

2008-2009 Курс 1, семестр 2, семинар 11
Тема: Последовательности-2

1. Выделение сходящейся подпоследовательности

С Для обязательного разбора на семинаре.

1. Постройте сходящуюся подпоследовательность последовательности (1) $x_n = \frac{n-1}{n}$, (2) $x_n = \sin \frac{\pi n}{6}$, (3) $x_n = (-1)^n$.

Д Обязательное задание на дом.

2. Постройте сходящуюся подпоследовательность последовательности (1) $x_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$, (2) $x_n = \sin \frac{\pi n}{12}$, (3) $x_n = (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n}$.

2. Предельные точки последовательности, 1

С Для обязательного разбора на семинаре.

3. Приведите примеры последовательностей, у которых имеется

1 единственная предельная точка – вещественное число

2 ровно две предельных точки, и обе – вещественные числа

3 счетное число предельных точек

4 несчетное число предельных точек

5 ровно одна предельная точка – вещественное число и предельная точка $+\infty$

6 все предельные точки которых образуют множество $[0; 1]$

4. Докажите, что последовательность (1) $x_n = \sin \frac{\pi n^2}{6}$, (2) $x_n = \sin \frac{\pi n}{6}$, (3) $x_n = \sum_{k=1}^n \sin \frac{\pi k}{6}$, имеет конечное число предельных точек, но не имеет предела.

Д Обязательное задание на дом.

5. Приведите примеры последовательностей, у которых имеется

1 единственная предельная точка – вещественное число

2 ровно две предельных точки, и обе – вещественные числа

3 счетное число предельных точек

4 несчетное число предельных точек

5 ровно одна предельная точка – вещественное число и предельная точка $+\infty$

6 все предельные точки которых образуют множество $[0; 1]$

6. Докажите, что последовательность (1) $x_n = \sin \frac{\pi n^2}{13}$, (2) $x_n = \cos \frac{\pi n}{8}$, (3) $x_n = \sum_{k=1}^n \cos \frac{\pi k}{8}$, имеет конечное число предельных точек, но не имеет предела.

3. Предельные точки последовательности, 2

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

7. Найдите множество всех предельных точек последовательности (1) $x_n = \frac{n-1}{n}$, (2) $x_n = \sin \frac{\pi n}{6}$, (3) $x_n = (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n}$, (4) $y_1 = 0, y_{n+1} = y_n + \frac{1}{n}, x_n =$ дробная часть(y_n). (5) $x_n = \overline{a_1}$, если в десятичной записи $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}$. (6) $x_n = \overline{a_1 a_0}$, если в десятичной записи $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}$.

(7) 1; 1; 2; 1; 2; 3; 1; 2; 3; 4; ... Найдите верхний и нижний пределы этих последовательностей.

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

8. Найдите множество всех предельных точек последовательности (1) $x_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$, (2) $x_n = \cos \frac{\pi n}{12}$,

(3) $x_n = (-1)^n \sqrt[n]{n}$, (4) $y_n = \ln n, x_n =$ дробная часть(y_n). (5) $x_n = \overline{a_0}$, если в десятичной записи

$n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}$. (6) $x_n = \overline{a_2 a_1 a_0}$, если в десятичной записи $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}$.

(7) 0; -1; 0; 1; -2; -1; 0; 1; 2; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; ... Найдите верхний и нижний пределы этих последовательностей.

4. Монотонные последовательности

9. Докажите неравенство Бернулли $(1+x)^n \geq 1+nx$ при $x \geq -1$ и $n \geq 1$.

С Сложные задачи для разбора на семинаре.

T531 (2007-2008)

10. Докажите, что последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ монотонна.

11. Докажите, что последовательность $x_1 = 13$, $x_n = \sqrt{12 + x_{n-1}}$, $n \geq 2$, монотонна и ограничена. Найдите предел.

12. Докажите, что последовательность $x_1 = 18$, $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{36}{x_{n-1}}\right)$, $n \geq 2$, монотонна и ограничена. Найдите предел.

Д Сложные задачи для самостоятельного решения.

13. Докажите, что последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ монотонна.

14. Докажите, что последовательность $x_1 = 16$, $x_n = \sqrt{20 + x_{n-1}}$, $n \geq 2$, монотонна и ограничена. Найдите предел.

15. Докажите, что последовательность $x_1 = 27$, $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{81}{x_{n-1}}\right)$, $n \geq 2$, монотонна и ограничена. Найдите предел.

5. Монотонные подпоследовательности

С Сложные задачи для разбора на семинаре.

16. Опишите все возможные варианты расположения предельных точек ограниченной последовательности x_k , для которой подпоследовательность x_{2k} является возрастающей, а подпоследовательность x_{2k+1} является убывающей. Приведите примеры.

Д Сложные задачи для самостоятельного решения.

17. Опишите все возможные варианты расположения предельных точек ограниченной последовательности x_k , для которой подпоследовательности x_{3k} и x_{3k+1} являются возрастающими, а подпоследовательность x_{3k+2} является убывающей. Приведите примеры. Ответ обоснуйте.

6. Перестановка членов последовательности

С Сложные задачи для разбора на семинаре.

18. Приведите пример последовательности $x_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, члены которой можно переставить так, что последовательность с переставленными членами этим свойством не обладает, т.е. $y_n \neq o\left(\frac{1}{n}\right)$

Д Сложные задачи для самостоятельного решения.

19. Приведите пример последовательности $x_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, члены которой можно переставить так, что последовательность с переставленными членами $y_n \neq o\left(\frac{1}{n}\right)$