2008-2009 Курс 1, семестр 1, семинар 07

Тема: Теоремы о непрерывных и дифференцируемых функциях

1. Формула Лагранжа

$\boxed{\text{С}}$ **Для обязательного разбора на семинаре.**

1. Используя формулу конечных приращений, дайте оценку величины
$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)\in\left[(b-a)\inf_{(a;b)}f'(x);\ (b-a)\sup_{(a;b)}f'(x)\right]$, если **(1)** $f(x)=\frac{1}{x}$, $a=99$, $b=101$. **(2)** $f(x)=\sqrt{x}$, $a=16$, $b=25$. **(3)** $f(x)=\sin x$, $a=\frac{\pi}{6}$, $b=\frac{\pi}{3}$. **(4)** $f(x)=\arcsin x$, $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Обязательное задание на дом.**

2. Используя формулу конечных приращений, дайте оценку величины
$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)\in\left[(b-a)\inf_{(a;b)}f'(x);\ (b-a)\sup_{(a;b)}f'(x)\right]$, если **(1)** $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $a=\frac{10}{11}$, $b=\frac{10}{9}$. **(2)** $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $a=8$, $b=27$. **(3)** $f(x)=\cos x$, $a=\frac{\pi}{6}$, $b=\frac{\pi}{3}$. **(4)** $f(x)=\operatorname{arctg}x$, $a=9$, $b=10$.

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

3. Используя формулу конечных приращений, оцените $f(b)-f(a)$, если $f(x)=3x-x^3,\ a=-1,\ b=1$.

4. Используя формулу конечных приращений, оцените $f(b)-f(a)$, если $f(x)=\frac{e^2}{e^2-1}\ln x,\ a=e^3,\ b=e^5$.

5. Используя формулу конечных приращений, оцените $f(b)-f(a)$, если $f(x)=13\ln(1+x^2),\ a=\frac{3}{4},\ b=\frac{3}{2}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

6. Используя формулу конечных приращений, оцените $f(b)-f(a)$, если $f(x)=5x^3-3x^5,\ a=-1,\ b=1$.

7. Используя формулу конечных приращений, оцените $f(b)-f(a)$, если $f(x)=24\arcsin x,\ a=\frac{3}{5},\ b=\frac{4}{5}$.

8. Используя формулу конечных приращений, оцените $f(b)-f(a)$, если $f(x)=3x^2-x^3,\ a=\frac{1}{2},\ b=\frac{3}{2}$.

2. Формула Коши

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

9. Используя обобщенную формулу конечных приращений (Коши), $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\in\left[\inf_{(a;b)}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)};\sup_{(a;b)}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right]$, дайте оценку величины **(1)** $\frac{b^3-a^3}{b^2-a^2}$, $a=5$, $b=6$. **(2)** $\frac{\operatorname{arctg}b-\operatorname{arctg}a}{\ln(1+b^2)-\ln(1+a^2)}$, $a=10$, $b=11$. **(3)** $\frac{\ln b-\ln a}{b^2-a^2}$, $a=101$, $b=99$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

10. Используя обобщенную формулу конечных приращений (Коши), $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\in\left[\inf_{(a;b)}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)};\sup_{(a;b)}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right]$, дайте оценку величины **(1)** $\frac{b^4-a^4}{b^2-a^2}$, $a=5$, $b=6$. **(2)** $\frac{\ln b-\ln a}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$, $a=9$, $b=16$. **(3)** $\frac{\ln b-\ln a}{\operatorname{arctg}b-\operatorname{arctg}a}$, $a=\frac{3}{5}$, $b=\frac{4}{5}$.

3. Асимптотические формулы (повторение темы)

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

11. Является ли верным утверждение: **(1)** $(\ln x)^{-1}=o(x)$ при $x\to0$, **(2)** $x^{-1}=o((\ln x)^{-1})$ при $x\to+\infty$, **(3)** $\ln(1-x)=-x+o(1)$ при $x\to0$, **(4)** $\ln(1-x)=-x+o(x^2)$ при $x\to0$, **(5)** $\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ при $x\to0$, **(6)** $\ln(1+x)=x+\frac{x^2}{2}+o(x)$ при $x\to0$, **(7)** $\ln(1+x)=x+o(x^2)$ при $x\to+\infty$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

12. Является ли верным утверждение: **(1)** $(\ln x)^{-1}=o(x^{-1})$ при $x\to+\infty$, **(2)** $\frac{1}{x\ln x}=o(\frac{1}{x})$ при $x\to+\infty$, **(3)** $\ln(1-x)=-x+o(x)$ при $x\to0$, **(4)** $\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ при $x\to0$, **(5)** $\ln(1+x)=2x+3x^2+o(1)$ при $x\to0$, **(6)** $\frac{\ln(1+x)}{1+x}=o(1)$ при $x\to+\infty$,

4. Применение асимптотических формул для вычисления пределов

Соглашение об асимптотических формулах. При решении задач этого раздела можно использовать формулы $\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^6)$, $\arcsin x=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+o(x^6)$, $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)$, $\operatorname{tg}x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^6)$, $\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^6)$, $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+o(x^3)$, $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)$, $\sqrt{1-x}=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)$, $\sqrt[3]{1+x}=1+\frac{x}{3}+o(x)$, $\sqrt[3]{1+x}=1+\frac{x}{3}-\frac{2x^2}{27}+o(x^2)$, $\sqrt[3]{1-x}=1-\frac{x}{3}+o(x)$, $\sqrt[3]{1-x}=1-\frac{x}{3}-\frac{2x^2}{27}+o(x^2)$, $\sqrt[n]{1+x}=1+\frac{x}{n}+o(x)$, $\sqrt[n]{1-x}=1-\frac{x}{n}+o(x)$, $\sqrt[n]{1+x}=1+\frac{x}{n}-\frac{(n-1)x^2}{2n^2}+o(x^2)$, $\sqrt[n]{1-x}=1-\frac{x}{n}-\frac{(n-1)x^2}{2n^2}+o(x^2)$, $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$, $-\ln(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$, $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$, $e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$, $(1+x)^p=1+px+o(x)$, $(1+x)^p=1+px+\frac{p(p-1)}{2}x^2+o(x^2)$, $(1+x)^p=1+px+\frac{p(p-1)}{2}x^2+\frac{p(p-1)(p-1)}{6}x^3+o(x^3)$ при $x\to0$.
Эти формулы называются "асимптотическими формулами". Каждая из этих формул является также "формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано". Можно использовать формулы первого и второго замечательных

пределов, $\frac{\sin x}{x} = 1 + o(1)$ при $x \to 0$, $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e + o(1)$ при $x \to 0$, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e + o(1)$ при $x \to +\infty$, а также формулы $(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1 + o(1)$ при $x \to +\infty$, $x^{\frac{1}{x}} = 1 + o(1)$ при $x \to +\infty$. Доказательство каждой из этих формул будет дано в соответствующем месте нашего курса.

С **Для обязательного разбора на семинаре.**

13. Найдите, используя асимптотические формулы, **(1)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}$, **(2)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2\sin 3x)}{\sin(3\sin 2x)}$, **(3)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$, **(4)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}$, **(5)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x - \sin x}{x}$, **(6)** $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x}{\sin 3x + \sin 2x}$.

14. Найдите, используя асимптотические формулы, **(1)** $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x - 2\cos 2x + \cos x}{x^2}$, **(2)** $\lim_{x\to 0} \frac{3\sin 5x - 5\sin 3x}{x^3}$, **(3)** $\lim_{x\to 0} \frac{3\sin 5x + 5\sin 3x - \sin 30x}{x^3}$, **(4)** $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$, **(5)** $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x + \sin x - \sin 2x}{x^3}$.

Д **Обязательное задание на дом.**

15. Найдите, используя асимптотические формулы, **(1)** $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{x}$, **(2)** $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x}{x^2}$, **(3)** $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 6x}{\operatorname{tg} 3x}$, **(4)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(12x^2)}{\operatorname{tg}(3x^2)}$, **(5)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x - \sin 2x}{x}$, **(6)** $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x}$,

16. Найдите, используя асимптотические формулы, **(1)** $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x + \cos 4x - \cos x - \cos 3x}{x^2}$, **(2)** $\lim_{x\to 0} \frac{3\sin 2x + 2\sin 3x - 12x\cos x}{x^3}$, **(3)** $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x - \sin x - \sin 2x}{x^3}$, **(4)** $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

17. Используя асимптотические формулы, найдите $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+7x^2} - \sqrt[3]{x^3+3x^2}\right)$.

18. Найдите, используя асимптотические формулы, $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(3x) - 3\arcsin x}{\operatorname{tg}(2x) - 2\operatorname{tg} x}$.

Д **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

19. Используя асимптотические формулы, найдите $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2} - \sqrt[3]{x^3+x^2}\right)$

20. Найдите, используя асимптотические формулы, $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(3x) - 3\operatorname{arctg} x}{\sin(2x) - 2\sin x}$.

21. Найдите, используя асимптотические формулы, **(1)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$, **(2)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1+2x}}{x}$, **(3)** $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right)$.

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

22. Найдите, используя асимптотические формулы, **(1)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + \arcsin x - 2x}{x^5}$,

Д **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

23. Найдите, используя асимптотические формулы, **(1)** $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{arctg} x - 2x}{x^5}$.

С **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

24. Найдите, используя асимптотические формулы, **(1)** $\lim_{x\to e} \frac{e^x - x^e}{x-e}$, **(2)** $\lim_{x\to e} \frac{e^{2x} - x^{2e}}{(x-e)^2}$, **(3)** $\lim_{x\to 1} \frac{e^{e^2 x} - (ex)^{e^2}}{(x-1)^2}$. **(4)** $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}$, **(5)** $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x} - e}{x^2}$.

Д **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

25. Найдите, используя асимптотические формулы, **(1)** $\lim_{x\to e} \frac{e-x}{e^x - x^e}$, **(2)** $\lim_{x\to 1} \frac{e^{ex} - (ex)^e}{(x-1)^2}$, **(3)** $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}$, **(4)** $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}$, **(5)** $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1 - x}{x^2}$,

С **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

26. Используя асимптотические формулы, представьте функцию $f(x)$ в виде $f(x) = \sum_{k=0}^n C_k x^k + o(x^n)$ для $f(x) = \sin(\sin x)$ и $n = 6$.

27. Используя асимптотические формулы, представьте функцию $f(x)$ в виде $f(x) = \sum_{k=0}^n C_k x^k + o(x^n)$ для $f(x) = \sin(2\operatorname{tg} x)$ и $n = 6$.

Д **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

28. Используя асимптотические формулы, представьте функцию $f(x)$ в виде $f(x) = \sum_{k=0}^n C_k x^k + o(x^n)$ для $f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)$ и $n = 6$.

29. Используя асимптотические формулы, представьте функцию $f(x)$ в виде $f(x) = \sum_{k=0}^n C_k x^k + o(x^n)$ для $f(x) = \operatorname{tg}(2\sin x)$ и $n = 6$.