2008-2009 Курс 1, семестр 1, семинар 4

Тема: Непрерывные функции

При решении задач этого раздела можно использовать формулы $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$, $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$, $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$, $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} + o(x)$, $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{2x^2}{27} + o(x^2)$, $\sqrt[3]{1-x} = 1 - \frac{x}{3} + o(x)$, $\sqrt[3]{1-x} = 1 - \frac{x}{3} - \frac{2x^2}{27} + o(x^2)$, $\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} + o(x)$, $\sqrt[n]{1-x} = 1 - \frac{x}{n} + o(x)$, $\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} - \frac{(n-1)x^2}{2n^2} + o(x^2)$, $\sqrt[n]{1-x} = 1 - \frac{x}{n} - \frac{(n-1)x^2}{2n^2} + o(x^2)$, $\ln(1+x) = x + o(x)$, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, $-\ln(1-x) = x + o(x)$, $-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, $e^x = 1 + o(1)$, $e^x = 1 + x + o(x)$, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ при $x \to 0$. Эти формулы называются "асимптотическими формулами". Каждая из этих формул является также "формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано". Можно использовать формулы первого и второго замечательных пределов, $\frac{\sin x}{x} = 1 + o(1)$ при $x \to 0$, $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e + o(1)$ при $x \to 0$, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e + o(1)$ при $x \to +\infty$, а также формулы $(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1 + o(1)$ при $x \to +\infty$, $x^{\frac{1}{x}} = 1 + o(1)$ при $x \to +\infty$. Доказательство каждой из этих формул будет дано в соответствующем месте нашего курса.

1. Классификация точек разрыва

$\boxed{\text{С}}$ **Для обязательного разбора на семинаре.**

1. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x) = \frac{x}{x}$, **(2)** $f(x) = \frac{1}{x}$, **(3)** $f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-4)}$, **(4)** $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}$, **(5)** $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2+x+1}$, **(6)** $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$, **(7)** $f(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(x-3)(x-4)(x-5)}$,

2. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x) = \frac{\sin x}{\sin 2x}$, **(2)** $f(x) = \frac{x}{|x|}$, **(3)** $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$, **(4)** $f(x) = \frac{(x-1)|x-2|}{(x-1)(x-2)}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Обязательное задание на дом.**

3. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x) = \frac{x-3}{x-3}$, **(2)** $f(x) = \frac{1}{\sin x}$, **(3)** $f(x) = \frac{x(x-1)}{x(x-2)}$, **(4)** $f(x) = \frac{x^2-6x+5}{x^2-3x+2}$, **(5)** $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$, **(6)** $f(x) = \frac{x^3+1}{x+1}$,

4. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x) = \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$, **(2)** $f(x) = \frac{|x|}{x}$, **(3)** $f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$, **(4)** $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{(x-2)|x-3|}$.

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

5. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x) = \operatorname{tg} x$, **(2)** $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, **(3)** $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, **(4)** $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$, **(5)** $f(x) = \frac{x}{\operatorname{tg} x}$, **(6)** $f(x) = \operatorname{tg} x \cos x$, **(7)** $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$, **(8)** $f(x) = \operatorname{tg} \frac{3\pi x}{1+x^2}$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

6. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, **(2)** $f(x) = \cos \frac{1}{x}$, **(3)** $f(x) = x \cos \frac{1}{x}$, **(4)** $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, **(5)** $f(x) = \frac{x}{\sin x}$, **(6)** $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$, **(7)** $f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$, **(8)** $f(x) = \operatorname{tg} \frac{5\pi x}{1+x^2}$,

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

7. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x) = e^{-1/x}$, **(2)** $f(x) = (1+x)^{1/x}$, $x > -1$, **(3)** $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$, $0 < x < 0{,}5$, **(4)** $f(x) = (\cos x)^{1/x^2}$,

8. Известно, что $\lim_{x\to+0} x \ln x = 0$, $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x) = \ln|x|$, **(2)** $f(x) = x \ln|x|$, **(3)** $f(x) = |x| \ln|x|$, **(4)** $f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)}$, **(5)** $f(x) = \frac{x-1}{\ln x}$, **(6)** $f(x) = \frac{x^2-1}{\ln|x|}$, **(7)** $f(x) = \frac{\ln(1+\frac{x}{2})}{\ln(1+x)}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

9. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$, **(2)** $f(x) = x^{\frac{1}{x-1}}$, $x > 0$, **(3)** $f(x) = \left(\frac{x+2}{x}\right)^x$, $0 < x < 0{,}5$, **(4)** $f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$,

10. Известно, что $\lim_{x\to+0} x \ln x = 0$, $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x) = \ln(x^2)$, **(2)** $f(x) = x \ln(x)^2$, **(3)** $f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)}$, **(4)** $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, **(5)** $f(x) = \frac{\ln(x^2)}{x^2-1}$, **(6)** $f(x) = \frac{\ln(1+2x)}{\ln(1+x)}$.

2. Асимптотические формулы для основных элементарных функций

$\boxed{\text{С}}$ **Для обязательного разбора на семинаре.**

11. При каких α и β является верным утверждение $f(x) = \alpha + \beta x + o(x)$ при $x \to 0$, если **(1)** $f(x) = (1+x)^2$, **(2)** $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}-1}{x}$, **(3)** $f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$, **(4)** $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, **(5)** $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, **(6)** $f(x) = \frac{e^x-1}{x}$. Тот же вопрос для утверждения **(7)** $\sin x = \alpha x + \beta x^3 + o(x^3)$, **(8)** $\arcsin x = \alpha x + \beta x^3 + o(x^3)$. **(9)** $\ln(1+x) = \alpha x + \beta x^2 + o(x^2)$.

Д **Обязательное задание на дом.**

12. При каких α и β является верным утверждение $f(x) = \alpha + \beta x + o(x)$ при $x \to 0$, если **(1)** $f(x) = (1+x)^{-1}$, **(2)** $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$, **(3)** $f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$, **(4)** $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{x}$, **(5)** $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$, **(6)** $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x}$. Тот же вопрос для утверждения **(7)** $\cos x = \alpha + \beta x^2 + o(x^2)$, **(8)** $\operatorname{arctg} x = \alpha x + \beta x^3 + o(x^3)$, **(9)** $\ln(1-x) = \alpha x + \beta x^2 + o(x^2)$.

3. Применение асимптотических формул для исследования сложной функции

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

13. Используя формулы $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$, найдите такие A, b, C, D, что является верным утверждение
(1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$, **(2)** $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$.

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

14. Используя формулы $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$, найдите такие A, b, C, D, что является верным утверждение
(1) $\sin(\arcsin x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$, **(2)** $\arcsin(\sin x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$.

С **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

15. Используя формулы $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$, найдите такие A, b, C, D, что является верным утверждение
(1) $\operatorname{tg}(2\sin x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$, **(2)** $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$.

С **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

16. Используя формулы $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$, найдите такие A, b, C, D, что является верным утверждение
(1) $\sin\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$, **(2)** $\sin(2\arcsin x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$.