

1. Решение неравенств, связанных с понятием предела функции, 1

**С** Для обязательного разбора на семинаре.

1. Укажите все значения параметра  $\delta$ , при которых  $\forall x : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon$ . Сделайте это для следующих функции и параметров: (1)  $f(x) = 2x$ ,  $a = 3$ ,  $b = f(a) = 6$ ,  $\varepsilon = 1$ .

(2)  $f(x) = 2x$ ,  $a = 3$ ,  $b = f(a) = 6$ ,  $\varepsilon = 0,1$ . (3)  $f(x) = 2x$ ,  $a = 3$ ,  $b = f(a) = 6$ ,  $\varepsilon = 10^{-123}$ .

(4)  $f(x) = \frac{3x+2}{2x+3}$ ,  $a = 1$ ,  $b = f(a) = 1$ ,  $\varepsilon = 0,1$ . (5)  $f(x) = \frac{6}{x}$ ,  $a = 2$ ,  $b = f(a) = 3$ ,  $\varepsilon = 1$ .

(6)  $f(x) = \frac{6}{x}$ ,  $a = 2$ ,  $b = f(a) = 3$ ,  $\varepsilon = 0,1$ . (7)  $f(x) = x^2$ ,  $a = 2$ ,  $b = f(a) = 4$ ,  $\varepsilon = 1$ .

(8)  $f(x) = 3^x$ ,  $a = 4$ ,  $b = f(a) = 81$ ,  $\varepsilon = 1$ . (9)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $a = 0$ ,  $b = f(a) = 0$ ,  $\varepsilon = 1$ .

(10)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $a = 25$ ,  $b = f(a) = 5$ ,  $\varepsilon = 1$ . (11)  $f(x) = \log_3 x$ ,  $a = 81$ ,  $b = f(a) = 4$ ,  $\varepsilon = 1$ .

(12)  $f(x) = \sin x$ ,  $a = 0$ ,  $b = f(a) = 0$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ . (13)  $f(x) = \sin x$ ,  $a = \frac{\pi}{6}$ ,  $b = f(a) = \frac{1}{2}$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ .

(14)  $f(x) = \sin x$ ,  $a = \frac{\pi}{6}$ ,  $b = f(a) = \frac{1}{2}$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{10}$ . (15)  $f(x) = \sin x$ ,  $a = \frac{\pi}{2}$ ,  $b = f(a) = 1$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ .

(16)  $f(x) = \arcsin x$ ,  $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $b = f(a) = \frac{\pi}{3}$ ,  $\varepsilon = \frac{\pi}{6}$ . (17)  $f(x) = \arcsin x$ ,  $a = 0$ ,  $b = f(a) = 0$ ,  $\varepsilon = \frac{\pi}{6}$ .

**Д** Обязательное задание на дом.

2. Укажите все значения параметра  $\delta$ , при которых  $\forall x : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon$ . Сделайте это для следующих функции и параметров: (1)  $f(x) = \frac{x}{6}$ ,  $a = 18$ ,  $b = f(a) = 3$ ,  $\varepsilon = 1$ .

(2)  $f(x) = \frac{x}{6}$ ,  $a = 18$ ,  $b = f(a) = 3$ ,  $\varepsilon = 0,1$ . (3)  $f(x) = \frac{x}{6}$ ,  $a = 18$ ,  $b = f(a) = 3$ ,  $\varepsilon = 10^{-123}$ .

(4)  $f(x) = \frac{6x+1}{x+1}$ ,  $a = 4$ ,  $b = f(a) = 5$ ,  $\varepsilon = 0,1$ . (5)  $f(x) = \frac{36}{x^2}$ ,  $a = 2$ ,  $b = f(a) = 9$ ,  $\varepsilon = 1$ .

(6)  $f(x) = \frac{36}{x^2}$ ,  $a = 2$ ,  $b = f(a) = 9$ ,  $\varepsilon = 0,1$ . (7)  $f(x) = x^3$ ,  $a = 3$ ,  $b = f(a) = 27$ ,  $\varepsilon = 1$ .

(8)  $f(x) = 2^x$ ,  $a = 5$ ,  $b = f(a) = 32$ ,  $\varepsilon = 1$ . (9)  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $a = 0$ ,  $b = f(a) = 0$ ,  $\varepsilon = 1$ .

(10)  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $a = 27$ ,  $b = f(a) = 3$ ,  $\varepsilon = 1$ . (11)  $f(x) = \log_2 x$ ,  $a = 32$ ,  $b = f(a) = 5$ ,  $\varepsilon = 1$ .

(12)  $f(x) = \cos x$ ,  $a = 0$ ,  $b = f(a) = 1$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ . (13)  $f(x) = \cos x$ ,  $a = \frac{\pi}{3}$ ,  $b = f(a) = \frac{1}{2}$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ .

(14)  $f(x) = \cos x$ ,  $a = \frac{\pi}{2}$ ,  $b = f(a) = 0$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ . (15)  $f(x) = \arctg x$ ,  $a = \sqrt{3}$ ,  $b = f(a) = \frac{\pi}{3}$ ,  $\varepsilon = \frac{\pi}{6}$ .

(16)  $f(x) = \arctg x$ ,  $a = 0$ ,  $b = f(a) = 0$ ,  $\varepsilon = \frac{\pi}{6}$ .

2. Решение неравенств, связанных с понятием предела функции, 2

**С** Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

3. Укажите все значения параметра  $\delta$ , при которых  $\forall x : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon$ . Сделайте это для следующих функции и параметров: (1)  $f(x) = x$ ,  $a = 3$ ,  $b = 4$ ,  $\varepsilon = 2$ . (2)  $f(x) = x$ ,  $a = 3$ ,  $b = 4$ ,  $\varepsilon = 0,5$ .

**Д** Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

4. Укажите все значения параметра  $\delta$ , при которых  $\forall x : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon$ . Сделайте это для следующих функции и параметров: (1)  $f(x) = 2^x$ ,  $a = 3$ ,  $b = 9$ ,  $\varepsilon = 2$ . (2)  $f(x) = 2^x$ ,  $a = 3$ ,  $b = 9$ ,  $\varepsilon = 0,5$ .

3. Решение неравенств, связанных с понятием предела последовательности

**С** Для обязательного разбора на семинаре.

5. Укажите наименьшее значение  $N$ : (1)  $\forall n \geq N \implies \left| \frac{1}{n} \right| < 10^{-4}$ . (2)  $\forall n \geq N \implies \left| \frac{1}{n} \right| < 10^{-14}$ .

(3)  $\forall n \geq N \implies \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \right| < 10^{-2}$ . (4)  $\forall n \geq N \implies \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \right| < 10^{-4}$ . (5)  $\forall n \geq N \implies \left| \frac{n+1}{n-1} - 1 \right| < 10^{-3}$ .

**Д** Обязательное задание на дом.

6. Укажите наименьшее значение  $N$ : (1)  $\forall n \geq N \implies \left| \frac{1}{n^2} \right| < 10^{-4}$ . (2)  $\forall n \geq N \implies \left| \frac{1}{n^2} \right| < 10^{-14}$ .

(3)  $\forall n \geq N \implies \left| \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \right| < 10^{-2}$ . (4)  $\forall n \geq N \implies \left| \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \right| < 10^{-4}$ . (5)  $\forall n \geq N \implies \left| \frac{4n+3}{2n-1} - 2 \right| < 10^{-3}$ .

**С** Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

7. Укажите наименьшее значение  $N$ :  $\forall n \geq N \implies \left| \frac{40n^2+7}{8n^2+3} - 5 \right| < 10^{-4}$ .

**Д** Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

8. Укажите наименьшее значение  $N$ :  $\forall n \geq N \implies \left| \frac{42n^2+58}{7n^2+5} - 6 \right| < 10^{-4}$ .

**С** Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

9. Укажите какое нибудь значение  $N$ : (1)  $\forall n \geq N \implies 0 < \frac{1}{2^n} < 10^{-2}$ . (2)  $\forall n \geq N \implies 0 < \frac{1}{n!} < 10^{-4}$ .

**Д** Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

10. Укажите какое нибудь значение  $N$ : (1)  $\forall n \geq N \implies 0 < \frac{1}{3^n} < 10^{-2}$ . (2)  $\forall n \geq N \implies 0 < \frac{1}{n^n} < 10^{-10}$ .

**С** Сложные задачи для разбора на семинаре.

11. Укажите какое нибудь значение  $N$  : (1)  $\forall n \geq N \implies 0 < \frac{n^3}{3^n} < 10^{-4}$ . (2)  $\forall n \geq N \implies 0 < \frac{3^n}{n!} < 10^{-4}$ .  
 (3)  $\forall n \geq N \implies 0 < \frac{n!}{n^n} < 10^{-4}$ .

**Д** Сложные задачи для самостоятельного решения.

12. Укажите какое нибудь значение  $N$  : (1)  $\forall n \geq N \implies 0 < \frac{n^2}{2^n} < 10^{-4}$ . (2)  $\forall n \geq N \implies 0 < \frac{2^n}{n!} < 10^{-4}$ .  
 (3)  $\forall n \geq N \implies 0 < \frac{n!}{n^n} < 10^{-2}$ .

#### 4. Решение неравенств с помощью формулы бинома Ньютона

**С** Сложные задачи для разбора на семинаре.

13. Укажите какое нибудь значение  $N$  :  $\forall n \geq N \implies 0 < \sqrt[n]{n} - 1 < 10^{-3}$ .

**Д** Сложные задачи для самостоятельного решения.

14. Укажите какое нибудь значение  $N$  :  $\forall n \geq N \implies 0 < \sqrt[n]{n} - 1 < 10^{-5}$ .

#### 5. Решение неравенств, связанных с понятием ограниченной функции

**С** Для обязательного разбора на семинаре.

15. Укажите все значения параметра  $A$ , при которых  $\forall x \in X \implies |f(x)| \leq A$ .

- (1)  $f(x) = x$ ,  $X = [-11; 11]$ . (2)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $X = [-144; 144]$ . (3)  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $X = (-\infty; +\infty)$ .  
 (4)  $f(x) = \sin x$ ,  $X = (-\infty; +\infty)$ . (5)  $f(x) = \arctg x$ ,  $X = (-\infty; +\infty)$ .

**Д** Обязательное задание на дом.

16. Укажите все значения параметра  $A$ , при которых  $\forall x \in X \implies |f(x)| \leq A$ .

- (1)  $f(x) = 3x$ ,  $X = [-11; 11]$ . (2)  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $X = [-27; 27]$ . (3)  $f(x) = \cos x$ ,  $X = (-\infty; +\infty)$ .  
 (4)  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ ,  $X = (-\infty; +\infty)$ . (5)  $f(x) = \pi + \arctg x$ ,  $X = (-\infty; +\infty)$ .

#### 6. Решение неравенств, связанных с понятием неограниченной функции

**С** Для обязательного разбора на семинаре.

17. Докажите, что  $\forall A \exists x \in X : |f(x)| > A$ .

- (1)  $f(x) = x$ ,  $X = (-\infty; +\infty)$ .  
 (2)  $f(x) = x^2$ ,  $X = (-\infty; +\infty)$ . (3)  $f(x) = \frac{x}{1000000}$ ,  $X = (-\infty; +\infty)$ . (4)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $X = (-\infty; +\infty)$ .  
 (5)  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ,  $X = (-\infty; +\infty)$ . (6)  $f(x) = \log_2 x$ ,  $X = (0; +\infty)$ . (7)  $f(x) = 2^x$ ,  $X = (-\infty; +\infty)$ .

**Д** Обязательное задание на дом.

18. Докажите, что  $\forall A \exists x \in X : |f(x)| > A$ .

- (1)  $f(x) = 2x$ ,  $X = (-\infty; +\infty)$ .  
 (2)  $f(x) = x^3$ ,  $X = (-\infty; +\infty)$ . (3)  $f(x) = \frac{x}{1234567890}$ ,  $X = (-\infty; +\infty)$ . (4)  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $X = (-\infty; +\infty)$ .  
 (5)  $f(x) = \frac{2x+3}{3x+2}$ ,  $X = (-\infty; +\infty)$ . (6)  $f(x) = \log_3 x$ ,  $X = (0; +\infty)$ . (7)  $f(x) = 3^{-x}$ ,  $X = (-\infty; +\infty)$ .

#### 7. Графики элементарных функций

**С** Для обязательного разбора на семинаре.

19. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума. (1)  $f(x) = x^2 - 5x + 6$ , (2)  $f(x) = 3x^2 - 2x^3$ , (3)  $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ , (4)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ ,  
 (5)  $f(x) = x^2(5-x)^3$ ,

**Д** Обязательное задание на дом.

20. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума. (1)  $f(x) = x^2 - 6x + 5$ , (2)  $f(x) = 5x^3 - 3x^5$ , (3)  $f(x) = (x^2 - 6x + 5)^2$ , (4)  $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$ ,  
 (5)  $f(x) = x(3-x)^2$ ,

**С** Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

21. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума. (1)  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ , (2)  $f(x) = x\sqrt{3-x}$ , (3)  $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ ,

**Д** Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

22. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума. (1)  $f(x) = \frac{2x}{4+x^2}$ , (2)  $f(x) = x\sqrt[3]{4-x}$ , (3)  $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ ,

**С** Сложные задачи для разбора на семинаре.

23. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума. (1)  $f(x) = xe^{-x}$ , (2)  $f(x) = x^2 \ln x$ , (3)  $f(x) = 2e^{3x} - 3e^{2x}$ ,

**Д** Сложные задачи для самостоятельного решения.

24. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума. (1)  $f(x) = x^2e^{-x}$ , (2)  $f(x) = x \ln x$ , (3)  $f(x) = 3e^{4x} - 4e^{3x}$ ,