Государственный университет Высшая школа экономики Факультет бизнес-информатики

Т531 (2007-2008) Домашнее задание 03 Вариант 31

fbi 2007-2008 Домашнее задание семинара 03

Часть 1, Второй замечательный предел

При решении задач этого раздела можно использовать формулы $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$, $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{2x^2}{27} + o(x^2)$, $\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} - \frac{(n-1)x^2}{2n^2} + o(x^2)$, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, $-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ при $x \to 0$.

1. Найдите **(1)** $\lim_{x\to 0}\big(1+x\big)^{\frac{1}{x}}$, **(2)** $\lim_{x\to 0}\big(1-x\big)^{\frac{1}{x}}$, **(3)** $\lim_{x\to 0}\big(1-x\big)^{\frac{-1}{x}}$, **(4)** $\lim_{x\to 0}\big(1+x\big)^{\frac{-1}{x}}$, **(5)** $\lim_{x\to 0}\big(1-3x\big)^{\frac{2}{x}}$, **(6)** $\lim_{x\to 0}\big(1+3x\big)^{\frac{2}{x}}$, **(7)** $\lim_{x\to 0}\big(\frac{1+3x}{1-2x}\big)^{\frac{2}{x}}$, **(8)** $\lim_{x\to 0}\big(\frac{3+x}{3-x}\big)^{\frac{1}{x}}$.

2. Найдите **(1)** $\lim_{x\to 0}\big(\cos x\big)^{1/x^2}$, **(2)** $\lim_{x\to 0}\big(\cos 2x\big)^{3/x^2}$, **(3)** $\lim_{x\to 0}\big(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\big)^{3/x^2}$, **(4)** $\lim_{x\to 0}\big(\frac{\sin x}{x}\big)^{5/x^2}$.

3. Найдите **(1)** $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$, **(2)** $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\ln(1+2x)}$, **(3)** $\lim_{x\to 0}\big(1+\ln(1+x)\big)^{1/\ln(1+x)}$, **(4)** $\lim_{x\to 0}\big(1+\ln(1+x)\big)^{1/x}$, **(5)** $\lim_{x\to 0}\big(1+x\big)^{1/\ln(1+x)}$.

4. Найдите **(1)** $\lim_{x\to +\infty}\big(1+\frac{1}{x}\big)^{x}$, **(2)** $\lim_{x\to +\infty}\big(1-\frac{2}{x}\big)^{3x}$, **(3)** $\lim_{x\to +\infty}\big(\frac{x+1}{x-1}\big)^{x}$, **(4)** $\lim_{x\to +\infty}\big(\frac{2x+1}{2x-3}\big)^{x}$, **(5)** $\lim_{x\to +\infty}\big(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\big)^{x}$, **(6)** $\lim_{x\to +\infty}\big(1+\frac{1}{x^2}\big)^{x^2}$, **(7)** $\lim_{x\to +\infty}\big(\cos\frac{3}{\sqrt{x}}\big)^{x}$, **(8)** $\lim_{x\to +\infty}\big(1+\sin\frac{2}{x}\big)^{x}$.

Часть 2, Свойства бесконечно малых функций (продолжение)

5. Докажите, что $o(x^2)\cdot o(x^3) = o(x^5)$ при $x \to 0$.

6. Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Укажите все возможные значения γ, при которых $o(x^\alpha) + o(x^\beta) = o(x^\gamma)$ при $x \to +0$. Ответ должен быть обоснован.

7. Предположим, что верно утверждение $f(x) = o(x)$ при $x \to 0$. Укажите все утверждения, которые при этом условии также будут верны: **(a)** $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ **(b)** $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ **(c)** $\exists \lim\limits_{x\to 0} x f(x) = 0$ **(d)** $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)/x = 0$ **(e)** $\exists A,\ \exists \delta > 0 : \forall x:\ |x| < \delta \Longrightarrow |f(x)| \leqslant A$ **(f)** $\exists A,\ \exists \delta > 0 : \forall x:\ |x| < \delta \Longrightarrow |f(x)| \leqslant A|x|$

8. Пусть $f(x) = x + 2x^2 + o(x^2)$, $g(x) = 2x - x^2 + o(x^2)$ при $x \to 0$, $f(0) = 0$, $g(0) = 0$. Докажите, что $\exists p,\ q : f(g(x)) = px + qx^2 + o(x^2)$ при $x \to 0$. Найдите значения коэффициентов $p,\ q$.

9. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора, что $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$.

10. Пользуясь определением и свойствами символа $o(f)$, докажите, что $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$ при $x \to 0$

11. Используя формулу $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$ при $x \to 0$, докажите, что $\operatorname{tg} 2x = px + qx^3 + o(x^4)$ при $x \to 0$ и найдите значения коэффициентов $p,\ q$

12. Используя формулу $\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} + o(x)$ при $x \to 0$, вычислите $\lim_{x\to +\infty}\big(\sqrt[3]{x^3+7x^2} - \sqrt[3]{x^3+3x^2}\big)$.

13. Используя формулы $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$ при $x \to 0$, найдите **(1)** $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(3x) - 3\arcsin x}{\operatorname{tg}(2x) - 2\operatorname{tg} x}$, **(2)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x) - 3\sin x}{\operatorname{arctg}(2x) - 2\operatorname{arctg} x}$.