

2008-2009 Курс 1, семестр 1, семинар 05

Тема: Вычисление производных, уравнение касательной

1. Вычисление производной

С Для обязательного разбора на семинаре.

1. Найдите производную: (1) $f(x) = x$, (2) $f(x) = x^2$, (3) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 12$, (4) $f(x) = x^\pi$,
 (5) $f(x) = \sqrt{x}$, (6) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, (7) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, (8) $f(x) = \sqrt{x-1}$, (9) $f(x) = \sin x$, (10) $f(x) = \operatorname{tg} x$,
 (11) $f(x) = \sin(2x)$, (12) $f(x) = \ln x$, (13) $f(x) = \log_2 x$, (14) $f(x) = e^x$, (15) $f(x) = \pi^x$, (16) $f(x) = 2^{-x}$,
 (17) $f(x) = \arcsin x$, (18) $f(x) = \arcsin 2x$.

Д Обязательное задание на дом.

2. Найдите производную: (1) $f(x) = x^2 - 5x + 6$, (2) $f(x) = x(x-1)$, (3) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, (4) $f(x) = x^{\sqrt{2}}$,
 (5) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, (6) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, (7) $f(x) = \frac{1}{x}$, (8) $f(x) = \sqrt{2x}$, (9) $f(x) = \cos x$, (10) $f(x) = \operatorname{tg}(2x)$,
 (11) $f(x) = \sin(3x-2)$, (12) $f(x) = \ln(2x)$, (13) $f(x) = (\ln x)^2$, (14) $f(x) = e^{2x}$, (15) $f(x) = 2^x$, (16) $f(x) = 3^{-x}$,
 (17) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, (18) $f(x) = \operatorname{arctg} 2x$.

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

3. Найдите производную: (1) $f(x) = \frac{x}{\sin x}$, (2) $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$, (3) $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$, (4) $f(x) = x^2 \sin x$,
 (5) $f(x) = x \cos x$, (6) $f(x) = e^x \cos x$, (7) $f(x) = \sqrt{x} \operatorname{tg} x$, (8) $f(x) = x^3 \sin 2x$, (9) $f(x) = x \ln x$, (10) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$,
 (11) $f(x) = x^2 \cdot 2^x$, (12) $f(x) = \frac{e^x}{x}$, (13) $f(x) = x \arcsin x$, (14) $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

4. Найдите производную: (1) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$, (2) $f(x) = \frac{3x+2}{2x+3}$, (3) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, (4) $f(x) = x \operatorname{tg} x$, (5) $f(x) = xe^x$,
 (6) $f(x) = x^2 e^{-x}$, (7) $f(x) = \sqrt[3]{x} \sin x$, (8) $f(x) = x^2 \cos 3x$, (9) $f(x) = x^2 \ln x$, (10) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, (11) $f(x) = x^3 \cdot 3^x$,
 (12) $f(x) = \frac{x}{e^x}$, (13) $f(x) = x \operatorname{arctg} x$, (14) $f(x) = \frac{x}{\arcsin x}$.

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

5. Найдите производную: (1) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, (2) $f(x) = \sin \sqrt{x}$, (3) $f(x) = \ln(2\sqrt{e^x})$, (4) $f(x) = \arcsin \sqrt{x}$,
 (5) $f(x) = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$, (6) $f(x) = e^{\sqrt{-x}}$, (7) $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$.

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

6. Найдите производную: (1) $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$, (2) $f(x) = \cos \sqrt{x}$, (3) $f(x) = \ln(2\sqrt{e^{-2x}})$, (4) $f(x) = \sqrt{\arcsin x}$,
 (5) $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$, (6) $f(x) = \sqrt{e^x}$, (7) $f(x) = |x^2 - 1|$.

С Сложные задачи для разбора на семинаре.

7. Найдите производную: (1) $f(x) = \sqrt{x^2}$, (2) $f(x) = (\sqrt{x})^2$, (3) $f(x) = \arcsin \sin x$, (4) $f(x) = \sin \arcsin x$,
 (5) $f(x) = e^{\ln|x|}$, (6) $f(x) = \ln e^x$.

Д Сложные задачи для самостоятельного решения.

8. Найдите производную: (1) $f(x) = \sqrt[4]{x^4}$, (2) $f(x) = (\sqrt[4]{x})^4$, (3) $f(x) = \operatorname{arctg} \operatorname{tg} x$, (4) $f(x) = \operatorname{tg} \operatorname{arctg} x$,
 (5) $f(x) = 2^{\log_2|x|}$, (6) $f(x) = \log_2 2^x$.

2. Вычисление производной функции в особой точке

С Сложные задачи для разбора на семинаре.

9. Найдите производную функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, если

- (1) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0. \end{cases}$ (2) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$ (3) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$

Д Сложные задачи для самостоятельного решения.

10. Найдите производную функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, если

- (1) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\operatorname{tg} x} & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0. \end{cases}$ (2) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{при } x > 0, \\ e^{\frac{1}{x}} & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$ (3) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x^2} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$

С Сложные задачи для разбора на семинаре.

11. Пусть $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x| & \text{если } x \neq 0, \\ 0 & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Докажите, что $\exists f'(x)$ при $x = 0$ и $f'(0) = 0$.

12. Пусть $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln|x|} & \text{если } x \neq 0, \\ 0 & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Докажите, что $\exists f'(x)$ при $x = 0$ и $f'(0) = 0$.

13. Пусть $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^5} & \text{если } x > 0, \\ e^{1/x^5} & \text{если } x < 0, \\ 0 & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Найдите $f'(0)$.

14. Докажите, что функция $f(x) = \begin{cases} x(1+x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ имеет производную в точке $x = 0$ и найдите ее значение.

15. Докажите, что функция $f(x) = \begin{cases} x^{x+1}, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$ имеет правую производную в точке $x = 0$ и найдите ее значение.

16. Пусть $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Докажите, что $\exists f'(x)$ при $x \neq 0$, $\exists f'(0)$, $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$.

Д Сложные задачи для самостоятельного решения.

17. Пусть $f(x) = \begin{cases} x \ln |x| & \text{если } x \neq 0, \\ 0 & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Докажите, что $\nexists f'(x)$ при $x = 0$

18. Пусть $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln |x|} & \text{если } x \neq 0, \\ 0 & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Докажите, что $\nexists f'(x)$ при $x = 0$.

19. Пусть $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^4} & \text{если } x \neq 0, \\ 0 & \text{если } x = 0, \end{cases}$ Найдите $f'(0)$.

20. Докажите, что функция $f(x) = \begin{cases} x^{1-2x}, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$ имеет правую производную в точке $x = 0$ и найдите ее значение.

21. Докажите, что функция $f(x) = \begin{cases} x^{1+\sqrt{2x}}, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$ имеет правую производную в точке $x = 0$ и найдите ее значение.

22. Пусть $f(x) = \begin{cases} x^3 \cos \frac{1}{x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Докажите, что $\exists f'(x)$ при $x \neq 0$, $\exists f'(0)$, $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$.

3. Касательная

С Для обязательного разбора на семинаре.

23. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$, если (1) $f(x) = x^7$, $x_0 = 14$, (2) $\star f(x) = x^{2007}$, $x_0 = 4014$, (3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 2$, (4) $f(x) = \frac{81}{x^3}$, $x_0 = 3$, (5) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$, (6) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$, (7) $f(x) = x^2 e^{-x}$, $x_0 = 2$, (8) $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$, $x_0 = 1$, (9) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$, (10) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x_0 = e$, (11) $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$, $x_0 = e^2$, (12) $f(x) = (\ln x)^2$, $x_0 = 1$, (13) $f(x) = \arcsin x$, $x_0 = \frac{1}{2}$, (14) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$, (15) $f(x) = \cos(2 \arccos x)$, $x_0 = \frac{1}{2}$, (16) $f(x) = \sin(3 \arcsin x)$, $x_0 = \frac{1}{2}$.

Д Обязательное задание на дом.

24. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$, если (1) $f(x) = x^2$, $x_0 = 6$, (2) $f(x) = \frac{2}{x}$, $x_0 = 2$, (3) $f(x) = \frac{4}{x^2}$, $x_0 = -2$, (4) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 36$, (5) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{5\pi}{6}$, (6) $f(x) = x e^{-x}$, $x_0 = 1$, (7) $f(x) = (1 - \frac{1}{x})^x$, $x_0 = 1$, (8) $f(x) = \ln(1 - x)$, $x_0 = 0$, (9) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x_0 = 1$, (10) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, $x_0 = e$, (11) $f(x) = x(\ln x)^2$, $x_0 = 1$, (12) $f(x) = \arcsin x$, $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, (13) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 0$, (14) $f(x) = \sin(2 \arcsin x)$, $x_0 = \frac{3}{5}$, (15) $f(x) = \cos(3 \arccos x)$, $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

25. Напишите уравнение правосторонней касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 , если (1) $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$, (2) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 0$, (3) $f(x) = \arcsin x$, $x_0 = -1$, (4) $f(x) = x \ln x$, $f(0) = 0$, $x_0 = 0$,

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

26. Напишите уравнение правосторонней касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 , если (1) $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$, $x_0 = 2$, (2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 0$, (3) $f(x) = \arcsin(x^2)$, $x_0 = -1$, (4) $f(x) = x^2 \ln x$, $f(0) = 0$, $x_0 = 0$,

С Сложные задачи для разбора на семинаре.

27. Напишите уравнение правосторонней касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 , если (1) $f(x) = x(1+x)^{\frac{1}{x}}$, $f(0) = 0$, $x_0 = 0$,

Д Сложные задачи для самостоятельного решения.

28. Напишите уравнение правосторонней касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 , если (1) $f(x) = x(1-x)^{\frac{1}{x}}$, $f(0) = 0$, $x_0 = 0$,

4. Применение производной для исследования корней нелинейных уравнений

С Сложные задачи для разбора на семинаре.

29. Пусть значение параметра p таково, что уравнение $x^4 - p = \frac{28}{x}$ имеет ровно два различных корня. Найдите меньший корень.

30. Пусть значение параметра p таково, что уравнение $x^8 + \frac{72}{x} = p$ имеет ровно два различных корня. Найдите больший корень.

31. Пусть значение параметра p таково, что $p > 0$ и уравнение $\operatorname{tg} x = 7 \sin x - p$ имеет единственный корень на промежутке $x \in (0; \frac{\pi}{2})$. Найдите этот корень.

32. Пусть значение параметра p таково, что уравнение $e^{7x} = pe^x - 1$ имеет единственный корень. Найдите этот корень.

33. Пусть значение параметра p таково, что $p > 0$ и уравнение $\ln x = px^5$ имеет единственный корень. Найдите этот корень.

34. Пусть значение параметра p таково, что уравнение $e^{11x} + 1 = pe^{3x}$ имеет единственный корень. Найдите этот корень.

Д Сложные задачи для самостоятельного решения.

35. Пусть значение параметра p таково, что уравнение $x^6 - p = \frac{48}{x}$ имеет ровно два различных корня. Найдите меньший корень.

36. Пусть значение параметра p таково, что уравнение $x^{10} + \frac{250}{x} = p$ имеет ровно два различных корня. Найдите больший корень.

37. Пусть значение параметра p таково, что $p > 0$ и уравнение $\operatorname{ctg} x = 8 \cos x - p$ имеет единственный корень на промежутке $x \in (0; \frac{\pi}{2})$. Найдите этот корень.

38. Пусть значение параметра p таково, что уравнение $3e^{-2x} = p - 2e^{3x}$ имеет единственный корень. Найдите этот корень.

39. Пусть значение параметра p таково, что уравнение $\ln x = 4x^{12} - p$ имеет единственный корень. Найдите этот корень.

40. Пусть значение параметра p таково, что уравнение $3e^{-2x} = p - 2e^{3x}$ имеет единственный корень. Найдите этот корень.

5. Вычисление старших производных

С Для обязательного разбора на семинаре.

41. Найдите $f^{(n)}(x)$, если (1) $f(x) = x^m$, $m > n$, $m, n \in \mathcal{N}$, (2) $f(x) = e^{2x}$, (3) $f(x) = \cos x$, (4) $f(x) = \sin 3x$, (5) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, (6) $f(x) = \ln x$,

Д Обязательное задание на дом.

42. Найдите $f^{(n)}(x)$, если (1) $f(x) = x^m$, $m < n$, $m, n \in \mathcal{N}$, (2) $f(x) = x^m$, $m = n$, $m, n \in \mathcal{N}$, (3) $f(x) = e^{-3x}$, (4) $f(x) = \sin x$, (5) $f(x) = \frac{1}{x}$,

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

43. Найдите $f^{(n)}(x)$, если (1) $f(x) = \sqrt{x}$, (2) $f(x) = xe^{-x}$, (3) $f(x) = x \cos x$, (4) $f(x) = x^2 e^x$, (5) $f(x) = x^2 \cos 2x$. (6) $f(x) = x \ln x$,

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

44. Найдите $f^{(n)}(x)$, если (1) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, (2) $f(x) = xe^x$, (3) $f(x) = x \sin x$, (4) $f(x) = x^2 e^{-x}$, (5) $f(x) = x^2 \ln x$, (6) $f(x) = x^2 \sin x$, (7) $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$,

6. Рекуррентные формулы для вычисления старших производных в точке

С Сложные задачи для разбора на семинаре.

45. Пусть $f(x) = e^{x^3}$. Найдите $f^{(n)}(0)$.

46. Пусть $f(x) = \arcsin x$. Найдите $f^{(n)}(0)$.

Д Сложные задачи для самостоятельного решения.

47. Пусть $f(x) = e^{x^2}$. Найдите $f^{(n)}(0)$.

48. Пусть $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Найдите $f^{(n)}(0)$.