

fbi 2007-2008 Домашнее задание семинара 2

Пределы тригонометрических функций

1. Используя тригонометрические формулы, найдите (1) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$, (2) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}$,
 (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) - 2 \sin a + \sin(a-x)}{x^2}$, (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+x) - 2 \cos a + \cos(a-x)}{x^2}$, (5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x^3}$,
 (6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{x^2}$.

2. Используя формулу первого замечательного предела, найдите (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$,
 (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{3x}$, (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$, (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}$, (5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin x}{x}$, (6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x}{x}$,
 (7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - 2 \sin 2x + \sin x}{x^3}$, (8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - 2 \cos 2x + \cos x}{x^2}$, (9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

3. Используя формулы $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$,
 найдите (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x^3}$, (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - 3 \sin x}{x^3}$, (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 3x - \sin 4x}{x^3}$,
 (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 3x}{x^2}$, (5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \cos 3x - 2 \cos 2x}{x^2}$, (6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - 2 \operatorname{tg} x}{x^3}$, (7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 4x}{x^3}$,
 (8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

4. Найдите (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x}$, (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x^2}$, (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{tg} \frac{1}{x}$,
 (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (\cos \frac{1}{x} - 1)$, (5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 (\sin \frac{2}{x} - 2 \sin \frac{1}{x})$, (6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 (\sin \frac{1}{x} - \operatorname{tg} \frac{1}{x})$,

5. Является ли верным утверждение: (1) $x = o(x^2)$ при $x \rightarrow 0$, (2) $x^2 = o(x)$ при $x \rightarrow 0$,
 (3) $(1+x)^2 = 1 + o(1)$ при $x \rightarrow 0$, (4) $(1+x)^2 = 1 + 2x + o(x)$ при $x \rightarrow 0$,
 (5) $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 + o(x^2)$ при $x \rightarrow 0$, (6) $x^{-1} = o(x^{-2})$ при $x \rightarrow +\infty$, (7) $x^{-2} = o(x^{-1})$ при
 $x \rightarrow +\infty$, (8) $\frac{1}{1+x} = 1 + o(1)$ при $x \rightarrow 0$, (9) $\frac{1}{1+x} = 1 + o(x)$ при $x \rightarrow 0$, (10) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$ при
 $x \rightarrow 0$, (11) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$ при $x \rightarrow 0$, (12) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$ при $x \rightarrow 0$.

6. Является ли верным утверждение: (1) $x^{-1} = o(1)$ при $x \rightarrow +\infty$, (2) $x^{-1} = o(x^{-2})$ при
 $x \rightarrow +\infty$, (3) $x^{-2} = o(x^{-1})$ при $x \rightarrow +\infty$.

7. Является ли верным утверждение: (1) $\sin x = o(1)$ при $x \rightarrow 0$, (2) $\sin x = x + o(x)$ при
 $x \rightarrow 0$, (3) $\sin x = x + o(x^2)$ при $x \rightarrow 0$, (4) $\sin x = x + o(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, (5) $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$
 при $x \rightarrow +\infty$, (6) $\cos x = 1 + o(1)$ при $x \rightarrow 0$, (7) $\cos x = 1 + o(x)$ при $x \rightarrow 0$, (8) $\cos x = 1 + o(x^2)$
 при $x \rightarrow 0$, (9) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ при $x \rightarrow 0$,

8. Является ли верным утверждение: (1) $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$ при $x \rightarrow 0$,
 (2) $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(1)$ при $x \rightarrow 0$, (3) $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} + o(x)$ при $x \rightarrow 0$,
 (4) $\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} = 2 + o(x)$ при $x \rightarrow 0$, (5) $\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x} = \frac{2x}{3} + o(x)$ при $x \rightarrow 0$,
 (6) $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ при $x \rightarrow 0$.

9. Является ли верным утверждение: (1) $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(1)$ при $x \rightarrow +\infty$,
 (2) $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} + o(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, (3) $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x} = o(1)$ при $x \rightarrow +\infty$,
 (4) $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x} = 1 + o(1)$ при $x \rightarrow +\infty$, (5) $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = o(1)$ при $x \rightarrow +\infty$,
 (6) $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = x^{-1} + o(x^{-1})$ при $x \rightarrow +\infty$.

10. ★ Используя формулы $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$,
 $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \rightarrow 0$, найдите такие A, b, C, D ,
 что является верным утверждение

- (1) $\sqrt{\cos x} = A + Bx + Cx^2 + o(x^3)$ при $x \rightarrow 0$,
 (2) $\frac{1}{\cos x} = A + Bx + Cx^2 + o(x^3)$ при $x \rightarrow 0$,
 (3) $\frac{1}{1+\sin x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \rightarrow 0$,
 (4) $\sin(\operatorname{tg} 2x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \rightarrow 0$,
 (5) $\operatorname{tg}(2 \sin x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \rightarrow 0$.