2008-2009 Курс 1, семестр 2, семинар 11
Тема: Последовательности-1

1. Вычисление предела последовательности

С Для обязательного разбора на семинаре.

1. Найдите наименьшее N такое, что $\forall n \geqslant N \Longrightarrow |x_n - b| < \varepsilon$, если **(1)** $x_n = \frac{1}{n}$, $b = 0$ и $\varepsilon = 10^{-3}$, **(2)** $x_n = \frac{3n+2}{n+1}$, $b = 3$ и $\varepsilon = 10^{-3}$, **(3)** $x_n = \frac{n^3+n}{n^3+1}$, $b = 1$ и $\varepsilon = 10^{-3}$, **(4)** $x_n = \frac{n}{n^2+1}$, $b = 0$ и $\varepsilon = 10^{-3}$,

2. Найдите наименьшее N такое, что $\forall n \geqslant N \Longrightarrow |x_n - b| < \varepsilon$, если **(1)** $x_n = \frac{1}{2^n}$, $b = 0$ и $\varepsilon = 10^{-3}$, **(2)** $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $b = 0$ и $\varepsilon = 10^{-3}$, **(3)** $x_n = \ln n - \ln(n-1)$, $b = 0$ и $\varepsilon = 10^{-3}$, **(4)** $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$, $b = 0$ и $\varepsilon = 10^{-3}$, **(5)** $x_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}$, $b = 0$ и $\varepsilon = 10^{-3}$, **(6)** $x_n = \sin\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, $b = \sin 1$ и $\varepsilon = 10^{-3}$,

3. Укажите наименьшее значение $N : \forall n \geqslant N \Longrightarrow \left|\frac{40n^2+7}{8n^2+3} - 5\right| < 10^{-4}$.

4. Найдите **(1)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-5n+6}{n^2-7n+10}$, **(2)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2-2n+1}{n^2-2n+3}$, **(3)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2-2n+1}{n^3-2n^2+3n-4}$,

5. Найдите **(1)** $\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{4+\frac{1}{n}} - 2\right)$, **(2)** $\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[3]{27+\frac{1}{n}} - \sqrt{9+\frac{1}{n}}\right)$,
(3) $\lim_{n\to+\infty}(n - \sqrt{n^2-n})$, **(4)** $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+3n+2} - \sqrt{n^2-n-2})$,
(5) $\lim_{n\to+\infty} n^2(\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt[3]{n^3-2})$, **(6)** $\lim_{n\to+\infty} n^3(\sqrt{n^2-1} - 2n + \sqrt{n^2+1})$.

Д Обязательное задание на дом.

6. Найдите наименьшее N такое, что $\forall n \geqslant N \Longrightarrow |x_n - b| < \varepsilon$, если **(1)** $x_n = \frac{1}{n^2}$, $b = 0$ и $\varepsilon = 10^{-3}$, **(2)** $x_n = \frac{n-1}{n}$, $b = 1$ и $\varepsilon = 10^{-3}$, **(3)** $x_n = \frac{n^2+1}{n^2-1}$, $b = 1$ и $\varepsilon = 10^{-3}$, **(4)** $x_n = \frac{n}{n^2+3n+2}$, $b = 0$ и $\varepsilon = 10^{-3}$,

7. Найдите наименьшее N такое, что $\forall n \geqslant N \Longrightarrow |x_n - b| < \varepsilon$, если **(1)** $x_n = \frac{1}{3^n}$, $b = 0$ и $\varepsilon = 10^{-10}$, **(2)** $x_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, $b = 0$ и $\varepsilon = 10^{-5}$, **(3)** $x_n = \ln(n+1) - \ln(n-1)$, $b = 0$ и $\varepsilon = 10^{-2}$,
(4) $x_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}$, $b = 0$ и $\varepsilon = 10^{-4}$, **(5)** $x_n = \sqrt[3]{n^2+n} - \sqrt[3]{n^2-n}$, $b = 0$ и $\varepsilon = 10^{-3}$,
(6) $x_n = \cos\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, $b = \sin 1$ и $\varepsilon = 10^{-3}$,

8. Укажите наименьшее значение $N : \forall n \geqslant N \Longrightarrow \left|\frac{42n^2+58}{7n^2+5} - 6\right| < 10^{-4}$.

9. Найдите **(1)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-8n+15}{n^2-10n+21}$, **(2)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2-3n+4}{3n^2-2n+1}$, **(3)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+n^2+n+1}{n^3+n^4+n^5+n^6}$,

10. Найдите **(1)** $\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{9+\frac{2}{n}} - 3\right)$, **(2)** $\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[3]{8+\frac{3}{n}} - \sqrt{4+\frac{1}{n}}\right)$,
(3) $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+2n} - n)$, **(4)** $\lim_{n\to+\infty} n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-2})$, **(5)** $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{n^3+n^2} - \sqrt[3]{n^3-n^2})$,
(6) $\lim_{n\to+\infty} n\sqrt{n}(\sqrt{n-1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n+1})$.

2. Бесконечно большие последовательности

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

11. Найдите наименьшее N такое, что $\forall n \geqslant N \Longrightarrow x_n > A$, если **(1)** $x_n = 2n$, $A = 1001$, **(2)** $x_n = n^2$, $A = 1000001$, **(3)** $x_n = \sqrt{n}$, $A = 100$, **(4)** $x_n = 2^n$, $A = 1001$, **(5)** $x_n = \log_2 n$, $A = 10$, **(6)** $x_n = n^2 - 6n + 9$, $A = 10000$.

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

12. Найдите наименьшее N такое, что $\forall n \geqslant N \Longrightarrow x_n > A$, если **(1)** $x_n = 3n - 2$, $A = 1001$, **(2)** $x_n = n^3$, $A = 1000001$, **(3)** $x_n = \sqrt[3]{n}$, $A = 101$, **(4)** $x_n = 3^n$, $A = 1001$, **(5)** $x_n = \log_{10} n$, $A = 10$,
(6) $x_n = n^2 - 4n + 4$, $A = 1000$.

3. Второй замечательный предел для последовательности

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

13. Найдите **(1)** $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n}$, **(2)** $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^{4n}$, **(3)** $\lim_{n\to+\infty}\left(1+n\right)^{1/n}$.

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

14. Найдите **(1)** $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{6n}$, **(2)** $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)^{6n^2}$, **(3)** $\lim_{n\to+\infty}\left(1+2n\right)^{3/n}$.

4. Эталонные последовательности, 1

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

15. Пусть $x_n = \sqrt[n]{n}$. Укажите какое нибудь $N: \ \forall n \geqslant N \Longrightarrow x_n \in (1;\ 1{,}001)$.

16. Укажите какое-нибудь значение $N : \forall n \geqslant N \Longrightarrow \frac{1}{n!} < 10^{-3}$.

17. Укажите какое-нибудь значение $N : \forall n \geqslant N \Longrightarrow \frac{1}{n^n} < \frac{1}{257}$.

18. Найдите **(1)** $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$, **(2)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n}$, **(3)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^{17}}{n^{0,01}}$, **(4)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n}$, **(5)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{2008}}{(1{,}001)^n}$, **(6)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n}$, **(7)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{2006}}{n!}$, **(8)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{2006}}{n^n}$, **(9)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n!}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

19. Пусть $x_n = \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$. Укажите какое нибудь $N: \ \forall n \geqslant N \Longrightarrow x_n \in (0{,}999;\ 1)$.

20. Укажите какое-нибудь значение $N : \forall n \geqslant N \Longrightarrow \frac{1}{n!} < 10^{-6}$.

21. Укажите какое-нибудь значение $N : \forall n \geqslant N \Longrightarrow n^n > 3100$.

22. Найдите **(1)** $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$, **(2)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\ln n}$, **(3)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^{0,01}}$, **(4)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{n}$, **(5)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{0,1}}{(1{,}1)^n}$, **(6)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{n^n}$, **(7)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3 3^n \ln n}{n!}$, **(8)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{n^n}$, **(9)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^n}$.

5. Эталонные подпоследовательности, 2

$\boxed{\text{С}}$ **Для обязательного разбора на семинаре.**

23. Для каждой последовательности укажите все верные утверждения:
(I) $x_n = \frac{2^n}{n^{2005}}$ **(II)** $x_n = \frac{\log_{2005} n}{n^{1,01}}$ **(III)** $x_n = \frac{n!}{n^n}$ **(IV)** $x_n = \frac{0{,}9^n}{n^{0,9}}$ **(V)** $x_n = \frac{n^n}{2^n}$
(VI) $x_n = \frac{(1{,}0001)^n}{\log_2 n}$, $n \geqslant 2$

(a) x_n – бесконечно большая (б.б.) положительная. **(b)** x_n является б.б., но не является б.б. положительной.
(c) x_n – неограниченная, но не является б.б. **(d)** x_n – ограниченная, но не имеет предела.
(e) x_n сходится, но не является бесконечно малой. **(f)** x_n – бесконечно малая.

$\boxed{\text{Д}}$ **Обязательное задание на дом.**

24. Для каждой последовательности укажите все верные утверждения:
(I) $x_n = \frac{n^{2005}}{2005^n}$ **(II)** $x_n = \frac{\sqrt{n}}{\log_3 n}$, $n \geqslant 2$ **(III)** $x_n = \frac{n!}{n^n}$ **(IV)** $x_n = \frac{n!}{4^n}$ **(V)** $x_n = \frac{2^n}{n^n}$ **(VI)** $x_n = \frac{\log_{2005} n}{2^n}$

(a) x_n – бесконечно большая (б.б.) положительная. **(b)** x_n является б.б., но не является б.б. положительной.
(c) x_n – неограниченная, но не является б.б. **(d)** x_n – ограниченная, но не имеет предела.
(e) x_n сходится, но не является бесконечно малой. **(f)** x_n – бесконечно малая.

6. Эталонные последовательности, 3

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

25. Пусть $x_n = \frac{\ln n}{n^2}$. Укажите все верные утверждения: **(a)** $x_n = o\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)$ **(b)** $x_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ **(c)** $x_n = o\left(\frac{\ln n}{n^3\cdot\sqrt{n}}\right)$ **(d)** $x_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ **(e)** $x_n = o\left(\frac{1}{n^3\cdot\ln n}\right)$ **(f)** $x_n = o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

26. Пусть $x_n = \frac{\ln n}{n^3}$. Укажите все верные утверждения: **(a)** $x_n = o\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)$ **(b)** $x_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ **(c)** $x_n = o\left(\frac{\ln n}{n^3\cdot\sqrt{n}}\right)$ **(d)** $x_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ **(e)** $x_n = o\left(\frac{1}{n^3\cdot\ln n}\right)$ **(f)** $x_n = o\left(\frac{1}{n^3}\right)$