

fbi 2007-2008 Домашнее задание семинара 5

Часть 1. Вычисление производных

1. Найдите производную: (1) $f(x) = x$, (2) $f(x) = x^2$, (3) $f(x) = x^7$,
 (4) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 12$, (5) $f(x) = x^\pi$, (6) $f(x) = \sqrt{x}$, (7) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, (8) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$,
 (9) $f(x) = \frac{1}{x}$, (10) $f(x) = \frac{1}{x^7}$, (11) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, (12) $f(x) = \sqrt{x-1}$, (13) $f(x) = \sqrt{2x}$,
 (14) $f(x) = \sin x$, (15) $f(x) = \cos x$, (16) $f(x) = \operatorname{tg} x$, (17) $f(x) = \sin 2x$, (18) $f(x) = \sin(3x-2)$,
 (19) $f(x) = \ln x$, (20) $f(x) = \log_2 x$, (21) $f(x) = e^x$, (22) $f(x) = \pi^x$, (23) $f(x) = 2^{-x}$,
 (24) $f(x) = \arcsin x$, (25) $f(x) = \arccos x$, (26) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, (27) $f(x) = \arcsin 2x$.

2. Найдите производную: (1) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$, (2) $f(x) = \frac{x}{\sin x}$, (3) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, (4) $f(x) = x \sin x$,
 (5) $f(x) = e^x \cos x$, (6) $f(x) = x^3 e^{-x}$, (7) $f(x) = \sqrt{x} \operatorname{tg} x$, (8) $f(x) = x^3 \sin 2x$, (9) $f(x) = x \ln x$,
 (10) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, (11) $f(x) = \sin x \log_2 x$, (12) $f(x) = x e^x$, (13) $f(x) = x^\pi \pi^x$, (14) $f(x) = 2^x \sin 3x$,
 (15) $f(x) = \sin x \arcsin x$, (16) $f(x) = x \arccos x$, (17) $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$, (18) $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sin x}$.

3. Найдите производную: (1) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, (2) $f(x) = \sin(\sqrt{x})$, (3) $f(x) = \ln(2\sqrt{e^x})$,
 (4) $f(x) = \arcsin \sqrt{x}$, (5) $f(x) = \sqrt{\arcsin x}$, (6) $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$, (7) $f(x) = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$,
 (8) $f(x) = e^{\sqrt{-x}}$, (9) $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$.

Часть 2. Уравнение касательной

4. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ касающейся в точке x_0 ,
 * найдите координаты точек пересечения касательной с осями координат, если
 (1) $\star f(x) = x^2$, $x_0 = 6$, (2) $\star f(x) = x^7$, $x_0 = 14$, (3) $\star f(x) = \frac{2}{x}$, $x_0 = 2$, (4) $\star f(x) = \frac{81}{x^3}$, $x_0 = 3$,
 (5) $\star f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 36$, (6) $\star f(x) = x^{2007}$, $x_0 = 4014$, (7) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$,
 (8) $\star f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, (9) $\star f(x) = x^2 e^{-x}$, $x_0 = 2$, (10) $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, $x_0 = 1$,
 (11) $\star f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$, (12) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x_0 = 1$, (13) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x_0 = e$, (14) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, $x_0 = e$,
 (15) $f(x) = (\ln x)^2$, $x_0 = 1$, (16) $f(x) = \arcsin x$, $x_0 = \frac{1}{2}$, (17) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$,
 (18) $f(x) = \cos(2 \arccos x)$, $x_0 = \frac{1}{2}$, (19) $f(x) = \sin(2 \arcsin x)$, $x_0 = 0$,
 (20) $f(x) = \sin(2 \arcsin x)$, $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

5. Известно, что $\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = 0$.

- * Напишите уравнение правосторонней касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 ,
 если (1) $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$, (2) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 0$, (3) $f(x) = \arcsin x$, $x_0 = -1$,
 (4) $f(x) = x \ln x$, $f(0) = 0$, $x_0 = 0$, (5) $f(x) = x^2 \ln x$, $f(0) = 0$, $x_0 = 0$,
 (6) $f(x) = x(1+x)^{\frac{1}{x}}$, $f(0) = 0$, $x_0 = 0$.

Часть 3. Производные высших порядков

6. Найдите $f^{(n)}(x)$, если (1) $f(x) = x^3$, $n = 2$, (2) $f(x) = x^3$, $n = 3$, (3) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $n = 2$,
 (4) $f(x) = \arcsin x$, $n = 2$, (5) $f(x) = x \arcsin x$, $n = 2$,

7. Найдите $y^{(n)}(x)$, если (1) $y = x^m$, $m < n$, $m, n \in \mathcal{N}$, (2) $y = x^m$, $m = n$, $m, n \in \mathcal{N}$,
 (3) $y = x^m$, $m > n$, $m, n \in \mathcal{N}$, (4) $y = e^x$, (5) $y = e^{2x}$, (6) $y = x e^x$, (7) $y = x e^{-x}$, (8) $y = x^2 e^x$,
 (9) $y = \sqrt{x}$, (10) $y = \ln x$, (11) $y = \ln(x^2 + x)$, (12) $y = \ln \frac{2x-3}{3x-2}$, (13) $y = x \ln x$, (14) $y = x^2 \ln x$,
 (15) $\star y = \frac{\ln x}{x}$, (16) $y = \sin(x)$, (17) $y = \sin(3x)$, (18) $y = x \sin(x)$, (19) $y = x \sin(2x)$,
 (20) $y = x^2 \cos(2x)$.

Часть 4. Свойства бесконечно малых функций (продолжение)

8. Является ли верным утверждение: (1) $x + x^2 = o(x)$ при $x \rightarrow 0$, (2) $x + x^2 = o(x)$ при
 $x \rightarrow +\infty$, (3) $x + x^2 = o(1)$ при $x \rightarrow 0$, (4) $x \sin x = o(1)$ при $x \rightarrow 0$, (5) $x \sin x = o(x)$ при $x \rightarrow 0$,
 (6) $x \sin x = x^2 + o(x^2)$ при $x \rightarrow 0$, (7) $x \sin x = x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$ при $x \rightarrow 0$,
 (8) $x \sin x = x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^5)$ при $x \rightarrow 0$, (9) $\frac{1}{1-x} = 1 + o(1)$ при $x \rightarrow 0$, (10) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$ при
 $x \rightarrow 0$, (11) $\frac{x}{1-x} = x + x^2 + o(x^2)$ при $x \rightarrow 0$,

9. Пусть $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$. Найдите такие значения коэффициентов a_k, b_k, c_k , что
 (a) $f(g(x)) = \sum_{k=0}^6 a_k x^k + o(x^6)$, (b) $g(f(x)) = \sum_{k=0}^6 b_k x^k + o(x^6)$ (c) $f(x)g(x) = \sum_{k=0}^6 c_k x^k + o(x^6)$
 при $x \rightarrow 0$.