, найдите **(1)** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$,
(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)-2\sin a+\sin(a-x)}{x^2}$, **(3)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x^3}$, **(4)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{x^2}$.

5. Используя формулу первого замечательного предела, найдите **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2}$,
(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 12x}{3x}$, **(4)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{2x}$, **(5)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 6x}{\operatorname{tg} 3x}$, **(6)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin 2x}{x}$, **(7)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} x}$,
(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-2\cos 2x+\cos x}{x^2}$, **(9)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x-\sin 2x}{x^3}$.

6. Найдите **(1)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x\operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\sin\dfrac{1}{x^2}$, **(3)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(\sin\dfrac{2}{x}-2\sin\dfrac{1}{x}\right)$,
(4) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sin\dfrac{1}{x}+\operatorname{tg}\dfrac{1}{x}\right)$,

2. Вычисление предела тригонометрических функций с помощью асимптотических формул

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

7. Используя формулы $\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^4)$, $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)$, $\operatorname{tg} x=x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^4)$,
найдите **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x^3}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\sin 3x-\sin 4x}{x^3}$, **(3)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 2x}{x^2}$,
(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x+\cos 3x-2\cos 2x}{x^2}$, **(5)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 3x-3\operatorname{tg} x}{x^3}$, **(6)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 3x-\operatorname{tg} 4x}{x^3}$,
(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$.

Д **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

8. Используя формулы $\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^4)$, $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)$, $\operatorname{tg} x=x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^4)$,
найдите **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-3\sin x}{x^3}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+\sin 3x-\sin 5x}{x^3}$, **(3)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{x^2}$,
(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x+\cos 3x-2\cos 4x}{x^2}$, **(5)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x-2\operatorname{tg} x}{x^3}$, **(6)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} 3x}{x^3}$,
(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 3x-\sin x-\sin 2x}{x^3}$.

3. Второй замечательный предел в конечной точке

С Для обязательного разбора на семинаре.

9. Найдите **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\big(1-x\big)^{\frac{1}{x}}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to 0}\big(1-x\big)^{\frac{-1}{x}}$, **(3)** $\lim\limits_{x\to 0}\big(1+3x\big)^{\frac{2}{x}}$, **(4)** $\lim\limits_{x\to 0}\big(\dfrac{1+3x}{1-2x}\big)^{\frac{2}{x}}$,

Д Обязательное задание на дом.

10. Найдите **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\big(1+x\big)^{\frac{1}{x}}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to 0}\big(1+x\big)^{\frac{-1}{x}}$, **(3)** $\lim\limits_{x\to 0}\big(1-3x\big)^{\frac{2}{x}}$, **(4)** $\lim\limits_{x\to 0}\big(\dfrac{3+x}{3-x}\big)^{\frac{1}{x}}$.

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

11. Найдите **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\big(\cos 2x\big)^{3/x^2}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to 0}\big(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\big)^{3/x^2}$,

12. Найдите **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\ln(1+2x)}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to 0}\big(1+\ln(1+x)\big)^{1/\ln(1+x)}$, **(3)** $\lim\limits_{x\to 0}\big(\ln(e+x)\big)^{1/x}$,
(4) $\lim\limits_{x\to 0}\big(1+x\big)^{1/\ln(1+x)}$.

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

13. Найдите **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\big(\cos x\big)^{1/x^2}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to 0}\big(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\big)^{3/x^2}$,

14. Найдите **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to 0}\big(\ln(e+x)\big)^{1/\ln(1+x)}$, **(3)** $\lim\limits_{x\to 0}\big(1+\ln(1+x)\big)^{1/x}$,
(4) $\lim\limits_{x\to 0}\big(1+x\big)^{2/\ln(1+x)}$.

4. Второй замечательный предел в бесконечно удаленной точке

С Для обязательного разбора на семинаре.

15. Найдите **(1)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\big(1+\dfrac{1}{x}\big)^{x}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\big(1-\dfrac{2}{x}\big)^{3x}$, **(3)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\big(\dfrac{x+1}{x-1}\big)^{x}$, **(4)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\big(\dfrac{2x+1}{2x-3}\big)^{x}$,
(5) $\lim\limits_{x\to +\infty}\big(1+\dfrac{1}{x^2}\big)^{x^2}$,

Д Обязательное задание на дом.

16. Найдите **(1)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\big(1-\dfrac{1}{x}\big)^{x}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\big(1+\dfrac{3}{x}\big)^{2x}$, **(3)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\big(\dfrac{x+1}{x}\big)^{x}$, **(4)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\big(\dfrac{2x+1}{2x-1}\big)^{x}$,
(5) $\lim\limits_{x\to +\infty}\big(1-\dfrac{1}{x^2}\big)^{x^2}$,

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

17. Найдите **(1)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\big(\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\big)^{x}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\big(\cos\dfrac{3}{\sqrt{x}}\big)^{x}$, **(3)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\big(1+\sin\dfrac{2}{x}\big)^{x}$.

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

18. Найдите **(1)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\big(\dfrac{x^2+x}{x^2-1}\big)^{x}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\big(\cos\dfrac{1}{\sqrt{x}}\big)^{x}$, **(3)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\big(1+\sin\dfrac{1}{x^2}\big)^{x^2}$.

5. Сравнение бесконечно малых функций (продолжение), произведение бесконечно малых функций

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

19. Докажите, что $o(x^2)\cdot o(x^3)=o(x^5)$ при $x\to 0$.

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

20. Докажите, что $o(\sqrt{x})\cdot o(\sqrt[3]{x})=o(\sqrt[6]{x^5})$ при $x\to +0$.

6. Сравнение бесконечно малых функций (продолжение), сумма бесконечно малых функций

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

21. Укажите все возможные значения γ, при которых $o(x^{-3}) + o(x^{-5}) = o(x^{\gamma})$ при $x \to +\infty$.

Д **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

22. Укажите все возможные значения γ, при которых $o(x^{3}) + o(x^{5}) = o(x^{\gamma})$ при $x \to +0$.

С **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

23. Пусть $\alpha < 0,\ \beta < 0$. Укажите все возможные значения γ, при которых $o(x^{\alpha}) + o(x^{\beta}) = o(x^{\gamma})$ при $x \to +\infty$.

Д **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

24. Пусть $\alpha > 0,\ \beta > 0$. Укажите все возможные значения γ, при которых $o(x^{\alpha}) + o(x^{\beta}) = o(x^{\gamma})$ при $x \to +0$.

7. Применение асимптотических формул для исследования сложной функции

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

25. Используя формулу $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$ при $x \to 0$, докажите, что $\operatorname{tg} 2x = px + qx^3 + o(x^4)$ при $x \to 0$ и найдите значения коэффициентов $p,\ q$.

Д **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

26. Используя формулу $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$ при $x \to 0$, докажите, что $\sin 2x = px + qx^3 + o(x^4)$ при $x \to 0$ и найдите значения коэффициентов $p,\ q$.

С **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

27. Пусть $f(x) = x + 2x^2 + o(x^2),\ \ g(x) = 2x - x^2 + o(x^2)$ при $x \to 0,\ \ f(0) = 0,\ g(0) = 0$. Докажите, что $\exists p,\ q : f(g(x)) = px + qx^2 + o(x^2)$ при $x \to 0$. Найдите значения коэффициентов $p,\ q$.

Д **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

28. Пусть $f(x) = x + 2x^2 + o(x^2),\ \ g(x) = 2x - x^2 + o(x^2)$ при $x \to 0,\ \ f(0) = 0,\ g(0) = 0$. Докажите, что $\exists p,\ q : g(f(x)) = px + qx^2 + o(x^2)$ при $x \to 0$. Найдите значения коэффициентов $p,\ q$.

2008-2009 Курс 1, семестр 1, семинар 04
Тема: Непрерывные функции

Соглашение об асимптотических формулах. При решении задач этого и всех последующих разделов можно использовать формулы

(1) $\sin x = x + o(x)$, $\sin x = x + o(x^2)$, $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$, $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$,
$\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o(x^5)$, $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o(x^6)$,

(2) $\arcsin x = x + o(x^2)$, $\arcsin x = x + \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^5}{40} + o(x^6)$,

(3) $\cos x = 1 + o(x)$, $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^5)$,

(4) $\operatorname{tg} x = x + o(x^2)$, $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^6)$,

(5) $\operatorname{arctg} x = x + o(x^2)$, $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + o(x^6)$,

(6) $\dfrac{1}{1-x} = 1 + o(1)$, $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$, $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$,
$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$,

(7) $\dfrac{1}{1+x} = 1 + o(1)$, $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$, $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$,
$\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$,

(8) $\sqrt{1+x} = 1 + o(1)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} + o(x)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + o(x^2)$,

(9) $\sqrt{1-x} = 1 + o(1)$, $\sqrt{1-x} = 1 - \dfrac{x}{2} + o(x)$, $\sqrt{1-x} = 1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + o(x^2)$,

(10) $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \dfrac{x}{3} + o(x)$, $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \dfrac{x}{3} - \dfrac{2x^2}{27} + o(x^2)$,

(11) $\sqrt[3]{1-x} = 1 - \dfrac{x}{3} + o(x)$, $\sqrt[3]{1-x} = 1 - \dfrac{x}{3} - \dfrac{2x^2}{27} + o(x^2)$,

(12) $\sqrt[n]{1+x} = 1 + \dfrac{x}{n} + o(x)$, $\sqrt[n]{1-x} = 1 - \dfrac{x}{n} + o(x)$, $\sqrt[n]{1+x} = 1 + \dfrac{x}{n} - \dfrac{(n-1)x^2}{2n^2} + o(x^2)$,
$\sqrt[n]{1-x} = 1 - \dfrac{x}{n} - \dfrac{(n-1)x^2}{2n^2} + o(x^2)$,

(13) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$, $-\ln(1-x) = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$,

(14) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$, $e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$,

(15) $(1+x)^p = 1 + px + o(x)$, $(1+x)^p = 1 + px + \dfrac{p(p-1)}{2}x^2 + o(x^2)$,
$(1+x)^p = 1 + px + \dfrac{p(p-1)}{2}x^2 + \dfrac{p(p-1)(p-1)}{6}x^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$.

Эти формулы называются "асимптотическими формулами". Каждая из этих формул является также "формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано". Можно использовать формулы первого и второго замечательных пределов, $\dfrac{\sin x}{x} = 1 + o(1)$ при $x \to 0$, $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e + o(1)$ при $x \to 0$, $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e + o(1)$ при $x \to +\infty$, а также формулы $(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1 + o(1)$ при $x \to +\infty$, $x^{\frac{1}{x}} = 1 + o(1)$ при $x \to +\infty$. Доказательство каждой из этих формул будет дано в соответствующем месте нашего курса.

1. Классификация точек разрыва

$\boxed{\text{С}}$ **Для обязательного разбора на семинаре.**

1. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x) = \dfrac{x}{x}$, **(2)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$, **(3)** $f(x) = \dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-4)}$,
(4) $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}$, **(5)** $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2+x+1}$, **(6)** $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x-1}$,
(7) $f(x) = \dfrac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(x-3)(x-4)(x-5)}$,

2. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sin 2x}$, **(2)** $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$, **(3)** $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2}$,
(4) $f(x) = \dfrac{(x-1)|x-2|}{(x-1)(x-2)}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Обязательное задание на дом.**

3. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x) = \dfrac{x-3}{x-3}$, **(2)** $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$, **(3)** $f(x) = \dfrac{x(x-1)}{x(x-2)}$,
(4) $f(x) = \dfrac{x^2-6x+5}{x^2-3x+2}$, **(5)** $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$, **(6)** $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x+1}$,

4. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x) = \dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$, **(2)** $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, **(3)** $f(x) = \dfrac{x-1}{|x-1|}$,
(4) $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{(x-2)|x-3|}$.

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

5. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x) = \operatorname{tg} x$, **(2)** $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, **(3)** $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$,
(4) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$, **(5)** $f(x) = \dfrac{x}{\operatorname{tg} x}$, **(6)** $f(x) = \operatorname{tg} x\cos x$, **(7)** $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$, **(8)** $f(x) = \operatorname{tg}\dfrac{3\pi x}{1+x^2}$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

6. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$, **(2)** $f(x) = \cos\dfrac{1}{x}$, **(3)** $f(x) = x\cos\dfrac{1}{x}$,
(4) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, **(5)** $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$, **(6)** $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$, **(7)** $f(x) = x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$, **(8)** $f(x) = \operatorname{tg}\dfrac{5\pi x}{1+x^2}$,

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

7. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x) = e^{-1/x}$, **(2)** $f(x) = (1+x)^{1/x}$, $x > -1$,
(3) $f(x) = (1+\dfrac{1}{x})^x$, $0 < x < 0{,}5$, **(4)** $f(x) = (\cos x)^{1/x^2}$,

8. Известно, что $\lim_{x\to+0} x\ln x = 0$, $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Классифицируйте точки разрыва:
(1) $f(x) = \ln|x|$, **(2)** $f(x) = x\ln|x|$, **(3)** $f(x) = |x|\ln|x|$, **(4)** $f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$, **(5)** $f(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}$,
(6) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{\ln|x|}$, **(7)** $f(x) = \dfrac{\ln(1+\frac{x}{2})}{\ln(1+x)}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

9. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$, **(2)** $f(x) = x^{\frac{1}{x-1}}$, $x > 0$,
(3) $f(x) = \left(\dfrac{x+2}{x}\right)^x$, $0 < x < 0{,}5$, **(4)** $f(x) = \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$,

10. Известно, что $\lim_{x\to+0} x\ln x = 0$, $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Классифицируйте точки разрыва:
(1) $f(x)=\ln(x^2)$, **(2)** $f(x)=x\ln(x)^2$, **(3)** $f(x)=\dfrac{x}{\ln(1+x)}$, **(4)** $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$,
(5) $f(x)=\dfrac{\ln(x^2)}{x^2-1}$, **(6)** $f(x)=\dfrac{\ln(1+2x)}{\ln(1+x)}$.

2. Асимптотические формулы для основных элементарных функций

С Для обязательного разбора на семинаре.
11. При каких α и β является верным утверждение $f(x)=\alpha+\beta x+o(x)$ при $x\to 0$, если
(1) $f(x)=(1+x)^2$, **(2)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}$, **(3)** $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$, **(4)** $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$,
(5) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, **(6)** $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$. Тот же вопрос для утверждения **(7)** $\sin x=\alpha x+\beta x^3+o(x^3)$,
(8) $\arcsin x=\alpha x+\beta x^3+o(x^3)$. **(9)** $\ln(1+x)=\alpha x+\beta x^2+o(x^2)$.
Д Обязательное задание на дом.
12. При каких α и β является верным утверждение $f(x)=\alpha+\beta x+o(x)$ при $x\to 0$, если
(1) $f(x)=(1+x)^{-1}$, **(2)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$, **(3)** $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$, **(4)** $f(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{x}$,
(5) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$, **(6)** $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$. Тот же вопрос для утверждения **(7)** $\cos x=\alpha+\beta x^2+o(x^2)$,
(8) $\operatorname{arctg} x=\alpha x+\beta x^3+o(x^3)$, **(9)** $\ln(1-x)=\alpha x+\beta x^2+o(x^2)$.

3. Применение асимптотических формул для исследования сложной функции

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.
13. Используя формулы $\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^4)$, $\arcsin x=x+\dfrac{x^3}{6}+o(x^4)$, $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)$,
$\operatorname{tg} x=x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x=x-\dfrac{x^3}{3}+o(x^4)$, $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+o(x^3)$,
$\sqrt{1+x}=1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}+o(x^2)$ при $x\to 0$, найдите такие A, b, C, D, что является верным утверждение
(1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=A+Bx+Cx^2+Dx^3+o(x^3)$ при $x\to 0$,
(2) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)=A+Bx+Cx^2+Dx^3+o(x^3)$ при $x\to 0$.
Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.
14. Используя формулы $\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^4)$, $\arcsin x=x+\dfrac{x^3}{6}+o(x^4)$, $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)$,
$\operatorname{tg} x=x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x=x-\dfrac{x^3}{3}+o(x^4)$, $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+o(x^3)$,
$\sqrt{1+x}=1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}+o(x^2)$ при $x\to 0$, найдите такие A, b, C, D, что является верным утверждение
(1) $\sin(\arcsin x)=A+Bx+Cx^2+Dx^3+o(x^3)$ при $x\to 0$,
(2) $\arcsin(\sin x)=A+Bx+Cx^2+Dx^3+o(x^3)$ при $x\to 0$.
С Сложные задачи для разбора на семинаре.
15. Используя формулы $\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^4)$, $\arcsin x=x+\dfrac{x^3}{6}+o(x^4)$, $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)$,
$\operatorname{tg} x=x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x=x-\dfrac{x^3}{3}+o(x^4)$, $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+o(x^3)$,
$\sqrt{1+x}=1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}+o(x^2)$ при $x\to 0$, найдите такие A, b, C, D, что является верным утверждение

(1) $\operatorname{tg}(2\sin x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$,
(2) $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

16. Используя формулы $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$, найдите такие A, b, C, D, что является верным утверждение
(1) $\sin\left(2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$,
(2) $\sin(2\arcsin x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$.

2008-2009 Курс 1, семестр 1, семинар 05
Тема: Вычисление производных, уравнение касательной

1. Вычисление производной

С **Для обязательного разбора на семинаре.**

1. Найдите производную: **(1)** $f(x)=x$, **(2)** $f(x)=x^2$, **(3)** $f(x)=2x^3+3x^2+6x+12$, **(4)** $f(x)=x^\pi$, **(5)** $f(x)=\sqrt{x}$, **(6)** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$, **(7)** $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, **(8)** $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$, **(9)** $f(x)=\dfrac{2x-3}{3x-2}$, **(10)** $f(x)=\sqrt{x-1}$, **(11)** $f(x)=\sin x$, **(12)** $f(x)=\operatorname{tg} x$, **(13)** $f(x)=\sin(2x)$, **(14)** $f(x)=\ln x$, **(15)** $f(x)=\log_2 x$, **(16)** $f(x)=e^x$, **(17)** $f(x)=\pi^x$, **(18)** $f(x)=2^{-x}$, **(19)** $f(x)=\arcsin x$, **(20)** $f(x)=\arcsin 2x$.

Д **Обязательное задание на дом.**

2. Найдите производную: **(1)** $f(x)=x^2-5x+6$, **(2)** $f(x)=x(x-1)$, **(3)** $f(x)=x^3+3x^2+3x+1$, **(4)** $f(x)=x^{\sqrt{2}}$, **(5)** $f(x)=\sqrt[3]{x}$, **(6)** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, **(7)** $f(x)=\dfrac{1}{x}$, **(8)** $f(x)=\dfrac{2}{1-2x}$, **(9)** $f(x)=\dfrac{4x-1}{x-4}$, **(10)** $f(x)=\sqrt{2x}$, **(11)** $f(x)=\cos x$, **(12)** $f(x)=\operatorname{tg}(2x)$, **(13)** $f(x)=\sin(3x-2)$, **(14)** $f(x)=\ln(2x)$, **(15)** $f(x)=\big(\ln x\big)^2$, **(16)** $f(x)=e^{2x}$, **(17)** $f(x)=2^x$, **(18)** $f(x)=3^{-x}$, **(19)** $f(x)=\operatorname{arctg} x$, **(20)** $f(x)=\operatorname{arctg} 2x$.

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

3. Найдите производную: **(1)** $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$, **(2)** $f(x)=\dfrac{x\sin x}{x+1}$, **(3)** $f(x)=\dfrac{x}{x^2-3x+2}$, **(4)** $f(x)=x^2\sin x$, **(5)** $f(x)=x\cos x$, **(6)** $f(x)=e^x\cos x$, **(7)** $f(x)=\sqrt{x}\operatorname{tg} x$, **(8)** $f(x)=x^3\sin 2x$, **(9)** $f(x)=x\ln x$, **(10)** $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$, **(11)** $f(x)=x^2\cdot 2^x$, **(12)** $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$, **(13)** $f(x)=x\arcsin x$, **(14)** $f(x)=\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

Д **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

4. Найдите производную: **(1)** $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$, **(2)** $f(x)=\dfrac{3x+2}{2\sin x+3}$, **(3)** $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+1}$, **(4)** $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$, **(5)** $f(x)=x\operatorname{tg} x$, **(6)** $f(x)=xe^x$, **(7)** $f(x)=x^2e^{-x}$, **(8)** $f(x)=\sqrt[3]{x}\sin x$, **(9)** $f(x)=x^2\cos 3x$, **(10)** $f(x)=x^2\ln x$, **(11)** $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, **(12)** $f(x)=x^3\cdot 3^x$, **(13)** $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$, **(14)** $f(x)=x\operatorname{arctg} x$, **(15)** $f(x)=\dfrac{x}{\arcsin x}$.

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

5. Найдите производную: **(1)** $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, **(2)** $f(x)=\sin\sqrt{x}$, **(3)** $f(x)=\ln(2\sqrt{e^x})$, **(4)** $f(x)=\arcsin\sqrt{x}$, **(5)** $f(x)=\sqrt{\operatorname{arctg} x}$, **(6)** $f(x)=e^{\sqrt{-x}}$, **(7)** $f(x)=\left|x^2-5x+6\right|$.

Д **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

6. Найдите производную: **(1)** $f(x)=x\sqrt{1+x^2}$, **(2)** $f(x)=\cos\sqrt{x}$, **(3)** $f(x)=\ln(2\sqrt{e^{-2x}})$, **(4)** $f(x)=\sqrt{\arcsin x}$, **(5)** $f(x)=\operatorname{arctg}\sqrt{x}$, **(6)** $f(x)=\sqrt{e^x}$, **(7)** $f(x)=\left|x^2-1\right|$.

С **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

7. Найдите производную: **(1)** $f(x)=\sqrt{x^2}$, **(2)** $f(x)=\big(\sqrt{x}\big)^2$, **(3)** $f(x)=\arcsin\sin x$, **(4)** $f(x)=\sin\arcsin x$, **(5)** $f(x)=e^{\ln|x|}$, **(6)** $f(x)=\ln e^x$.

Д **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

8. Найдите производную: **(1)** $f(x)=\sqrt[4]{x^4}$, **(2)** $f(x)=\big(\sqrt[4]{x}\big)^4$, **(3)** $f(x)=\operatorname{arctg}\operatorname{tg} x$, **(4)** $f(x)=\operatorname{tg}\operatorname{arctg} x$, **(5)** $f(x)=2^{\log_2|x|}$, **(6)** $f(x)=\log_2 2^x$.

2. Вычисление производной функции в особой точке

С **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

9. Найдите производную функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, если

(1) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0. \end{cases}$ **(2)** $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$ **(3)** $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$

Д **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

10. Найдите производную функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, если

(1) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\operatorname{tg} x} & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0. \end{cases}$ **(2)** $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{при } x > 0, \\ e^{\frac{1}{x}} & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$ **(3)** $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x^2} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$

С **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

11. Пусть $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln |x| & \text{если } x \neq 0, \\ 0 & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Докажите, что $\exists f'(x)$ при $x = 0$ и $f'(0) = 0$.

12. Пусть $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln |x|} & \text{если } x \neq 0, \\ 0 & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Докажите, что $\exists f'(x)$ при $x = 0$ и $f'(0) = 0$.

13. Пусть $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^5} & \text{если } x > 0, \\ e^{1/x^5} & \text{если } x < 0, \\ 0 & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Найдите $f'(0)$.

14. Докажите, что функция $f(x) = \begin{cases} x\big(1+x\big)^{\frac{1}{x}}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$ имеет производную в точке $x = 0$ и найдите ее значение.

15. Докажите, что функция $f(x) = \begin{cases} x^{x+1}, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$ имеет правую производную в точке $x = 0$ и найдите ее значение.

16. Пусть $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Докажите, что $\exists f'(x)$ при $x \neq 0$, $\exists f'(0)$, $\nexists \lim\limits_{x \to 0} f'(x)$.

Д **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

17. Пусть $f(x) = \begin{cases} x \ln |x| & \text{если } x \neq 0, \\ 0 & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Докажите, что $\nexists f'(x)$ при $x = 0$

18. Пусть $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln |x|} & \text{если } x \neq 0, \\ 0 & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Докажите, что $\nexists f'(x)$ при $x = 0$.

19. Пусть $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^4} & \text{если } x \neq 0, \\ 0 & \text{если } x = 0, \end{cases}$ Найдите $f'(0)$.

20. Докажите, что функция $f(x) = \begin{cases} x^{1-2x}, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$ имеет правую производную в точке $x = 0$ и найдите ее значение.

21. Докажите, что функция $f(x) = \begin{cases} x^{1+\sqrt{2x}}, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$ имеет правую производную в точке $x = 0$ и найдите ее значение.

22. Пусть $f(x) = \begin{cases} x^3 \cos \frac{1}{x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Докажите, что $\exists f'(x)$ при $x \neq 0$, $\exists f'(0)$, $\nexists \lim\limits_{x \to 0} f'(x)$.

3. Касательная

$\boxed{\text{С}}$ **Для обязательного разбора на семинаре.**

23. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$, если
(1) $f(x) = x^7$, $x_0 = 14$, **(2)** $\star f(x) = x^{2007}$, $x_0 = 4014$, **(3)** $f(x) = \dfrac{4}{x}$, $x_0 = 2$, **(4)** $f(x) = \dfrac{81}{x^3}$, $x_0 = 3$,
(5) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$, **(6)** $f(x) = \sin x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$, **(7)** $f(x) = x^2 e^{-x}$, $x_0 = 2$,
(8) $f(x) = \big(1 + \dfrac{1}{x}\big)^x$, $x_0 = 1$, **(9)** $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$, **(10)** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $x_0 = e$,
(11) $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln x}$, $x_0 = e^2$, **(12)** $f(x) = \big(\ln x\big)^2$, $x_0 = 1$, **(13)** $f(x) = \arcsin x$, $x_0 = \dfrac{1}{2}$,
(14) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$, **(15)** $f(x) = \cos(2\arccos x)$, $x_0 = \dfrac{1}{2}$, **(16)** $f(x) = \sin(3\arcsin x)$, $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Обязательное задание на дом.**

24. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$, если
(1) $f(x) = x^2$, $x_0 = 6$, **(2)** $f(x) = \dfrac{2}{x}$, $x_0 = 2$, **(3)** $f(x) = \dfrac{4}{x^2}$, $x_0 = -2$, **(4)** $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 36$,
(5) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \dfrac{5\pi}{6}$, **(6)** $f(x) = xe^{-x}$, $x_0 = 1$, **(7)** $f(x) = \big(1 - \dfrac{1}{x}\big)^x$, $x_0 = 1$,
(8) $f(x) = \ln(1 - x)$, $x_0 = 0$, **(9)** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $x_0 = 1$, **(10)** $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$, $x_0 = e$,
(11) $f(x) = x\big(\ln x\big)^2$, $x_0 = 1$, **(12)** $f(x) = \arcsin x$, $x_0 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, **(13)** $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 0$,
(14) $f(x) = \sin(2\arcsin x)$, $x_0 = \dfrac{3}{5}$, **(15)** $f(x) = \cos(3\arccos x)$, $x_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

25. Напишите уравнение правосторонней касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0, если **(1)** $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$, **(2)** $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 0$, **(3)** $f(x) = \arcsin x$, $x_0 = -1$,
(4) $f(x) = x\ln x$, $f(0) = 0$, $x_0 = 0$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

26. Напишите уравнение правосторонней касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0, если **(1)** $f(x) = \big|x^2 - 3x + 2\big|$, $x_0 = 2$, **(2)** $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 0$, **(3)** $f(x) = \arcsin(x^2)$, $x_0 = -1$,
(4) $f(x) = x^2\ln x$, $f(0) = 0$, $x_0 = 0$,

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

27. Напишите уравнение правосторонней касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0, если **(1)** $f(x) = x\big(1 + x\big)^{\frac{1}{x}}$, $f(0) = 0$, $x_0 = 0$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

28. Напишите уравнение правосторонней касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0, если **(1)** $f(x) = x\big(1 - x\big)^{\frac{1}{x}}$, $f(0) = 0$, $x_0 = 0$,

4. Применение производной для исследования корней нелинейных уравнений

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

29. Пусть значение параметра p таково, что уравнение $x^4 - p = \dfrac{28}{x}$ имеет ровно два различных корня. Найдите меньший корень.

30. Пусть значение параметра p таково, что уравнение $x^8 + \dfrac{72}{x} = p$ имеет ровно два различных корня. Найдите больший корень.

31. Пусть значение параметра p таково, что $p > 0$ и уравнение $\operatorname{tg} x = 7\sin x - p$ имеет единственный корень на промежутке $x \in \big(0;\ \dfrac{\pi}{2}\big)$. Найдите этот корень.

32. Пусть значение параметра p таково, что уравнение $e^{7x} = pe^x - 1$ имеет единственный корень. Найдите этот корень.

33. Пусть значение параметра p таково, что $p > 0$ и уравнение $\ln x = px^5$ имеет единственный корень. Найдите этот корень.

34. Пусть значение параметра p таково, что уравнение $e^{11x} + 1 = pe^{3x}$ имеет единственный корень. Найдите этот корень.

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

35. Пусть значение параметра p таково, что уравнение $x^6 - p = \dfrac{48}{x}$ имеет ровно два различных корня. Найдите меньший корень.

36. Пусть значение параметра p таково, что уравнение $x^{10} + \dfrac{250}{x} = p$ имеет ровно два различных корня. Найдите больший корень.

37. Пусть значение параметра p таково, что $p > 0$ и уравнение $\operatorname{ctg} x = 8\cos x - p$ имеет единственный корень на промежутке $x \in \left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$. Найдите этот корень.

38. Пусть значение параметра p таково, что уравнение $3e^{-2x} = p - 2e^{3x}$ имеет единственный корень. Найдите этот корень.

39. Пусть значение параметра p таково, что уравнение $\ln x = 4x^{12} - p$ имеет единственный корень. Найдите этот корень.

40. Пусть значение параметра p таково, что уравнение $3e^{-2x} = p - 2e^{3x}$ имеет единственный корень. Найдите этот корень.

5. Вычисление старших производных

$\boxed{\text{С}}$ **Для обязательного разбора на семинаре.**

41. Найдите $f^{(n)}(x)$, если **(1)** $f(x) = x^m$, $m > n$, $m, n \in \mathcal{N}$, **(2)** $f(x) = e^{2x}$, **(3)** $f(x) = \cos x$, **(4)** $f(x) = \sin 3x$, **(5)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, **(6)** $f(x) = \ln x$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Обязательное задание на дом.**

42. Найдите $f^{(n)}(x)$, если **(1)** $f(x) = x^m$, $m < n$, $m, n \in \mathcal{N}$, **(2)** $f(x) = x^m$, $m = n$, $m, n \in \mathcal{N}$, **(3)** $f(x) = e^{-3x}$, **(4)** $f(x) = \sin x$, **(5)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$,

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

43. Найдите $f^{(n)}(x)$, если **(1)** $f(x) = \sqrt{x}$, **(2)** $f(x) = xe^{-x}$, **(3)** $f(x) = x\cos x$, **(4)** $f(x) = x^2e^x$, **(5)** $f(x) = x^2\cos 2x$. **(6)** $f(x) = x\ln x$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

44. Найдите $f^{(n)}(x)$, если **(1)** $f(x) = \sqrt[3]{x}$, **(2)** $f(x) = xe^x$, **(3)** $f(x) = x\sin x$, **(4)** $f(x) = x^2e^{-x}$, **(5)** $f(x) = x^2\ln x$, **(6)** $f(x) = x^2\sin x$, **(7)** $f(x) = \ln\dfrac{x-1}{x+1}$,

6. Рекуррентные формулы для вычисления старших производных в точке

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

45. Пусть $f(x) = e^{x^3}$. Найдите $f^{(n)}(0)$.

46. Пусть $f(x) = \arcsin x$. Найдите $f^{(n)}(0)$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

47. Пусть $f(x) = e^{x^2}$. Найдите $f^{(n)}(0)$.

48. Пусть $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Найдите $f^{(n)}(0)$.

2008-2009 Курс 1, семестр 1, семинар 06
Тема: Дифференциалы

1. Вычисление первого дифференуиала

$\boxed{\text{С}}$ **Для обязательного разбора на семинаре.**

1. Найдите первую производную и первый дифференциал функции **(1)** $f(x) = 2x - 5$, **(2)** $f(x) = x^2 - 6x + 5$, **(3)** **(4)** $f(x) = x^3$, **(5)** $f(x) = \ln x$, **(6)** $f(x) = xe^{-x}$, **(7)** $f(x) = \sin x$, **(8)** $f(x) = x\cos x$, **(9)** $f(x) = \sin(x^2)$, **(10)** $f(x) = \operatorname{arctg} x$, **(11)** $f(x) = \arcsin\sqrt{x}$, **(12)** $f(x) = \ln(e^x)$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Обязательное задание на дом.**

2. Найдите первую производную и первый дифференциал функции **(1)** $f(x) = 3x - 2$, **(2)** $f(x) = x^3$, **(3)** $f(x) = \sqrt{x}$, **(4)** $f(x) = e^{-x}$, **(5)** $f(x) = \cos x$, **(6)** $f(x) = x\sin x$, **(7)** $f(x) = \cos(x^2)$, **(8)** $f(x) = \arcsin x$, **(9)** $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$, **(10)** $f(x) = e^{\ln x}$.

2. Применение первого дифференуиала

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

3. Найдите **(a)** df, **(b)** $f(x) + df$, **(c)** $f(x + dx)$, сравните значения **(b)** и **(c)** с помощью калькулятора, если **(1)** $f(x) = 2x - 3$, $x = 3$, $dx = 2$, **(2)** $f(x) = x^3$, $x = 9$, $dx = 2$, **(3)** $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 100$, $dx = 21$, **(4)** $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x = 8$, $dx = 19$, **(5)** $f(x) = \sin x$, $x = \dfrac{\pi}{6}$, $dx = \dfrac{\pi}{6}$, **(6)** $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x = 0$, $dx = 1$, **(7)** $f(x) = \arcsin x$, $x = \dfrac{1}{2}$, $dx = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

4. Найдите **(a)** df, **(b)** $f(x) + df$, **(c)** $f(x + dx)$, сравните значения **(b)** и **(c)** с помощью калькулятора, если **(1)** $f(x) = 3x - 2$, $x = 5$, $dx = -3$, **(2)** $f(x) = x^2$, $x = 9$, $dx = 2$, **(3)** $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 4$, $dx = 5$, **(4)** $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x = 1$, $dx = 0{,}331$, **(5)** $f(x) = \cos x$, $x = 0$, $dx = \dfrac{\pi}{6}$, **(6)** $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x = 1$, $dx = \sqrt{3} - 1$, **(7)** $f(x) = \arcsin x$, $x = -\dfrac{1}{2}$, $dx = 1$.

3. Вычисление второго дифференуиала

$\boxed{\text{С}}$ **Для обязательного разбора на семинаре.**

5. Найдите вторую производную и второй дифференциал функции **(1)** $f(x) = 2x - 3$, **(2)** $f(x) = x^2 - 6x + 5$, **(3)** $f(x) = \ln x$, **(4)** $f(x) = xe^{-x}$, **(5)** $f(x) = \sin x$, **(6)** $f(x) = x\sin x$, **(7)** $f(x) = \sin(x^2)$, **(8)** $f(x) = \arcsin x$, **(9)** $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Обязательное задание на дом.**

6. Найдите вторую производную и второй дифференциал функции **(1)** $f(x) = 4x - 3$, **(2)** $f(x) = x^3$, **(3)** $f(x) = \sqrt{x}$, **(4)** $f(x) = e^{-x}$, **(5)** $f(x) = \cos x$, **(6)** $f(x) = x\cos x$, **(7)** $f(x) = \cos(x^2)$, **(8)** $f(x) = \operatorname{arctg} x$, **(9)** $f(x) = \arcsin\sqrt{x}$.

4. Применение второго дифференуиала

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

7. Вычислите **(a)** df, **(b)** d^2f, **(c)** $f(x) + df + \dfrac{1}{2}d^2f$, **(d)** $f(x + dx)$, сравните значения **(c)** и **(d)** с помощью калькулятора, если **(1)** $f(x) = 2x + 3$, $x = 2$, $dx = 3$, **(2)** $f(x) = x^3$, $x = 1$, $dx = 1$, **(3)** $f(x) = \ln x$, $x = 1$, $dx = 1$, **(4)** $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 100$, $dx = 21$, **(5)** $f(x) = \sin x$, $x = 0$, $dx = 1$, **(6)** $f(x) = \arcsin x$, $x = 0$, $dx = \dfrac{1}{2}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

8. Вычислите **(a)** df, **(b)** d^2f, **(c)** $f(x)+df+\dfrac{1}{2}d^2f$, **(d)** $f(x+dx)$, сравните значения **(c)** и **(d)** с помощью калькулятора, если **(1)** $f(x)=x$, $x=2$, $dx=3$, **(2)** $f(x)=x^2$, $x=1$, $dx=9$, **(3)** $f(x)=e^x$, $x=0$, $dx=1$, **(4)** $f(x)=\sqrt{x}$, $x=4$, $dx=5$, **(5)** $f(x)=\cos x$, $x=0$, $dx=1$, **(6)** $f(x)=\operatorname{arctg}x$, $x=0$, $dx=1$.

5. Вычисление производных

$\boxed{\text{С}}$ **Для обязательного разбора на семинаре.**

9. Найдите $f^{(n)}(x)$, если **(1)** $f(x)=x^3$, $n=2$, **(2)** $f(x)=x^3$, $n=3$, **(3)** $f(x)=\arcsin x$, $n=2$, **(4)** $f(x)=x\arcsin x$, $n=2$, $x=0$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Обязательное задание на дом.**

10. Найдите $f^{(n)}(x)$, если **(1)** $f(x)=x^4$, $n=3$, **(2)** $f(x)=x^4$, $n=4$, **(3)** $f(x)=\operatorname{arctg}x$, $n=2$, **(4)** $f(x)=x\operatorname{arctg}x$, $n=2$, $x=0$.

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

11. Найдите $f^{(n)}(x)$, если **(1)** $f(x)=x^m$, $m>n$, $m,n\in\mathcal{N}$, **(2)** $f(x)=e^{2x}$, **(3)** $f(x)=\cos x$, **(4)** $f(x)=\sin 3x$, **(5)** $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, **(6)** $f(x)=\ln x$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

12. Найдите $f^{(n)}(x)$, если **(1)** $f(x)=x^m$, $m<n$, $m,n\in\mathcal{N}$, **(2)** $f(x)=x^m$, $m=n$, $m,n\in\mathcal{N}$, **(3)** $f(x)=e^{-3x}$, **(4)** $f(x)=\sin x$, **(5)** $f(x)=\dfrac{1}{x}$,

6. Вычисление и применение дифференциала n-го порядка

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

13. Найдите d^nf, если **(1)** $f(x)=x^n$, **(2)** $f(x)=\ln x$, **(3)** $f(x)=\sqrt{x}$, **(4)** $f(x)=x^2e^x$, **(5)** $f(x)=\sin x$, $n=4k+2$, **(6)** $f(x)=x\cos x$, $n=4k+3$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

14. Найдите d^nf, если **(1)** $f(x)=x^{n+1}$, **(2)** $f(x)=\dfrac{1}{x}$, **(3)** $f(x)=\sqrt[3]{x}$, **(4)** $f(x)=x\ln x$, **(5)** $f(x)=x^2e^{-x}$, **(6)** $f(x)=\cos x$, $n=4k+3$, **(7)** $f(x)=x\sin x$, $n=4k+3$.

7. Асимптотические формулы (повторение темы)

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

15. Является ли верным утверждение: **(1)** $x+x^2=o(\sqrt[3]{x})$ при $x\to 0$, **(2)** $x+x^2=o(x^3)$ при $x\to+\infty$, **(3)** $x+x^2=o(1)$ при $x\to 0$, **(4)** $x\sin x=o(1)$ при $x\to 0$, **(5)** $x\sin x=o(x)$ при $x\to 0$, **(6)** $x\sin x=x^2+o(x^2)$ при $x\to 0$, **(7)** $x\sin x=x^2-\dfrac{x^4}{6}+o(x^5)$ при $x\to 0$, **(8)** $\dfrac{2}{2-x}=1+o(1)$ при $x\to 0$, **(9)** $\dfrac{1}{1-2x}=1+2x+o(x)$ при $x\to 0$, **(10)** $\dfrac{x}{1-3x}=x+9x^2+o(x^2)$ при $x\to 0$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

16. Является ли верным утверждение: **(1)** $x+x^2=o(1)$ при $x\to 0$, **(2)** $x^2+x^3=o(x)$ при $x\to 0$, **(3)** $x+x^2=o(1)$ при $x\to+\infty$, **(4)** $x\sin\dfrac{1}{x}=o(1)$ при $x\to 0$, **(5)** $\sin(x^2)=o(x)$ при $x\to 0$, **(6)** $x\sin(x^2)=x^3+o(x^3)$ при $x\to 0$, **(7)** $x\sin x=x^2-\dfrac{x^4}{6}+o(x^4)$ при $x\to 0$, **(8)** $\dfrac{4}{1-x}=4+o(1)$ при $x\to 0$, **(9)** $\dfrac{1}{1-x^2}=1+x^2+o(x^3)$ при $x\to 0$, **(10)** $\dfrac{x}{1-4x}=x+4x^2+o(x^2)$ при $x\to 0$,

8. Асимптотические формулы для сложной функции (повторение темы)

С **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

17. Пусть $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$. Найдите такие значения коэффициентов a_k, b_k, c_k, что

(a) $f(g(x)) = \sum\limits_{k=0}^{6} a_k x^k + o(x^6)$, **(b)** $g(f(x)) = \sum\limits_{k=0}^{6} b_k x^k + o(x^6)$, **(c)** $f(x)g(x) = \sum\limits_{k=0}^{6} c_k x^k + o(x^6)$ при $x \to 0$.

18. Пусть $f(x) = x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, $g(x) = x^2$. Найдите такие значения коэффициентов a_k, b_k, c_k, что

(a) $f(g(x)) = \sum\limits_{k=0}^{6} a_k x^k + o(x^6)$, **(b)** $g(f(x)) = \sum\limits_{k=0}^{4} b_k x^k + o(x^4)$, **(c)** $f(x)g(x) = \sum\limits_{k=0}^{5} c_k x^k + o(x^5)$ при $x \to 0$.

Д **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

19. Пусть $f(x) = \operatorname{tg} x$, $g(x) = x^3$. Найдите такие значения коэффициентов a_k, b_k, c_k, что

(a) $f(g(x)) = \sum\limits_{k=0}^{9} a_k x^k + o(x^9)$, **(b)** $g(f(x)) = \sum\limits_{k=0}^{9} b_k x^k + o(x^9)$, **(c)** $f(x)g(x) = \sum\limits_{k=0}^{9} c_k x^k + o(x^9)$ при $x \to 0$.

20. Пусть $f(x) = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$, $f(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4} + o(x^4)$. Найдите такие значения коэффициентов a_k, b_k, c_k, что

(a) $f(g(x)) = \sum\limits_{k=0}^{4} a_k x^k + o(x^4)$, **(b)** $g(f(x)) = \sum\limits_{k=0}^{4} b_k x^k + o(x^4)$. при $x \to 0$.

2008-2009 Курс 1, семестр 1, семинар 07
Тема: Теоремы о непрерывных и дифференцируемых функциях

1. Формула Лагранжа

С Для обязательного разбора на семинаре.

1. Используя формулу конечных приращений, дайте оценку величины $f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)\in\left[(b-a)\inf\limits_{(a;b)}f'(x);\ (b-a)\sup\limits_{(a;b)}f'(x)\right]$, если **(1)** $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $a=99$, $b=101$. **(2)** $f(x)=\sqrt{x}$, $a=16$, $b=25$. **(3)** $f(x)=\sin x$, $a=\dfrac{\pi}{6}$, $b=\dfrac{\pi}{3}$. **(4)** $f(x)=\arcsin x$, $a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Д Обязательное задание на дом.

2. Используя формулу конечных приращений, дайте оценку величины $f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)\in\left[(b-a)\inf\limits_{(a;b)}f'(x);\ (b-a)\sup\limits_{(a;b)}f'(x)\right]$, если **(1)** $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $a=\dfrac{10}{11}$, $b=\dfrac{10}{9}$. **(2)** $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $a=8$, $b=27$. **(3)** $f(x)=\cos x$, $a=\dfrac{\pi}{6}$, $b=\dfrac{\pi}{3}$. **(4)** $f(x)=\operatorname{arctg} x$, $a=9$, $b=10$.

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

3. Используя формулу конечных приращений, оцените $f(b)-f(a)$, если $f(x)=3x-x^3,\ a=-1,\ b=1$.

4. Используя формулу конечных приращений, оцените $f(b)-f(a)$, если $f(x)=\dfrac{e^2}{e^2-1}\ln x,\ a=e^3,\ b=e^5$.

5. Используя формулу конечных приращений, оцените $f(b)-f(a)$, если $f(x)=\ln(1+x^2),\ a=\dfrac{3}{4},\ b=\dfrac{3}{2}$.

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

6. Используя формулу конечных приращений, оцените $f(b)-f(a)$, если $f(x)=5x^3-3x^5,\ a=-1,\ b=1$.

7. Используя формулу конечных приращений, оцените $f(b)-f(a)$, если $f(x)=24\arcsin x,\ a=\dfrac{3}{5},\ b=\dfrac{4}{5}$.

8. Используя формулу конечных приращений, оцените $f(b)-f(a)$, если $f(x)=3x^2-x^3,\ a=\dfrac{1}{2},\ b=\dfrac{3}{2}$.

2. Формула Коши

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

9. Используя обобщенную формулу конечных приращений (Коши), $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\in\left[\inf\limits_{(a;b)}\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)};\ \sup\limits_{(a;b)}\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right]$, дайте оценку величины **(1)** $\dfrac{b^3-a^3}{b^2-a^2}$, $a=5$, $b=6$. **(2)** $\dfrac{\operatorname{arctg} b-\operatorname{arctg} a}{\ln(1+b^2)-\ln(1+a^2)}$, $a=10$, $b=11$. **(3)** $\dfrac{\ln b-\ln a}{b^2-a^2}$, $a=101$, $b=99$.

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

10. Используя обобщенную формулу конечных приращений (Коши), $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\in\left[\inf\limits_{(a;b)}\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)};\ \sup\limits_{(a;b)}\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right]$, дайте оценку величины **(1)** $\dfrac{b^4-a^4}{b^2-a^2}$, $a=5$, $b=6$. **(2)** $\dfrac{\ln b-\ln a}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$, $a=9$, $b=16$. **(3)** $\dfrac{\ln b-\ln a}{\operatorname{arctg} b-\operatorname{arctg} a}$, $a=\dfrac{3}{5}$, $b=\dfrac{4}{5}$.

3. Асимптотические формулы (повторение темы)

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

11. Является ли верным утверждение: **(1)** $(\ln x)^{-1} = o(x)$ при $x \to 0$, **(2)** $x^{-1} = o((\ln x)^{-1})$ при $x \to +\infty$, **(3)** $\ln(1-x) = -x + o(1)$ при $x \to 0$, **(4)** $\ln(1-x) = -x + o(x^2)$ при $x \to 0$, **(5)** $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ при $x \to 0$, **(6)** $\ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + o(x)$ при $x \to 0$, **(7)** $\ln(1+x) = x + o(x^2)$ при $x \to +\infty$,

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

12. Является ли верным утверждение: **(1)** $(\ln x)^{-1} = o(x^{-1})$ при $x \to +\infty$, **(2)** $\frac{1}{x \ln x} = o(\frac{1}{x})$ при $x \to +\infty$, **(3)** $\ln(1-x) = -x + o(x)$ при $x \to 0$, **(4)** $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ при $x \to 0$, **(5)** $\ln(1+x) = 2x + 3x^2 + o(1)$ при $x \to 0$, **(6)** $\frac{\ln(1+x)}{1+x} = o(1)$ при $x \to +\infty$,

4. Применение асимптотических формул для вычисления пределов

Соглашение об асимптотических формулах. При решении задач этого и всех последующих разделов можно использовать формулы

(1) $\sin x = x + o(x)$, $\sin x = x + o(x^2)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$,
$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$,

(2) $\arcsin x = x + o(x^2)$, $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^6)$,

(3) $\cos x = 1 + o(x)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$,

(4) $\operatorname{tg} x = x + o(x^2)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$,

(5) $\operatorname{arctg} x = x + o(x^2)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$,

(6) $\frac{1}{1-x} = 1 + o(1)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$,
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$,

(7) $\frac{1}{1+x} = 1 + o(1)$, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$,
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$,

(8) $\sqrt{1+x} = 1 + o(1)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$,

(9) $\sqrt{1-x} = 1 + o(1)$, $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$, $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$,

(10) $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} + o(x)$, $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{2x^2}{27} + o(x^2)$,

(11) $\sqrt[3]{1-x} = 1 - \frac{x}{3} + o(x)$, $\sqrt[3]{1-x} = 1 - \frac{x}{3} - \frac{2x^2}{27} + o(x^2)$,

(12) $\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} + o(x)$, $\sqrt[n]{1-x} = 1 - \frac{x}{n} + o(x)$, $\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} - \frac{(n-1)x^2}{2n^2} + o(x^2)$,
$\sqrt[n]{1-x} = 1 - \frac{x}{n} - \frac{(n-1)x^2}{2n^2} + o(x^2)$,

(13) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, $-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$,

(14) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$, $e^{-x}=1-x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$,

(15) $(1+x)^p=1+px+o(x)$, $(1+x)^p=1+px+\dfrac{p(p-1)}{2}x^2+o(x^2)$,

$(1+x)^p=1+px+\dfrac{p(p-1)}{2}x^2+\dfrac{p(p-1)(p-1)}{6}x^3+o(x^3)$ при $x\to 0$.

Эти формулы называются "асимптотическими формулами". Каждая из этих формул является также "формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано". Можно использовать формулы первого и второго замечательных пределов, $\dfrac{\sin x}{x}=1+o(1)$ при $x\to 0$, $(1+x)^{\frac{1}{x}}=e+o(1)$ при $x\to 0$, $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e+o(1)$ при $x\to+\infty$, а также формулы $(1+x)^{\frac{1}{x}}=1+o(1)$ при $x\to+\infty$, $x^{\frac{1}{x}}=1+o(1)$ при $x\to+\infty$. Доказательство каждой из этих формул будет дано в соответствующем месте нашего курса.

$\boxed{\text{С}}$ **Для обязательного разбора на семинаре.**

13. Найдите, используя асимптотические формулы, **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2\sin 3x)}{\sin(3\sin 2x)}$;
(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$, **(4)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}$, **(5)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-\sin x}{x}$, **(6)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} x}{\sin 3x+\sin 2x}$.

14. Найдите, используя асимптотические формулы, **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-2\cos 2x+\cos x}{x^2}$,
(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 5x-5\sin 3x}{x^3}$, **(3)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 5x+5\sin 3x-\sin 30x}{x^3}$, **(4)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$,
(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x+\sin x-\sin 2x}{x^3}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Обязательное задание на дом.**

15. Найдите, используя асимптотические формулы, **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 5x}{x}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 3x}{x^2}$, **(3)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 6x}{\operatorname{tg} 3x}$,
(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(12x^2)}{\operatorname{tg}(3x^2)}$, **(5)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin 2x}{x}$, **(6)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} 3x}$,

16. Найдите, используя асимптотические формулы, **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x+\cos 4x-\cos x-\cos 3x}{x^2}$,
(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 2x+2\sin 3x-12x\cos x}{x^3}$, **(3)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} x-\sin x-\sin 2x}{x^3}$,
(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$.

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

17. Используя асимптотические формулы, найдите $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+7x^2}-\sqrt[3]{x^3+3x^2}\right)$.

18. Найдите, используя асимптотические формулы, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(3x)-3\arcsin x}{\operatorname{tg}(2x)-2\operatorname{tg} x}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

19. Используя асимптотические формулы, найдите $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)$

20. Найдите, используя асимптотические формулы, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(3x)-3\operatorname{arctg} x}{\sin(2x)-2\sin x}$.

21. Найдите, используя асимптотические формулы, **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$,
(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1+2x}}{x}$, **(3)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$.

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

22. Найдите, используя асимптотические формулы, **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\arcsin x-2x}{x^5}$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

23. Найдите, используя асимптотические формулы, **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x+\operatorname{arctg} x-2x}{x^5}$.

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

24. Найдите, используя асимптотические формулы, **(1)** $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{e^x-x^e}{x-e}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{e^{2x}-x^{2e}}{(x-e)^2}$,
(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{e^2x}-(ex)^{e^2}}{(x-1)^2}$. **(4)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$, **(5)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\cos x}-e}{x^2}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

25. Найдите, используя асимптотические формулы, **(1)** $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{e-x}{e^x-x^e}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{ex}-(ex)^e}{(x-1)^2}$,
(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$, **(4)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x^3}$, **(5)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1-x}{x^2}$,

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

26. Используя асимптотические формулы, представьте функцию $f(x)$ в виде
$f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}C_kx^k+o(x^n)$ для $f(x)=\sin(\sin x)$ и $n=6$.

27. Используя асимптотические формулы, представьте функцию $f(x)$ в виде
$f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}C_kx^k+o(x^n)$ для $f(x)=\sin(2\operatorname{tg} x)$ и $n=6$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

28. Используя асимптотические формулы, представьте функцию $f(x)$ в виде
$f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}C_kx^k+o(x^n)$ для $f(x)=\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)$ и $n=6$.

29. Используя асимптотические формулы, представьте функцию $f(x)$ в виде
$f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}C_kx^k+o(x^n)$ для $f(x)=\operatorname{tg}(2\sin x)$ и $n=6$.