А.А.Быков, boombook@yandex.ru, boombook.narod.ru

2008-2009 Курс 1, семестр 1, семинар 02

Тема: Бесконечно малые функции

При решении задач этого раздела можно использовать формулы $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$, $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$, $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$, $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} + o(x)$, $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{2x^2}{27} + o(x^2)$, $\sqrt[3]{1-x} = 1 - \frac{x}{3} + o(x)$, $\sqrt[3]{1-x} = 1 - \frac{x}{3} - \frac{2x^2}{27} + o(x^2)$, $\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} + o(x)$, $\sqrt[n]{1-x} = 1 - \frac{x}{n} + o(x)$, $\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} - \frac{(n-1)x^2}{2n^2} + o(x^2)$, $\sqrt[n]{1-x} = 1 - \frac{x}{n} - \frac{(n-1)x^2}{2n^2} + o(x^2)$, $\ln(1+x) = x + o(x)$, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, $-\ln(1-x) = x + o(x)$, $-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, $e^x = 1 + o(1)$, $e^x = 1 + x + o(x)$, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ при $x \to 0$. Эти формулы называются "асимптотическими формулами". Каждая из этих формул является также "формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано". Можно использовать формулы первого и второго замечательных пределов, $\frac{\sin x}{x} = 1 + o(1)$ при $x \to 0$, $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e + o(1)$ при $x \to 0$, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e + o(1)$ при $x \to +\infty$, а также формулы $(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1 + o(1)$ при $x \to +\infty$, $x^{\frac{1}{x}} = 1 + o(1)$ при $x \to +\infty$. Доказательство каждой из этих формул будет дано в соответствующем месте нашего курса.

1. Понятие бесконечно малой функции более высокого порядка малости в точке

С Для обязательного разбора на семинаре.

1. Пусть $f(x) = o(x)$ при $x \to 0$. Укажите все верные утверждения: **(a)** $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$. **(b)** $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. **(c)** $\exists \lim\limits_{x\to 0} xf(x) = 0$. **(d)** $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)/x = 0$. **(e)** $\exists A,\ \exists \delta > 0 : \forall x :\ |x| < \delta \Longrightarrow |f(x)| \leqslant A$. **(f)** $\exists A,\ \exists \delta > 0 : \forall x :\ |x| < \delta \Longrightarrow |f(x)| \leqslant A|x|$.

Ответ: (d) – **checked**

Д Обязательное задание на дом.

2. Пусть $f(x) = o(1)$ при $x \to 0$. Укажите все верные утверждения: **(a)** $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$. **(b)** $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. **(c)** $\exists \lim\limits_{x\to 0} xf(x) = 0$. **(d)** $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)/x = 0$. **(e)** $\exists A,\ \exists \delta > 0 : \forall x :\ |x| < \delta \Longrightarrow |f(x)| \leqslant A$. **(f)** $\exists A,\ \exists \delta > 0 : \forall x :\ |x| < \delta \Longrightarrow |f(x)| \leqslant A|x|$.

Ответ: (b) – **checked**

2. Сравнение бесконечно малых функций в точке

С Для обязательного разбора на семинаре.

3. Является ли верным утверждение: **(1)** $x = o(1)$ при $x \to 0$, **(2)** $x = o(x^2)$ при $x \to 0$, **(3)** $x^3 = o(x^2)$ при $x \to 0$, **(4)** $(1+x)^2 = 1 + o(1)$ при $x \to 0$, **(5)** $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 + o(x^2)$ при $x \to 0$, **(6)** $\frac{1}{1+x} = 1 + o(1)$ при $x \to 0$, **(7)** $\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$ при $x \to 0$, **(8)** $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$ при $x \to 0$,

Д Обязательное задание на дом.

4. Является ли верным утверждение: **(1)** $x^2 = o(1)$ при $x \to 0$, **(2)** $x^2 = o(x^3)$ при $x \to 0$, **(3)** $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$, **(4)** $(1+x)^2 = 1 + 2x + o(x)$ при $x \to 0$, **(5)** $(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + o(x^2)$ при $x \to 0$, **(6)** $\frac{1}{1-x} = 1 + o(1)$ при $x \to 0$, **(7)** $\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$ при $x \to 0$, **(8)** $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$.

3. Сравнение бесконечно малых функций в бесконечно удаленной точке

С Для обязательного разбора на семинаре.

5. Является ли верным утверждение: **(1)** $x^{-1} = o(1)$ при $x \to +\infty$, **(2)** $x^{-2} = o(x^{-1})$ при $x \to +\infty$.

Д Обязательное задание на дом.

6. Является ли верным утверждение: **(1)** $x^{-2} = o(1)$ при $x \to +\infty$, **(2)** $x^{-3} = o(x^{-2})$ при $x \to +\infty$.

4. Асимптотические формулы для тригонометрических функций

С Для обязательного разбора на семинаре.

7. Является ли верным утверждение: **(1)** $\operatorname{tg} x = o(1)$ при $x \to 0$, **(2)** $\sin x = x + o(x)$ при $x \to 0$, **(3)** $\operatorname{tg} x = x + o(x^2)$ при $x \to 0$, **(4)** $\sin x = x + o(x)$ при $x \to +\infty$, **(5)** $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ при $x \to 0$, **(6)** $\cos x = 1 + o(x)$ при $x \to 0$, **(7)** $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ при $x \to 0$.

Д Обязательное задание на дом.

8. Является ли верным утверждение: **(1)** $\sin x = o(1)$ при $x \to 0$, **(2)** $\operatorname{tg} x = x + o(x)$ при $x \to 0$, **(3)** $\sin x = x + o(x^2)$ при $x \to 0$, **(4)** $\operatorname{tg} x = x + o(x)$ при $x \to +\infty$, **(5)** $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ при $x \to +\infty$, **(6)** $\cos x = 1 + o(1)$ при $x \to 0$, **(7)** $\cos x = 1 + o(x^2)$ при $x \to 0$, **(8)** $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ при $x \to 0$.

5. Асимптотические формулы для иррациональных функций

С **Для обязательного разбора на семинаре.**

9. Является ли верным утверждение: **(1)** $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$ при $x \to 0$, **(2)** $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(1)$ при $x \to 0$, **(3)** $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} + o(x)$ при $x \to 0$, **(4)** $\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} = 2 + o(x)$ при $x \to 0$, **(5)** $\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x} = \frac{2x}{3} + o(x)$ при $x \to 0$, **(6)** $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ при $x \to 0$.

Д **Обязательное задание на дом.**

10. Является ли верным утверждение: **(1)** $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(1)$ при $x \to +\infty$, **(2)** $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} + o(x)$ при $x \to +\infty$, **(3)** $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x} = o(1)$ при $x \to +\infty$, **(4)** $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x} = 1 + o(1)$ при $x \to +\infty$, **(5)** $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = o(1)$ при $x \to +\infty$, **(6)** $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = x^{-1} + o(x^{-1})$ при $x \to +\infty$.

6. Доказательство асимптотических формул

С **Для обязательного разбора на семинаре.**

11. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора, что $\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$ при $x \to 0$.

12. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора, что $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$ при $x \to 0$.

Д **Обязательное задание на дом.**

13. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора, что $\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$ при $x \to 0$.

14. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора, что $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$ при $x \to 0$.

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

15. Не пользуясь формулой Тейлора докажите, что $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$ при $x \to 0$.

♦ $\sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right) = \frac{x^3/16 + \ldots}{2 + \ldots}$.

Д **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

16. Не пользуясь формулой Тейлора докажите, что $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$ при $x \to 0$.

♦ $\sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right) = \frac{x^3/16 + \ldots}{2 + \ldots}$.

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

17. Не пользуясь формулой Тейлора докажите, что $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$.

♦ $\sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right) = \frac{x^3/16 + \ldots}{2 + \ldots}$.

Д **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

18. Не пользуясь формулой Тейлора докажите, что $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x)$ при $x \to 0$.

♦ $\sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right) = \frac{x^3/16 + \ldots}{2 + \ldots}$.

7. Применение асимптотических формул для исследования сложной функции

С **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

19. Используя формулы $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$, найдите такие A, b, C, D, что является верным утверждение
(1) $\sqrt{\cos x} = A + Bx + Cx^2 + o(x^3)$ при $x \to 0$, **(2)** $\frac{1}{1+\sin x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$,
(3) $\sin(\operatorname{tg} 2x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$,

С **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

20. Используя формулы $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$, найдите такие A, b, C, D, что является верным утверждение
(1) $\frac{1}{\cos x} = A + Bx + Cx^2 + o(x^3)$ при $x \to 0$, **(2)** $\frac{1}{1+\operatorname{tg} x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$,
(3) $\operatorname{tg}(\sin 2x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$,