2008-2009 Курс 1, семестр 1, семинар 03

Тема: Первый и второй замечательный предел

При решении задач этого раздела можно использовать формулы $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$, $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$, $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$, $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} + o(x)$, $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{2x^2}{27} + o(x^2)$, $\sqrt[3]{1-x} = 1 - \frac{x}{3} + o(x)$, $\sqrt[3]{1-x} = 1 - \frac{x}{3} - \frac{2x^2}{27} + o(x^2)$, $\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} + o(x)$, $\sqrt[n]{1-x} = 1 - \frac{x}{n} + o(x)$, $\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} - \frac{(n-1)x^2}{2n^2} + o(x^2)$, $\sqrt[n]{1-x} = 1 - \frac{x}{n} - \frac{(n-1)x^2}{2n^2} + o(x^2)$, $\ln(1+x) = x + o(x)$, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, $-\ln(1-x) = x + o(x)$, $-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, $e^x = 1 + o(1)$, $e^x = 1 + x + o(x)$, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ при $x \to 0$. Эти формулы называются "асимптотическими формулами". Каждая из этих формул является также "формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано". Можно использовать формулы первого и второго замечательных пределов, $\frac{\sin x}{x} = 1 + o(1)$ при $x \to 0$, $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e + o(1)$ при $x \to 0$, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e + o(1)$ при $x \to +\infty$, а также формулы $(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1 + o(1)$ при $x \to +\infty$, $x^{\frac{1}{x}} = 1 + o(1)$ при $x \to +\infty$. Доказательство каждой из этих формул будет дано в соответствующем месте нашего курса.

1. Предел тригонометрических функций

$\boxed{\text{С}}$ **Для обязательного разбора на семинаре.**

1. Используя тригонометрические формулы, найдите **(1)** $\lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a}$, **(2)** $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(a+x) - 2\cos a + \cos(a-x)}{x^2}$, **(3)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x - 3\sin x}{x^3}$, **(4)** $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{x^2}$.

2. Используя формулу первого замечательного предела, найдите **(1)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$, **(2)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$, **(3)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 6x}{3x}$, **(4)** $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$, **(5)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}$, **(6)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x - \sin x}{x}$, **(7)** $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x}{x}$, **(8)** $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x - 2\cos 2x + \cos x}{x^2}$, **(9)** $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

3. Найдите **(1)** $\lim_{x\to+\infty} x \sin\frac{1}{x}$, **(2)** $\lim_{x\to+\infty} x \sin\frac{1}{x^2}$, **(3)** $\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\cos\frac{1}{x} - 1\right)$, **(4)** $\lim_{x\to+\infty} x^3\left(\sin\frac{1}{x} - \operatorname{tg}\frac{1}{x}\right)$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Обязательное задание на дом.**

4. Используя тригонометрические формулы, найдите **(1)** $\lim_{x\to a} \frac{\cos x - \cos a}{x-a}$, **(2)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(a+x) - 2\sin a + \sin(a-x)}{x^2}$, **(3)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x - 2\sin x}{x^3}$, **(4)** $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{x^2}$.

5. Используя формулу первого замечательного предела, найдите **(1)** $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$, **(2)** $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2}$, **(3)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 12x}{3x}$, **(4)** $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{2x}$, **(5)** $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 6x}{\operatorname{tg} 3x}$, **(6)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x - \sin 2x}{x}$, **(7)** $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x}$; **(8)** $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x - 2\cos 2x + \cos x}{x^2}$, **(9)** $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{x^3}$.

6. Найдите **(1)** $\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{tg}\frac{1}{x}$, **(2)** $\lim_{x\to+\infty} x^2 \sin\frac{1}{x^2}$, **(3)** $\lim_{x\to+\infty} x^3\left(\sin\frac{2}{x} - 2\sin\frac{1}{x}\right)$, **(4)** $\lim_{x\to+\infty} x\left(\sin\frac{1}{x} + \operatorname{tg}\frac{1}{x}\right)$,

2. Вычисление предела тригонометрических функций с помощью асимптотических формул

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

7. Используя формулы $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, найдите **(1)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x - 2\sin x}{x^3}$, **(2)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + \sin 3x - \sin 4x}{x^3}$, **(3)** $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2}$, **(4)** $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x + \cos 3x - 2\cos 2x}{x^2}$, **(5)** $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - 3\operatorname{tg} x}{x^3}$, **(6)** $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 4x}{x^3}$, **(7)** $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

8. Используя формулы $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, найдите **(1)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x - 3\sin x}{x^3}$, **(2)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x + \sin 3x - \sin 5x}{x^3}$, **(3)** $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - \cos 3x}{x^2}$, **(4)** $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x + \cos 3x - 2\cos 4x}{x^2}$, **(5)** $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - 2\operatorname{tg} x}{x^3}$, **(6)** $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x}{x^3}$, **(7)** $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - \sin x - \sin 2x}{x^3}$.

3. Второй замечательный предел в конечной точке

$\boxed{\text{С}}$ **Для обязательного разбора на семинаре.**

9. Найдите **(1)** $\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$, **(2)** $\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{-1}{x}}$, **(3)** $\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}}$, **(4)** $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+3x}{1-2x}\right)^{\frac{2}{x}}$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Обязательное задание на дом.**

10. Найдите **(1)** $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$, **(2)** $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{-1}{x}}$, **(3)** $\lim_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{2}{x}}$, **(4)** $\lim_{x\to 0}\left(\frac{3+x}{3-x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

11. Найдите **(1)** $\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2}$, **(2)** $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{3/x^2}$,

12. Найдите **(1)** $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\ln(1+2x)}$, **(2)** $\lim_{x\to 0}\big(1+\ln(1+x)\big)^{1/\ln(1+x)}$, **(3)** $\lim_{x\to 0}\big(\ln(e+x)\big)^{1/x}$, **(4)** $\lim_{x\to 0}\big(1+x\big)^{1/\ln(1+x)}$.

Д **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

13. Найдите **(1)** $\lim_{x\to 0}\big(\cos x\big)^{1/x^2}$, **(2)** $\lim_{x\to 0}\big(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\big)^{3/x^2}$,

14. Найдите **(1)** $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$, **(2)** $\lim_{x\to 0}\big(\ln(e+x)\big)^{1/\ln(1+x)}$, **(3)** $\lim_{x\to 0}\big(1+\ln(1+x)\big)^{1/x}$, **(4)** $\lim_{x\to 0}\big(1+x\big)^{2/\ln(1+x)}$.

4. Второй замечательный предел в бесконечно удаленной точке

С **Для обязательного разбора на семинаре.**

15. Найдите **(1)** $\lim_{x\to+\infty}\big(1+\frac{1}{x}\big)^{x}$, **(2)** $\lim_{x\to+\infty}\big(1-\frac{2}{x}\big)^{3x}$, **(3)** $\lim_{x\to+\infty}\big(\frac{x+1}{x-1}\big)^{x}$, **(4)** $\lim_{x\to+\infty}\big(\frac{2x+1}{2x-3}\big)^{x}$, **(5)** $\lim_{x\to+\infty}\big(1+\frac{1}{x^2}\big)^{x^2}$,

Д **Обязательное задание на дом.**

16. Найдите **(1)** $\lim_{x\to+\infty}\big(1-\frac{1}{x}\big)^{x}$, **(2)** $\lim_{x\to+\infty}\big(1+\frac{3}{x}\big)^{2x}$, **(3)** $\lim_{x\to+\infty}\big(\frac{x+1}{x}\big)^{x}$, **(4)** $\lim_{x\to+\infty}\big(\frac{2x+1}{2x-1}\big)^{x}$, **(5)** $\lim_{x\to+\infty}\big(1-\frac{1}{x^2}\big)^{x^2}$,

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

17. Найдите **(1)** $\lim_{x\to+\infty}\big(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\big)^{x}$, **(2)** $\lim_{x\to+\infty}\big(\cos\frac{3}{\sqrt{x}}\big)^{x}$, **(3)** $\lim_{x\to+\infty}\big(1+\sin\frac{2}{x}\big)^{x}$.

Д **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

18. Найдите **(1)** $\lim_{x\to+\infty}\big(\frac{x^2+x}{x^2-1}\big)^{x}$, **(2)** $\lim_{x\to+\infty}\big(\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\big)^{x}$, **(3)** $\lim_{x\to+\infty}\big(1+\sin\frac{1}{x^2}\big)^{x^2}$.

5. Сравнение бесконечно малых функций (продолжение), произведение бесконечно малых функций

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

19. Докажите, что $o(x^2)\cdot o(x^3)=o(x^5)$ при $x\to 0$.

Д **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

20. Докажите, что $o(\sqrt{x})\cdot o(\sqrt[3]{x})=o(\sqrt[6]{x^5})$ при $x\to+0$.

6. Сравнение бесконечно малых функций (продолжение), сумма бесконечно малых функций

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

21. Укажите все возможные значения γ, при которых $o(x^{-3})+o(x^{-5})=o(x^{\gamma})$ при $x\to+\infty$.

♦ $\gamma\geqslant -3$.

Д **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

22. Укажите все возможные значения γ, при которых $o(x^{3})+o(x^{5})=o(x^{\gamma})$ при $x\to+0$.

♦ $\gamma\leqslant 3$.

С **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

23. Пусть $\alpha<0,\ \beta<0$. Укажите все возможные значения γ, при которых $o(x^{\alpha})+o(x^{\beta})=o(x^{\gamma})$ при $x\to+\infty$.

♦ $\gamma\geqslant\max(\alpha,\beta)$.

Д **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

24. Пусть $\alpha>0,\ \beta>0$. Укажите все возможные значения γ, при которых $o(x^{\alpha})+o(x^{\beta})=o(x^{\gamma})$ при $x\to+0$.

♦ $\gamma\leqslant\min(\alpha,\beta)$.

7. Применение асимптотических формул для исследования сложной функции

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

25. Используя формулу $\operatorname{tg} x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^4)$ при $x\to 0$, докажите, что $\operatorname{tg} 2x=px+qx^3+o(x^4)$ при $x\to 0$ и найдите значения коэффициентов $p,\ q$.

Д **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

26. Используя формулу $\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)$ при $x\to 0$, докажите, что $\sin 2x=px+qx^3+o(x^4)$ при $x\to 0$ и найдите значения коэффициентов $p,\ q$.

С **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

27. Пусть $f(x)=x+2x^2+o(x^2),\ g(x)=2x-x^2+o(x^2)$ при $x\to 0,\ f(0)=0,\ g(0)=0$. Докажите, что $\exists p,\ q: f(g(x))=px+qx^2+o(x^2)$ при $x\to 0$. Найдите значения коэффициентов $p,\ q$.

♦ $f(g(x)) = 2x - 7x^2 + o(x^2)$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

28. Пусть $f(x) = x + 2x^2 + o(x^2)$, $g(x) = 2x - x^2 + o(x^2)$ при $x \to 0$, $f(0) = 0$, $g(0) = 0$. Докажите, что $\exists p,\ q : g(f(x)) = px + qx^2 + o(x^2)$ при $x \to 0$. Найдите значения коэффициентов $p,\ q$.

♦ $g(f(x)) = 2x + 3x^2 + o(x^2)$.