fbi 2007-2008 Домашнее задание семинара 4

Часть 1. Непрерывные функции

При решении задач этого раздела можно использовать формулы $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$, $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{2x^2}{27} + o(x^2)$, $\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} - \frac{(n-1)x^2}{2n^2} + o(x^2)$, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, $-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ при $x \to 0$.

1. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x) = \frac{x}{x}$, **(2)** $f(x) = \frac{1}{x}$, **(3)** $f(x) = \frac{x}{|x|}$, **(4)** $f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-4)}$, **(5)** $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}$, **(6)** $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2+x+1}$, **(7)** $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$, **(8)** $f(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(x-3)(x-4)(x-5)}$,

2. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, **(2)** $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$, **(3)** $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, **(4)** $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$, **(5)** $f(x) = \frac{1}{\sin x}$, **(6)** $f(x) = \frac{x}{\sin x}$, **(7)** $f(x) = \frac{|x|}{\sin x}$, **(8)** $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin x}$, **(9)** $f(x) = \frac{\sin x}{\sin 2x}$, **(10)** $f(x) = x\frac{\sin(\pi x)}{\sin(\pi x)}$, **(11)** $f(x) = \operatorname{tg} x$, **(12)** $f(x) = \operatorname{tg} x \cos x$, **(13)** $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, **(14)** $f(x) = x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, **(15)** $f(x) = \operatorname{tg}\frac{3\pi x}{1+x^2}$,

3. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x) = e^{-1/x}$, **(2)** $f(x) = (1+x)^{1/x}$, $x > -1$, **(3)** $f(x) = (1+\frac{1}{x})^x$, $-0{,}5 < x < 0{,}5$, **(4)** $f(x) = (\cos x)^{1/x^2}$,

4. Известно, что $\lim_{x\to+0} x\ln x = 0$. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x) = \ln|x|$, **(2)** $f(x) = x\ln|x|$, **(3)** $f(x) = |x|\ln|x|$, **(4)** $f(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$, **(5)** $f(x) = \ln|x|\sin\frac{1}{x}$, **(6)** $f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)}$, **(7)** $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, **(8)** $f(x) = \frac{x-1}{\ln x}$, **(9)** $f(x) = \frac{x^2-1}{\ln|x|}$, **(10)** $f(x) = \frac{\sin \pi x}{\ln(1+x)}$,

Часть 2. Свойства бесконечно малых функций (продолжение)

5. Найдите **(1)** $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x - \sin x}{x^3}$, **(2)** $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x + \sin x - 2x}{x^3}$, **(3)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{tg} x}{x^3}$, **(4)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1+x) - 2\sin(1) + \sin(1-x)}{x^2}$,

6. При каких α и β является верным утверждение $f(x) = \alpha + \beta x + o(x)$ при $x \to 0$, если **(1)** $f(x) = (1+x)^2$, **(2)** $f(x) = (1+x)^{-1}$, **(3)** $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}-1}{x}$, **(4)** $f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$, **(5)** $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, **(6)** $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, **(7)** $f(x) = \frac{e^x-1}{x}$. Тот же вопрос для утверждения **(8)** $\sin x = \alpha x + \beta x^3 + o(x^3)$, **(9)** $\cos x = \alpha + \beta x^2 + o(x^2)$, **(10)** $\operatorname{arctg} x = \alpha x + \beta x^3 + o(x^3)$, **(11)** $\arcsin x = \alpha x + \beta x^3 + o(x^3)$.

7. Является ли верным утверждение: **(1)** $(\ln x)^{-1} = o(x)$ при $x \to 0$, **(2)** $(\ln x)^{-1} = o(x^{-1})$ при $x \to +\infty$, **(3)** $x^{-1} = o((\ln x)^{-1})$ при $x \to +\infty$, **(4)** $\frac{1}{x\ln x} = o(\frac{1}{x})$ при $x \to +\infty$, **(5)** $\ln(1-x) = -x + o(1)$ при $x \to 0$, **(6)** $\ln(1-x) = -x + o(x)$ при $x \to 0$, **(7)** $\ln(1-x) = -x + o(x^2)$ при $x \to 0$, **(8)** $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ при $x \to 0$, **(9)** $\star$ $\ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + o(x)$ при $x \to 0$, **(10)** $\ln(1+x) = x + o(x^2)$ при $x \to +\infty$,

Часть 3. Обратные функции

8. Пусть $f(x) = 2x + x^2$ и в некоторой окрестности точки $x = 0$ определена обратная функция $g(x)$. Предположим, что функция $g(x)$ может быть представлена в виде $g(x) = ax + bx^2 + o(x^2)$ при $x \to 0$. Найдите значения коэффициентов.

9. Пусть $f(x) = x - \frac{x^3}{6}$ и в некоторой окрестности точки $x = 0$ определена обратная функция $g(x)$. Предположим, что функция $g(x)$ может быть представлена в виде $g(x) = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + o(x^4)$ при $x \to 0$. Найдите значения коэффициентов.

10. Пусть $f(x) = 5x - 2x^4$ и в некоторой окрестности точки $x = 0$ определена обратная функция $g(x)$. Предположим, что функция $g(x)$ может быть представлена в виде $g(x) = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + o(x^4)$ при $x \to 0$. Найдите значения коэффициентов.