

fbi 2007-2008 Домашнее задание семинара 1

Пределы рациональных и иррациональных функций

1. Постройте отрицание: $\exists \varepsilon > 0 : \forall N \exists n \geq N, \exists m \geq N : |x_n - x_m| \geq \varepsilon$.

2. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – функции, определенные в окрестности точки a . Укажите все верные утверждения (все пределы при $x \rightarrow a$).

(а) Если $f(x)$ имеет предел и $g(x)$ имеет предел, то $f(x) + g(x)$ имеет предел

(б) Если $f(x)$ не имеет предела и $g(x)$ имеет предел, то $f(x) + g(x)$ не имеет предела

(с) Если $f(x)$ не имеет предела и $g(x)$ не имеет предела, то $f(x) + g(x)$ не имеет предела

(д) Если $f(x) + g(x)$ имеет предел и $f(x)$ не имеет предела, то $g(x)$ не имеет предела

(е) Если $f(x) + g(x)$ не имеет предела и $f(x)$ имеет предел, то $g(x)$ не имеет предела

(ф) Если $f(x) + g(x)$ не имеет предела и $f(x)$ не имеет предела, то $g(x)$ может иметь и может не иметь предел

3. Укажите наибольшее значение параметра δ , при котором

$\forall x : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \epsilon$. Сделайте это для следующих функции и параметров:
 $f(x) = 2x + 1$, $a = 3$, $b = 7$, $\epsilon = 0,01$. Ответ должен быть обоснован.

4. Укажите наибольшее значение числа δ , при котором $\forall x : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \epsilon$ для следующих функции и параметров: $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = 27$, $b = 3$, $\epsilon = 10^{-1}$. Представьте полученное значение в виде десятичной дроби, не пользуясь калькулятором.

5. Укажите наибольшее значение параметра δ , при котором

$\forall x : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \epsilon$. Сделайте это для следующих функции и параметров:
 $f(x) = 3^x$, $a = 4$, $b = f(a)$, $\epsilon = 1$.

6. Укажите бесконечно малые и бесконечно большие функции.

(1) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \rightarrow 0$. (2) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$. (3) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \rightarrow +\infty$. (4) $f(x) = \sin x$, $x \rightarrow 0$.

(5) $f(x) = x \sin x$, $x \rightarrow 0$. (6) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x \rightarrow 0$. (7) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x \rightarrow +\infty$.

(8) $f(x) = \ln x$, $x \rightarrow 1$. (9) $f(x) = \ln x$, $x \rightarrow +\infty$. (10) $f(x) = \ln x$, $x \rightarrow +0$.

(11) $f(x) = x \ln x$, $x \rightarrow +\infty$. (12) $f(x) = x^{-1}$, $x \rightarrow +\infty$. (13) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \rightarrow +\infty$.

(14) $f(x) = \frac{x}{\operatorname{arctg} x}$, $x \rightarrow +\infty$. (15) $f(x) = x^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$, $x \rightarrow +\infty$. (16) $f(x) = x^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$, $x \rightarrow +0$.

(17) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \rightarrow +\infty$. (18) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 5}$, $x \rightarrow +\infty$. (19) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 6x + 5}$, $x \rightarrow +\infty$.

(20) $f(x) = \frac{x^3 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 5}$, $x \rightarrow +\infty$.

7. Вычислите (1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}$, (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$, (3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$.

8. Вычислите (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}$, (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$, (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$.

9. Вычислите (1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$, (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1}$, (3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$, (4) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 4}{x - 3}$,

(5) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 4}{\sqrt{x+6} - 3}$, (6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{\sqrt[3]{x+8} - 2}$,

10. Вычислите (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{x}$, (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$,

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - x})$, (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 2} - \sqrt{x^2 - x - 2})$,

(5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 2})$, (6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(\sqrt[3]{x^3 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - 2})$, (7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt{9+x}}{x}$,

(8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2})$.

11. Пусть $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Найдите односторонние пределы $\lim_{x \rightarrow -0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$ Существует ли $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$? Ответ обоснуйте.

12. Пусть $f(x) = \frac{|x|}{x^2 - x}$. Найдите односторонние пределы $\lim_{x \rightarrow -0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$ Существует ли $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$? Ответ обоснуйте.