2008-2009 Курс 1, семестр 2, семинар 10
Тема: Формула Тейлора

1. Многочлен Тейлора второго порядка

$\boxed{\text{С}}$ **Для обязательного разбора на семинаре.**

1. Найдите **(a)** df, **(b)** d^2f, **(c)** $f(x) + df + \frac{1}{2}d^2f$, **(d)** $f(x+dx)$, если **(1)** $f(x) = 2x+3$, $x = 2$, $dx = 3$, **(2)** $f(x) = x^3$, $x = 1$, $dx = 1$, **(3)** $f(x) = x^3$, $x = 1$, $dx = 0{,}1$, **(4)** $f(x) = \ln x$, $x = 1$, $dx = 1$, **(5)** $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 16$, $dx = 9$, **(6)** $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x = 1$, $dx = 0{,}1$, **(7)** $f(x) = e^x$, $x = \ln 10$, $dx = \ln 2$, **(8)** $f(x) = \sin x$, $x = \frac{\pi}{6}$, $dx = \frac{\pi}{6}$, **(9)** $f(x) = \arcsin x$, $x = \frac{1}{2}$, $dx = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Обязательное задание на дом.**

2. Найдите **(a)** df, **(b)** d^2f, **(c)** $f(x) + df + \frac{1}{2}d^2f$, **(d)** $f(x+dx)$, если **(1)** $f(x) = x$, $x = 2$, $dx = 3$, **(2)** $f(x) = x^2$, $x = 1$, $dx = 1$, **(3)** $f(x) = x^3$, $x = 0$, $dx = 1$, **(4)** $f(x) = \ln x$, $x = 1$, $dx = 2$, **(5)** $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 9$, $dx = 7$, **(6)** $f(x) = \sqrt{3+x}$, $x = 1$, $dx = 0{,}1$, **(7)** $f(x) = e^x$, $x = 0$, $dx = 1$, **(8)** $f(x) = \cos x$, $x = \frac{\pi}{3}$, $dx = \frac{\pi}{6}$, **(9)** $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x = 1$, $dx = \sqrt{3} - 1$,

2. Многочлен Тейлора

$\boxed{\text{С}}$ **Для обязательного разбора на семинаре.**

3. Найдите значение многочлена Тейлора для функции $f(x)$ с центром $x_0 = 0$ указанного порядка n в указанной точке x, если **(1)** $f(x) = (2+x)^3$, $x = 1$, $n = 3$. **(2)** $f(x) = (1+x)^{2006}$, $x = 1$, $n = 2005$. **(3)** $f(x) = e^x$, $x = 2$, $n = 4$. **(4)** $f(x) = xe^x$, $x = 2$, $n = 4$. **(5)** $f(x) = \sin x$, $x = 1$, $n = 5$. **(6)** $f(x) = \cos x$, $x = 2$, $n = 4$. **(7)** $f(x) = \sqrt{1-x}$, $x = 0{,}36$, $n = 2$. **(8)** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, $x = 0,64$, $n = 2$. **(9)** $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x = 1$, $n = 2006$. **(10)** $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $x = 1$, $n = 2006$. **(11)** $f(x) = \ln(1-x)$, $x = 1$, $n = 5$. **(12)** $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$, $x = 1$, $n = 3$. **(13)** $f(x) = \arcsin(x)$, $x = 1$, $n = 3$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Обязательное задание на дом.**

4. Найдите значение многочлена Тейлора для функции $f(x)$ с центром $x_0 = 0$ указанного порядка n в указанной точке x, если **(1)** $f(x) = (2+x)^2$, $x = 1$, $n = 2$. **(2)** $f(x) = x^7$, $x = 1$, $n = 5$. **(3)** $f(x) = e^{-x}$, $x = 2$, $n = 3$. **(4)** $f(x) = xe^{-x}$, $x = 1$, $n = 2$. **(5)** $f(x) = \sin x$, $x = 3$, $n = 5$. **(6)** $f(x) = \cos x$, $x = \frac{1}{2}$, $n = 2$. **(7)** $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x = 0{,}21$, $n = 2$. **(8)** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$, $x = 0,44$, $n = 2$. **(9)** $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x = \frac{1}{2}$, $n = 3$. **(10)** $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $x = \frac{1}{3}$, $n = 7$. **(11)** $f(x) = \ln(1+x)$, $x = 1$, $n = 5$. **(12)** $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$, $x = \sqrt{3}$, $n = 3$. **(13)** $f(x) = \arcsin(x)$, $x = \frac{1}{2}$, $n = 3$.

3. Многочлен Тейлора, экономические приложения

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

5. Оцените значение выражения $(1+x)^m$, используя тождество $(1+x)^m = e^{m\ln(1+x)}$. Для оценки $\ln(1+x)$ используйте многочлен Тейлора $P_2 = x - \frac{x^2}{2}$. **(1)** $(1{,}01)^2$, **(2)** $(1{,}01)^{100}$, **(3)** $(0{,}99)^{200}$, **(4)** $(1{,}01)^{100} - (1{,}02)^{50}$, **(5)** $(0{,}99)^{100} - (0{,}98)^{50}$,

6. Билл вложил \$1000 на 100 недель в банк, который начисляет 1% каждую неделю с учетом сложных процентов. По истечении 100 недель капитал Билла будет равен $\$x$, где
(a) $x \leqslant 1600$. **(b)** $1600 < x \leqslant 1000e^{1/2}$. **(c)** $1000e^{1/2} < x \leqslant 2000$. **(d)** $2000 < x \leqslant 1000e^1$.
(e) $1000e^1 < x \leqslant 3000$. **(f)** $3000 < x$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

7. Оцените значение выражения $(1+x)^m$, используя тождество $(1+x)^m = e^{m\ln(1+x)}$. Для оценки $\ln(1+x)$ используйте многочлен Тейлора $P_2 = x - \frac{x^2}{2}$. **(1)** $(1{,}02)^3$, **(2)** $(1{,}02)^{50}$, **(3)** $(0{,}98)^{100}$, **(4)** $(1{,}1)^{10} - (1{,}2)^5$, **(5)** $(0{,}9)^{10} - (0{,}8)^5$,

8. Джек вложил \$1000 на 50 недель в банк, который начисляет 1% каждую неделю с учетом сложных процентов. По истечении 50 недель капитал Джека будет равен $\$x$, где
(a) $x \leqslant 1600$. **(b)** $1600 < x \leqslant 1000e^{1/2}$. **(c)** $1000e^{1/2} < x \leqslant 2000$. **(d)** $2000 < x \leqslant 1000e^1$.
(e) $1000e^1 < x \leqslant 3000$. **(f)** $3000 < x$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

9. Билл вложил \$1000 на 100 недель в Первый банк, который начисляет 1% каждую неделю с учетом сложных процентов. Джек вложил такую же сумму на тот же срок во Второй банк, начисляющий 2% каждые две недели. По истечении 100 недель Билл будет богаче Джека
(a) не более чем на \$5. **(b)** примерно на \$7. **(c)** примерно на \$14. **(d)** примерно на \$20.
(e) примерно на \$27. **(f)** более чем на \$30.

10. Султан обещал Шахразаде принимать у нее каждый вечер на хранение сокровища на сумму, равную 1% от имеющегося *у него* на этот момент капитала, и каждое утро возвращать ей ровно 1% от имеющегося *у него* на этот момент капитала. На сколько богаче станет Шахразада через 1001 ночь, если в первый вечер в сокровищнице султана было 1000000 (1 миллион) дукатов?
(a) не более чем на 999 дукатов. **(b)** от 1000 до 2999 дукатов. **(c)** от 3000 до 9999 дукатов. **(d)** от 10000 до 29999 дукатов. **(e)** от 30000 до 99999 дукатов. **(f)** более чем на 100000 дукатов.

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

11. Джек вложил \$1000 на 100 недель в Первый банк, который начисляет 1% каждую неделю с учетом сложных процентов. Билл вложил такую же сумму на тот же срок во Второй банк, начисляющий 0,5% два раза в неделю. По истечении 100 недель Билл будет богаче Джека
(a) не более чем на \$5. **(b)** примерно на \$7. **(c)** примерно на \$14. **(d)** примерно на \$20.
(e) примерно на \$27. **(f)** более чем на \$30.

12. Султан обещал Шахразаде принимать у нее каждый вечер на хранение сокровища на сумму, равную 10% от имеющегося *у него* на этот момент капитала, и каждое утро возвращать ей ровно 10% от имеющегося *у него* на этот момент капитала. На сколько богаче станет Шахразада через 101 ночь, если в первый вечер в сокровищнице султана было 1000 дукатов?
(a) не более чем на 500 дукатов. **(b)** от 500 до 749 дукатов. **(c)** от 750 до 849 дукатов. **(d)** от 850 до 899 дукатов. **(e)** от 900 до 949 дукатов. **(f)** более чем на 950 дукатов.

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

13. Изотоп А имеет период полураспада 99 дней, изотоп Б имеет период полураспада 101 день, в начале имеется две банки, содержащие по одному килограмму каждого из изотопов. Насколько будут различаться веса банок после 9999 дней?.

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

14. Изотоп А имеет период полураспада 999 дней, изотоп Б имеет период полураспада 1001 день, в начале имеется две банки, содержащие по 10^{12} атомов каждого из изотопов. Насколько будут различаться веса банок после $10^6 - 1$ дней?.

4. Многочлен Тейлора, оценка остаточного члена

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

15. Получите нижнюю и верхнюю оценки величины остаточного члена формулы Тейлора в форме Лагранжа, $R_{n+1}(x, x_0) \in \left[\inf_{\xi\in(x_0;x)} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}; \sup_{\xi\in(x_0;x)} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right]$ для $f(x) = e^x$, $x_0 = 0,\ \ x = 2,\ \ n = 3$.

16. Оцените величину остаточного члена формулы Тейлора $R_{n+1}(x|x_0) = f(x) - P_n(x|x_0)$, $P_n(x|x_0) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, если **(1)** $f(x) = \sin x,\ x_0 = 0,\ x = 1,\ n = 5$.
(2) $f(x) = \sin x,\ x_0 = 0,\ x = \frac{1}{2},\ n = 5$. **(3)** $f(x) = \sin x,\ x_0 = 0,\ x = 2,\ n = 5$.
(4) $f(x) = e^x,\ x_0 = 0,\ x = 2,\ n = 6$. **(5)** $f(x) = \ln(1+x),\ x_0 = 0,\ x = \frac{1}{2},\ n = 4$.
(6) $f(x) = \frac{1}{1-x},\ x_0 = 0,\ x = \frac{1}{2},\ n = 4$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

17. Получите нижнюю и верхнюю оценки величины остаточного члена формулы Тейлора в форме Лагранжа, $R_{n+1}(x, x_0) \in \left[\inf_{\xi\in(x_0;x)} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}; \sup_{\xi\in(x_0;x)} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right]$ для $f(x) = e^{-x}$, $x_0 = 0,\ \ x = 3,\ \ n = 5$.

18. Оцените величину остаточного члена формулы Тейлора $R_{n+1}(x|x_0) = f(x) - P_n(x|x_0)$, $P_n(x|x_0) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, если **(1)** $f(x) = \cos x,\ x_0 = 0,\ x = 1,\ n = 4$.
(2) $f(x) = \cos x,\ x_0 = 0,\ x = 1,\ n = 5$. **(3)** $f(x) = \cos x,\ x_0 = 0,\ x = \frac{1}{2},\ n = 4$.

(4) $f(x)=\cos x,\ x_0=0,\ x=2,\ n=4$. **(5)** $f(x)=e^{-x},\ x_0=0,\ x=2,\ n=6$.
(6) $f(x)=\ln(1-x),\ x_0=0,\ x=\frac{1}{2},\ n=4$. **(7)** $f(x)=\frac{1}{1+x},\ x_0=0,\ x=\frac{1}{2},\ n=4$.

5. Многочлен Тейлора, оценка порядка для достижения заданной точности

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

19. Оцените величину остаточного члена формулы Тейлора $R_{n+1}(x|x_0)=f(x)-P_n(x|x_0)$, $P_n(x|x_0)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, принимая $\max|R_{n+1}(x|x_0)|=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\max_{\xi\in[0;x_0]}\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|$, и найдите наименьшее n, при котором $\max|R_{n+1}(x|x_0)|<\varepsilon$, если **(1)** $f(x)=\sin x,\ x_0=0,\ x=1,\ \varepsilon=10^{-5}$, **(2)** $f(x)=\cos x,\ x_0=0,\ x=2,\ \varepsilon=10^{-6}$, **(3)** $f(x)=e^{x},\ x_0=0,\ x=1,\ \varepsilon=10^{-6}$, **(4)** $f(x)=e^{-x},\ x_0=0,\ x=2,\ \varepsilon=10^{-6}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

20. Оцените величину остаточного члена формулы Тейлора $R_{n+1}(x|x_0)=f(x)-P_n(x|x_0)$, $P_n(x|x_0)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, принимая $\max|R_{n+1}(x|x_0)|=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\max_{\xi\in[0;x_0]}\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|$, и найдите наименьшее n, при котором $\max|R_{n+1}(x|x_0)|<\varepsilon$, если **(1)** $f(x)=\sin x,\ x_0=0,\ x=2,\ \varepsilon=10^{-5}$, **(2)** $f(x)=\cos x,\ x_0=0,\ x=1,\ \varepsilon=10^{-6}$, **(3)** $f(x)=e^{x},\ x_0=0,\ x=2,\ \varepsilon=10^{-6}$, **(4)** $f(x)=e^{-x},\ x_0=0,\ x=1,\ \varepsilon=10^{-6}$,

6. Многочлен Тейлора, оценка максимального значения слагаемого

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

21. Найдите номер и оцените величину наибольшего по модулю слагаемого многочлена Тейлора $P_n(x|x_0)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, если **(1)** $f(x)=\cos x,\ x_0=0,\ x=9$, **(2)** $f(x)=e^{-x},\ x_0=0,\ x=11$, **(3)** $f(x)=\frac{1}{(1-x)^3},\ x_0=0,\ x=0{,}9$. Обратите внимание на то, что многочлен Тейлора для функции $f(x)=g'(x)$ равен $P=P_n(f|x|x_0)=P_n(g'|x|x_0)$, $P=f'(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(f')^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, $P=f'(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, $P=f'(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(k+1)(x-x_0)^k$, $P=\left\{(x-x_0)f'(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}\right\}'$, $P=\left\{\sum_{k=1}^{n+1}\frac{f^{k}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right\}'$, то есть он равен производной от многочлена Тейлора для функции $g(x)$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

22. Найдите номер и оцените величину наибольшего по модулю слагаемого многочлена Тейлора $P_n(x|x_0)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, если **(1)** $f(x)=\sin x,\ x_0=0,\ x=7$, **(2)** $f(x)=e^{x},\ x_0=0,\ x=10$, **(3)** $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2},\ x_0=0,\ x=0{,}9$, Обратите внимание на то, что многочлен Тейлора для функции $f(x)=g'(x)$ равен $P=P_n(f|x|x_0)=P_n(g'|x|x_0)$, $P=f'(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(f')^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, $P=f'(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, $P=f'(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(k+1)(x-x_0)^k$, $P=\left\{(x-x_0)f'(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}\right\}'$, $P=\left\{\sum_{k=1}^{n+1}\frac{f^{k}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right\}'$, то есть он равен производной от многочлена Тейлора для функции $g(x)$.