2008-2009 Курс 1, семестр 1, семинар 07
Тема: Теоремы о непрерывных и дифференцируемых функциях

1. Формула Лагранжа

С Для обязательного разбора на семинаре.

1. Используя формулу конечных приращений, дайте оценку величины $f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)\in\left[(b-a)\inf\limits_{(a;b)}f'(x);\ (b-a)\sup\limits_{(a;b)}f'(x)\right]$, если

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $a=99$, $b=101$. **(2)** $f(x)=\sqrt{x}$, $a=16$, $b=25$.

(3) $f(x)=\ln x$, $a=e^2$, $b=e^3$. **(4)** $f(x)=\sin x$, $a=\dfrac{\pi}{6}$, $b=\dfrac{\pi}{3}$.

(5) $f(x)=\arcsin x$, $a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Д Обязательное задание на дом.

2. Используя формулу конечных приращений, дайте оценку величины $f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)\in\left[(b-a)\inf\limits_{(a;b)}f'(x);\ (b-a)\sup\limits_{(a;b)}f'(x)\right]$, если

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $a=\dfrac{10}{11}$, $b=\dfrac{10}{9}$. **(2)** $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $a=8$, $b=27$.

(3) $f(x)=\ln x$, $a=10$, $b=12{,}5$. **(4)** $f(x)=\cos x$, $a=\dfrac{\pi}{6}$, $b=\dfrac{\pi}{3}$.

(5) $f(x)=\operatorname{arctg} x$, $a=9$, $b=10$.

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

3. Используя формулу конечных приращений, оцените $f(b)-f(a)$, если $f(x)=3x-x^3,\ a=-1,\ b=1$.

4. Используя формулу конечных приращений, оцените $f(b)-f(a)$, если $f(x)=\dfrac{e^2}{e^2-1}\ln x,\ a=e^3,\ b=e^5$.

5. Используя формулу конечных приращений, оцените $f(b)-f(a)$, если $f(x)=\ln(1+x^2),\ a=\dfrac{3}{4},\ b=\dfrac{3}{2}$.

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

6. Используя формулу конечных приращений, оцените $f(b)-f(a)$, если $f(x)=5x^3-3x^5,\ a=-1,\ b=1$.

7. Используя формулу конечных приращений, оцените $f(b)-f(a)$, если $f(x)=24\arcsin x,\ a=\dfrac{3}{5},\ b=\dfrac{4}{5}$.

8. Используя формулу конечных приращений, оцените $f(b)-f(a)$, если $f(x)=3x^2-x^3,\ a=\dfrac{1}{2},\ b=\dfrac{3}{2}$.

С Сложные задачи для разбора на семинаре.

9. Используя формулу конечных приращений, оцените $f(b)-f(a)$, если $f(x)=x^2(5-x)^3,\ a=0,\ b=5$.

Д Сложные задачи для самостоятельного решения.

10. Используя формулу конечных приращений, оцените $f(b)-f(a)$, если $f(x)=x^5(11-x)^6,\ a=0,\ b=11$.

2. Формула Коши

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

11. Используя обобщенную формулу конечных приращений (Коши),
$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in \left[\inf\limits_{(a;b)} \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}; \sup\limits_{(a;b)} \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right]$, дайте оценку величины
(1) $\dfrac{b^3-a^3}{b^2-a^2}$, $a=5$, $b=6$. **(2)** $\dfrac{\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a}{\ln(1+b^2)-\ln(1+a^2)}$, $a=10$, $b=11$.
(3) $\dfrac{\ln b - \ln a}{b^2-a^2}$, $a=101$, $b=99$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

12. Используя обобщенную формулу конечных приращений (Коши),
$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in \left[\inf\limits_{(a;b)} \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}; \sup\limits_{(a;b)} \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right]$, дайте оценку величины
(1) $\dfrac{b^4-a^4}{b^2-a^2}$, $a=5$, $b=6$. **(2)** $\dfrac{\ln b-\ln a}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$, $a=9$, $b=16$. **(3)** $\dfrac{\ln b - \ln a}{\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a}$, $a=\dfrac{3}{5}$, $b=\dfrac{4}{5}$.

3. Асимптотические формулы (повторение темы)

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

13. Является ли верным утверждение: **(1)** $(\ln x)^{-1} = o(x)$ при $x\to 0$, **(2)** $x^{-1} = o((\ln x)^{-1})$ при $x\to+\infty$, **(3)** $\ln(1-x) = -x + o(1)$ при $x\to 0$, **(4)** $\ln(1-x) = -x+o(x^2)$ при $x\to 0$,
(5) $\ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ при $x\to 0$, **(6)** $\ln(1+x) = x + \dfrac{x^2}{2} + o(x)$ при $x \to 0$,
(7) $\ln(1+x) = x + o(x^2)$ при $x\to+\infty$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

14. Является ли верным утверждение: **(1)** $(\ln x)^{-1} = o(x^{-1})$ при $x\to+\infty$,
(2) $\dfrac{1}{x\ln x} = o(\dfrac{1}{x})$ при $x\to+\infty$, **(3)** $\ln(1-x) = -x+o(x)$ при $x\to 0$,
(4) $\ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ при $x\to 0$, **(5)** $\ln(1+x) = 2x+3x^2+o(1)$ при $x\to 0$,
(6) $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = o(1)$ при $x\to+\infty$,

4. Применение асимптотических формул для вычисления пределов

Соглашение об асимптотических формулах. При решении задач этого и всех последующих разделов можно использовать формулы

(1) $\sin x = x + o(x)$, $\sin x = x+o(x^2)$, $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$, $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$,
$\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o(x^5)$, $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o(x^6)$,
(2) $\arcsin x = x + o(x^2)$, $\arcsin x = x + \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^5}{40} + o(x^6)$,
(3) $\cos x = 1 + o(x)$, $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^5)$,
(4) $\operatorname{tg} x = x + o(x^2)$, $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^6)$,

(5) $\operatorname{arctg} x = x + o(x^2)$, $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + o(x^6)$,

(6) $\dfrac{1}{1-x} = 1 + o(1)$, $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$, $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$,
$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$,

(7) $\dfrac{1}{1+x} = 1 + o(1)$, $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$, $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$,
$\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$,

(8) $\sqrt{1+x} = 1 + o(1)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} + o(x)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + o(x^2)$,

(9) $\sqrt{1-x} = 1 + o(1)$, $\sqrt{1-x} = 1 - \dfrac{x}{2} + o(x)$, $\sqrt{1-x} = 1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + o(x^2)$,

(10) $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \dfrac{x}{3} + o(x)$, $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \dfrac{x}{3} - \dfrac{2x^2}{27} + o(x^2)$,

(11) $\sqrt[3]{1-x} = 1 - \dfrac{x}{3} + o(x)$, $\sqrt[3]{1-x} = 1 - \dfrac{x}{3} - \dfrac{2x^2}{27} + o(x^2)$,

(12) $\sqrt[n]{1+x} = 1 + \dfrac{x}{n} + o(x)$, $\sqrt[n]{1-x} = 1 - \dfrac{x}{n} + o(x)$, $\sqrt[n]{1+x} = 1 + \dfrac{x}{n} - \dfrac{(n-1)x^2}{2n^2} + o(x^2)$,
$\sqrt[n]{1-x} = 1 - \dfrac{x}{n} - \dfrac{(n-1)x^2}{2n^2} + o(x^2)$,

(13) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$, $-\ln(1-x) = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$,

(14) $e^x = 1 + x + o(x)$, $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$,
$e^{-x} = 1 - x + o(x)$, $e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, $e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$,

(15) $(1+x)^p = 1 + px + o(x)$, $(1+x)^p = 1 + px + \dfrac{p(p-1)}{2}x^2 + o(x^2)$,
$(1+x)^p = 1 + px + \dfrac{p(p-1)}{2}x^2 + \dfrac{p(p-1)(p-1)}{6}x^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$.

Эти формулы называются "асимптотическими формулами". Каждая из этих формул является также "формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано". Можно использовать формулы первого и второго замечательных пределов, $\dfrac{\sin x}{x} = 1 + o(1)$ при $x \to 0$, $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e + o(1)$ при $x \to 0$, $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e + o(1)$ при $x \to +\infty$, а также формулы $(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1 + o(1)$ при $x \to +\infty$, $x^{\frac{1}{x}} = 1 + o(1)$ при $x \to +\infty$. Доказательство каждой из этих формул будет дано в соответствующем месте нашего курса.

$\boxed{\text{C}}$ **Для обязательного разбора на семинаре.**

15. Найдите, используя асимптотические формулы, **(1)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2\sin 3x)}{\sin(3\sin 2x)}$,
(3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x^2}$, **(4)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}$, **(5)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x - \sin x}{x}$, **(6)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x}{\sin 3x + \sin 2x}$.

16. Найдите, используя асимптотические формулы, **(1)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x - 2\cos 2x + \cos x}{x^2}$,
(2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\sin 5x - 5\sin 3x}{x^3}$, **(3)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\sin 5x + 5\sin 3x - \sin 30x}{x^3}$, **(4)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$,

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x+\sin x-\sin 2x}{x^3}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Обязательное задание на дом.**

17. Найдите, используя асимптотические формулы, **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 5x}{x}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 3x}{x^2}$, **(3)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 6x}{\operatorname{tg} 3x}$, **(4)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(12x^2)}{\operatorname{tg}(3x^2)}$, **(5)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin 2x}{x}$, **(6)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} 3x}$,

18. Найдите, используя асимптотические формулы,
(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x+\cos 4x-\cos x-\cos 3x}{x^2}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 2x+2\sin 3x-12x\cos x}{x^3}$, **(3)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} x-\sin x-\sin 2x}{x^3}$, **(4)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$.

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

19. Используя асимптотические формулы, найдите $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+7x^2}-\sqrt[3]{x^3+3x^2}\right)$.

20. Найдите, используя асимптотические формулы, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(3x)-3\arcsin x}{\operatorname{tg}(2x)-2\operatorname{tg} x}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

21. Используя асимптотические формулы, найдите $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)$

22. Найдите, используя асимптотические формулы, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(3x)-3\operatorname{arctg} x}{\sin(2x)-2\sin x}$.

23. Найдите, используя асимптотические формулы, **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1+2x}}{x}$, **(3)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$.

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

24. Найдите, используя асимптотические формулы, **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\arcsin x-2x}{x^5}$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

25. Найдите, используя асимптотические формулы, **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x+\operatorname{arctg} x-2x}{x^5}$.

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

26. Найдите, используя асимптотические формулы, **(1)** $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{e^x-x^e}{x-e}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{e^{2x}-x^{2e}}{(x-e)^2}$, **(3)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{e^2x}-(ex)^{e^2}}{(x-1)^2}$. **(4)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$, **(5)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\cos x}-e}{x^2}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

27. Найдите, используя асимптотические формулы, **(1)** $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{e-x}{e^x-x^e}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{ex}-(ex)^e}{(x-1)^2}$, **(3)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$, **(4)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x^3}$, **(5)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1-x}{x^2}$,

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

28. Используя асимптотические формулы, представьте функцию $f(x)$ в виде $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}C_kx^k+o(x^n)$ для $f(x)=\sin(\sin x)$ и $n=6$.

29. Используя асимптотические формулы, представьте функцию $f(x)$ в виде $f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k x^k + o(x^n)$ для $f(x) = \sin(2\operatorname{tg} x)$ и $n = 6$.

Д Сложные задачи для самостоятельного решения.

30. Используя асимптотические формулы, представьте функцию $f(x)$ в виде $f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k x^k + o(x^n)$ для $f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)$ и $n = 6$.

31. Используя асимптотические формулы, представьте функцию $f(x)$ в виде $f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k x^k + o(x^n)$ для $f(x) = \operatorname{tg}(2\sin x)$ и $n = 6$.

2008-2009 Курс 1, семестр 1, семинар 08
Тема: Экстремум дифференцируемой функции
Исследование монотонности, точки локального экстремума

1. Степенные функции

С **Для обязательного разбора на семинаре.**

1. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума. **(1)** $f(x) = 3x^2 - 2x^3$, **(2)** $f(x) = 2x^6 - 3x^4$, **(3)** $f(x) = 3x^5 - 5x^3$, **(4)** $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, **(5)** $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, **(6)** $f(x) = x^6 - 39x^4 + 216x^2$, **(7)** $f(x) = x(4-x)^3$, **(8)** $f(x) = x^2(5-x)^3$, **(9)** $f(x) = (x-2)^3(10-x)^5$, **(10)** $f(x) = x(x-1)(x+1)$, **(11)** $f(x) = (3-x)\sqrt{x}$.

Д **Обязательное задание на дом.**

2. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума. **(1)** $f(x) = 6x^5 - 5x^6$, **(2)** $f(x) = x^4 - 2x^2$, **(3)** $f(x) = x^3 - 3x$, **(4)** $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, **(5)** $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$, **(6)** $f(x) = x^6 - 6x^4 + 9x^2$, **(7)** $f(x) = x(6-x)^2$, **(8)** $f(x) = x^2(4-x)^2$, **(9)** $f(x) = (x-3)^3(10-x)^4$, **(10)** $f(x) = (4-x)\sqrt[3]{x}$, **(11)** $f(x) = x(x-3)(x+2)$.

С **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

3. Найдите первую и вторую производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума. Найдите точки минимума и максимума первой производной, если $f(x) = x^5(11-x)^6$.

4. Найдите первую и вторую производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума. Найдите точки, в которых втоая производная обращается в нуль, если $f(x) = x(12-x)^3$.

Д **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

5. Найдите первую и вторую производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума. Найдите точки минимума и максимума первой производной, если $f(x) = x^5(11-x)^6$.

6. Найдите первую и вторую производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума. Найдите точки, в которых втоая производная обращается в нуль, если $f(x) = x(10-x)^4$.

2. Дробно-степенные функции

С **Для обязательного разбора на семинаре.**

7. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, если **(1)** $f(x) = 4x + \dfrac{9}{x}$, **(2)** $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$, **(3)** $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, **(4)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2-8x+15}$, **(5)** $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$, **(6)** $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x^2}$, **(7)** $f(x) = \dfrac{3}{x^2+x+1}$.

Д **Обязательное задание на дом.**

8. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, если **(1)** $f(x) = 25x + \dfrac{36}{x}$, **(2)** $f(x) = \dfrac{2}{x^4+1}$, **(3)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+36}$, **(4)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$, **(5)** $f(x) = \dfrac{x}{x^2-5x+4}$, **(6)** $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^3}$, **(7)** $f(x) = \dfrac{3}{x^2-x+1}$.

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

9. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, если **(1)** $f(x) = \dfrac{x^5}{1-x}$, **(2)** $f(x) = \dfrac{1-x}{x^5}$,
(3) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, **(4)** $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$,

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

10. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, если **(1)** $f(x) = \dfrac{x^7}{1-x}$, **(2)** $f(x) = \dfrac{1-x}{x^7}$,
(3) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$, **(4)** $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$,

3. Показательные и логарифмические функции

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

11. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, **(1)** $f(x) = x^2 \ln x$, **(2)** $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$, **(3)** $f(x) = xe^{-x}$,
(4) $f(x) = x^2e^{-x}$, **(5)** $f(x) = x^3e^{-x}$, **(6)** $f(x) = \sqrt[3]{x}e^{-x}$.

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

12. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, **(1)** $f(x) = x \ln x$, **(2)** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, **(3)** $f(x) = xe^{x}$,
(4) $f(x) = x^2e^{x}$, **(5)** $f(x) = x^3e^{x}$, **(6)** $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$.

С Сложные задачи для разбора на семинаре.

13. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, $f(x) = x^2 \ln |x|$, $f(0) = 0$.

Д Сложные задачи для самостоятельного решения.

14. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, $f(x) = x \ln |x|$, $f(0) = 0$.

4. Тригонометрические функции

С Для обязательного разбора на семинаре.

15. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, **(1)** $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$, **(2)** $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$,
(3) $f(x) = 4\sin^3 x - 3\sin x$,

Д Обязательное задание на дом.

16. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, **(1)** $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$, **(2)** $f(x) = \sin^5 x + \cos^5 x$,
(3) $f(x) = 2\cos^3 x - 3\cos x$,

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

17. Найдите значение выражения $x \operatorname{tg} x$ в наименьшей положительной точке локального экстремума функции $f(x) = x^2 \cos x$.

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

18. Найдите значение выражения $x \operatorname{tg} x$ в наименьшей положительной точке локального экстремума функции $f(x) = x^5 \cos x$.

С Сложные задачи для разбора на семинаре.

19. Не пользуясь компьютером, найдите наименьшую положительную точку локального экстремума функции $f(x) = x^{0{,}01}\cos x$ с точностью не хуже 10^{-6}.

Д Сложные задачи для самостоятельного решения.

20. Не пользуясь компьютером, найдите наименьшую положительную точку локального экстремума функции $f(x) = x^{0{,}0001}\cos x$ с точностью не хуже 10^{-8}.

2008-2009 Курс 1, семестр 2, семинар 09
Тема: Правило Лопиталя

1. Вычисление предела

$\boxed{\text{С}}$ **Для обязательного разбора на семинаре.**

1. Найдите, (1) используя правило Лопиталя, (2) используя асимптотические формулы, **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2\sin 3x)}{\sin(3\sin 2x)}$, **(3)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$, **(4)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}$, **(5)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-\sin x}{x}$, **(6)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} x}{\sin 3x+\sin 2x}$.

2. Найдите, (1) используя правило Лопиталя, (2) используя асимптотические формулы, **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-2\cos 2x+\cos x}{x^2}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 5x-5\sin 3x}{x^3}$, **(3)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 5x+5\sin 3x-\sin 30x}{x^3}$, **(4)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$, **(5)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x+\sin x-\sin 2x}{x^3}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Обязательное задание на дом.**

3. Найдите, (1) используя правило Лопиталя, (2) используя асимптотические формулы, **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 5x}{x}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 3x}{x^2}$, **(3)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 6x}{\operatorname{tg} 3x}$, **(4)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(12x^2)}{\operatorname{tg}(3x^2)}$, **(5)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin 2x}{x}$, **(6)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} 3x}$,

4. Найдите, (1) используя правило Лопиталя, (2) используя асимптотические формулы, **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x+\cos 4x-\cos x-\cos 3x}{x^2}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 2x+2\sin 3x-12x\cos x}{x^3}$, **(3)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} x-\sin x-\sin 2x}{x^3}$, **(4)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$.

$\boxed{\text{С}}$ **Для обязательного разбора на семинаре.**

5. Найдите $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-10x+21}{x^2-12x+35}$.

6. Найдите $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[48]{x}-1}{\sqrt[36]{x}-1}$.

7. Найдите $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\sqrt{3x+19}-7}{x-10}$.

8. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-\sqrt[2]{1+3x}}{x}$

9. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(12x)\sin(9x)}{\sin^2(6x)}$.

10. Найдите **(1)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{0,1}}$, **(3)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^{2008}}{x}$, **(4)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{0,001}}{1{,}001^x}$, **(5)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{2008}}{2^x}$.

11. Найдите, используя правило Лопиталя. **(1)** $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x$, **(2)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$, **(3)** $\lim\limits_{x\to+0} x^{1/x}$, **(4)** $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{\arcsin x-\frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x}}$, **(5)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x-x^2}{x-2}$.

12. Найдите, используя правило Лопиталя, $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{6\sqrt{x+3}-x-12}{(x-6)^2}$.

13. Найдите, используя правило Лопиталя, $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{e^{ex}-x^{e^2}}{(x-e)^2}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Обязательное задание на дом.**

14. Найдите $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-9x+18}{x^2-11x+30}$.

15. Найдите $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[28]{x}-1}{\sqrt[21]{x}-1}$.

16. Найдите $\lim\limits_{x\to 11}\dfrac{x-11}{\sqrt{4x+5}-7}$.

17. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}\cdot\sqrt[2]{1+3x}-1}{x}$

18. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(18x)\sin(12x)}{\sin^2(3x)}$.

19. Найдите **(1)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, **(3)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^{123}}{x^{123}}$, **(4)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{2^x}$,
(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$.

20. Найдите, используя правило Лопиталя. **(1)** $\lim\limits_{x\to+0}x^2\ln x$, **(2)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$, **(3)** $\lim\limits_{x\to+0}x^x$,
(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\big(\operatorname{arctg}x-\dfrac{\pi}{2}\big)$, **(5)** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2^x-x^2}{x-4}$.

21. Найдите, используя правило Лопиталя, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\cos x}-e}{x^2}$

22. Найдите, используя правило Лопиталя, $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4\sqrt{x+1}-x-5}{(x-3)^2}$.

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

23. Найдите, (1) используя правило Лопиталя, (2) используя асимптотические формулы, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(3x)-3\arcsin x}{\operatorname{tg}(2x)-2\operatorname{tg}x}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

24. Найдите, (1) используя правило Лопиталя, (2) используя асимптотические формулы, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(3x)-3\operatorname{arctg}x}{\sin(2x)-2\sin x}$.

25. Найдите, (1) используя правило Лопиталя, (2) используя асимптотические формулы,
(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1+2x}}{x}$, **(3)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$.

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

26. Найдите, (1) используя правило Лопиталя, (2) используя асимптотические формулы,
(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\arcsin x-2x}{x^5}$,

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

27. Найдите, (1) используя правило Лопиталя, (2) используя асимптотические формулы,
(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{arctg} x - 2x}{x^5}$.

С Сложные задачи для разбора на семинаре.

28. Найдите, (1) используя правило Лопиталя, (2) используя асимптотические формулы,
(1) $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{e^x - x^e}{x-e}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{e^{2x} - x^{2e}}{(x-e)^2}$, **(3)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{e^2 x} - (ex)^{e^2}}{(x-1)^2}$. **(4)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}$,
(5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\cos x} - e}{x^2}$.

Д Сложные задачи для самостоятельного решения.

29. Найдите, (1) используя правило Лопиталя, (2) используя асимптотические формулы,
(1) $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{e-x}{e^x - x^e}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{ex} - (ex)^e}{(x-1)^2}$, **(3)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}$, **(4)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}$,
(5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x} - 1 - x}{x^2}$,

2008-2009 Курс 1, семестр 2, семинар 10
Тема: Формула Тейлора

1. Многочлен Тейлора второго порядка

$\boxed{\text{С}}$ **Для обязательного разбора на семинаре.**

1. Найдите **(a)** df, **(b)** d^2f, **(c)** $f(x)+df+\frac{1}{2}d^2f$, **(d)** $f(x+dx)$, если
(1) $f(x)=2x+3$, $x=2$, $dx=3$, **(2)** $f(x)=x^3$, $x=1$, $dx=1$,
(3) $f(x)=x^3$, $x=1$, $dx=0{,}1$, **(4)** $f(x)=\ln x$, $x=1$, $dx=1$,
(5) $f(x)=\sqrt{x}$, $x=16$, $dx=9$, **(6)** $f(x)=\sqrt{1+x}$, $x=1$, $dx=0{,}1$,
(7) $f(x)=e^x$, $x=\ln 10$, $dx=\ln 2$, **(8)** $f(x)=\sin x$, $x=\frac{\pi}{6}$, $dx=\frac{\pi}{6}$,
(9) $f(x)=\arcsin x$, $x=\frac{1}{2}$, $dx=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Обязательное задание на дом.**

2. Найдите **(a)** df, **(b)** d^2f, **(c)** $f(x)+df+\frac{1}{2}d^2f$, **(d)** $f(x+dx)$, если
(1) $f(x)=x$, $x=2$, $dx=3$, **(2)** $f(x)=x^2$, $x=1$, $dx=1$, **(3)** $f(x)=x^3$, $x=0$, $dx=1$,
(4) $f(x)=\ln x$, $x=1$, $dx=2$, **(5)** $f(x)=\sqrt{x}$, $x=9$, $dx=7$,
(6) $f(x)=\sqrt{3+x}$, $x=1$, $dx=0{,}1$, **(7)** $f(x)=e^x$, $x=0$, $dx=1$,
(8) $f(x)=\cos x$, $x=\frac{\pi}{3}$, $dx=\frac{\pi}{6}$, **(9)** $f(x)=\operatorname{arctg} x$, $x=1$, $dx=\sqrt{3}-1$,

2. Многочлен Тейлора

$\boxed{\text{С}}$ **Для обязательного разбора на семинаре.**

3. Найдите значение многочлена Тейлора для функции $f(x)$ с центром $x_0=0$ указанного порядка n в указанной точке x, если **(1)** $f(x)=(2+x)^3,\ x=1,\ n=3.$
(2) $f(x)=(1+x)^{2006},\ x=1,\ n=2005.$ **(3)** $f(x)=e^x,\ x=2,\ n=4.$
(4) $f(x)=xe^x,\ x=2,\ n=4.$ **(5)** $f(x)=\sin x,\ x=1,\ n=5.$
(6) $f(x)=\cos x,\ x=2,\ n=4.$ **(7)** $f(x)=\sqrt{1-x},\ x=0{,}36,\ n=2.$
(8) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}},\ x=0,64,\ n=2.$ **(9)** $f(x)=\frac{1}{1-x},\ x=1,\ n=2006.$
(10) $f(x)=\frac{1}{1+x},\ x=1,\ n=2006.$ **(11)** $f(x)=\ln(1-x),\ x=1,\ n=5.$
(12) $f(x)=\operatorname{arctg}(x),\ x=1,\ n=3.$ **(13)** $f(x)=\arcsin(x),\ x=1,\ n=3.$

$\boxed{\text{Д}}$ **Обязательное задание на дом.**

4. Найдите значение многочлена Тейлора для функции $f(x)$ с центром $x_0=0$ указанного порядка n в указанной точке x, если **(1)** $f(x)=(2+x)^2,\ x=1,\ n=2.$
(2) $f(x)=x^7,\ x=1,\ n=5.$ **(3)** $f(x)=e^{-x},\ x=2,\ n=3.$ **(4)** $f(x)=xe^{-x},\ x=1,\ n=2.$
(5) $f(x)=\sin x,\ x=3,\ n=5.$ **(6)** $f(x)=\cos x,\ x=\frac{1}{2},\ n=2.$
(7) $f(x)=\sqrt{1+x},\ x=0{,}21,\ n=2.$ **(8)** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}},\ x=0,44,\ n=2.$
(9) $f(x)=\frac{1}{1-x},\ x=\frac{1}{2},\ n=3.$ **(10)** $f(x)=\frac{1}{1+x},\ x=\frac{1}{3},\ n=7.$
(11) $f(x)=\ln(1+x),\ x=1,\ n=5.$ **(12)** $f(x)=\operatorname{arctg}(x),\ x=\sqrt{3},\ n=3.$
(13) $f(x)=\arcsin(x),\ x=\frac{1}{2},\ n=3.$

3. Многочлен Тейлора, экономические приложения

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

5. Оцените значение выражения $(1+x)^m$, используя тождество $(1+x)^m = e^{m\ln(1+x)}$. Для оценки $\ln(1+x)$ используйте многочлен Тейлора $P_2 = x - \frac{x^2}{2}$. **(1)** $(1{,}01)^2$, **(2)** $(1{,}01)^{100}$, **(3)** $(0{,}99)^{200}$, **(4)** $(1{,}01)^{100} - (1{,}02)^{50}$, **(5)** $(0{,}99)^{100} - (0{,}98)^{50}$,

6. Билл вложил \$1000 на 100 недель в банк, который начисляет 1% каждую неделю с учетом сложных процентов. По истечении 100 недель капитал Билла будет равен $\$x$, где **(a)** $x \leqslant 1600$. **(b)** $1600 < x \leqslant 1000e^{1/2}$. **(c)** $1000e^{1/2} < x \leqslant 2000$. **(d)** $2000 < x \leqslant 1000e^1$. **(e)** $1000e^1 < x \leqslant 3000$. **(f)** $3000 < x$.

Д **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

7. Оцените значение выражения $(1+x)^m$, используя тождество $(1+x)^m = e^{m\ln(1+x)}$. Для оценки $\ln(1+x)$ используйте многочлен Тейлора $P_2 = x - \frac{x^2}{2}$. **(1)** $(1{,}02)^3$, **(2)** $(1{,}02)^{50}$, **(3)** $(0{,}98)^{100}$, **(4)** $(1{,}1)^{10} - (1{,}2)^5$, **(5)** $(0{,}9)^{10} - (0{,}8)^5$,

8. Джек вложил \$1000 на 50 недель в банк, который начисляет 1% каждую неделю с учетом сложных процентов. По истечении 50 недель капитал Джека будет равен $\$x$, где **(a)** $x \leqslant 1600$. **(b)** $1600 < x \leqslant 1000e^{1/2}$. **(c)** $1000e^{1/2} < x \leqslant 2000$. **(d)** $2000 < x \leqslant 1000e^1$. **(e)** $1000e^1 < x \leqslant 3000$. **(f)** $3000 < x$.

С **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

9. Билл вложил \$1000 на 100 недель в Первый банк, который начисляет 1% каждую неделю с учетом сложных процентов. Джек вложил такую же сумму на тот же срок во Второй банк, начисляющий 2% каждые две недели. По истечении 100 недель Билл будет богаче Джека

(a) не более чем на \$5. **(b)** примерно на \$7. **(c)** примерно на \$14. **(d)** примерно на \$20. **(e)** примерно на \$27. **(f)** более чем на \$30.

10. Султан обещал Шахразаде принимать у нее каждый вечер на хранение сокровища на сумму, равную 1% от имеющегося *у него* на этот момент капитала, и каждое утро возвращать ей ровно 1% от имеющегося *у него* на этот момент капитала. На сколько богаче станет Шахразада через 1001 ночь, если в первый вечер в сокровищнице султана было 1000000 (1 миллион) дукатов?

(a) не более чем на 999 дукатов. **(b)** от 1000 до 2999 дукатов. **(c)** от 3000 до 9999 дукатов. **(d)** от 10000 до 29999 дукатов. **(e)** от 30000 до 99999 дукатов. **(f)** более чем на 100000 дукатов.

Д **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

11. Джек вложил \$1000 на 100 недель в Первый банк, который начисляет 1% каждую неделю с учетом сложных процентов. Билл вложил такую же сумму на тот же срок во Второй банк, начисляющий 0,5% два раза в неделю. По истечении 100 недель Билл будет богаче Джека

(a) не более чем на \$5. **(b)** примерно на \$7. **(c)** примерно на \$14. **(d)** примерно на \$20. **(e)** примерно на \$27. **(f)** более чем на \$30.

12. Султан обещал Шахразаде принимать у нее каждый вечер на хранение сокровища на сумму, равную 10% от имеющегося *у него* на этот момент капитала, и каждое утро возвращать ей ровно 10% от имеющегося *у него* на этот момент капитала. На сколько богаче станет Шахразада через 101 ночь, если в первый вечер в сокровищнице султана было 1000 дукатов?

(a) не более чем на 500 дукатов. **(b)** от 500 до 749 дукатов. **(c)** от 750 до 849 дукатов. **(d)** от 850 до 899 дукатов. **(e)** от 900 до 949 дукатов. **(f)** более чем на 950 дукатов.

С **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

13. Изотоп А имеет период полураспада 99 дней, изотоп Б имеет период полураспада 101 день, в начале имеется две банки, содержащие по одному килограмму каждого из изотопов. Насколько будут различаться веса банок после 9999 дней?.

Д **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

14. Изотоп А имеет период полураспада 999 дней, изотоп Б имеет период полураспада 1001 день, в начале имеется две банки, содержащие по 10^{12} атомов каждого из изотопов. Насколько будут различаться веса банок после $10^6 - 1$ дней?.

4. Многочлен Тейлора, оценка остаточного члена

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

15. Получите нижнюю и верхнюю оценки величины остаточного члена формулы Тейлора в форме Лагранжа, $R_{n+1}(x,x_0) \in \left[\inf\limits_{\xi\in(x_0;x)} \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1};\ \sup\limits_{\xi\in(x_0;x)} \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right]$ для $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, $x = 2$, $n = 3$.

16. Оцените величину остаточного члена формулы Тейлора $R_{n+1}(x|x_0) = f(x) - P_n(x|x_0)$, $P_n(x|x_0) = f(x_0) + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, если **(1)** $f(x) = \sin x,\ x_0 = 0,\ x = 1,\ n = 5.$ **(2)** $f(x) = \sin x,\ x_0 = 0,\ x = \dfrac{1}{2},\ n = 5.$ **(3)** $f(x) = \sin x,\ x_0 = 0,\ x = 2,\ n = 5.$ **(4)** $f(x) = e^x,\ x_0 = 0,\ x = 2,\ n = 6.$ **(5)** $f(x) = \ln(1+x),\ x_0 = 0,\ x = \dfrac{1}{2},\ n = 4.$ **(6)** $f(x) = \dfrac{1}{1-x},\ x_0 = 0,\ x = \dfrac{1}{2},\ n = 4.$

Д **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

17. Получите нижнюю и верхнюю оценки величины остаточного члена формулы Тейлора в форме Лагранжа, $R_{n+1}(x,x_0) \in \left[\inf\limits_{\xi\in(x_0;x)} \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1};\ \sup\limits_{\xi\in(x_0;x)} \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right]$ для $f(x) = e^{-x}$, $x_0 = 0$, $x = 3$, $n = 5$.

18. Оцените величину остаточного члена формулы Тейлора $R_{n+1}(x|x_0) = f(x) - P_n(x|x_0)$, $P_n(x|x_0) = f(x_0) + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, если **(1)** $f(x) = \cos x,\ x_0 = 0,\ x = 1,\ n = 4.$ **(2)** $f(x) = \cos x,\ x_0 = 0,\ x = 1,\ n = 5.$ **(3)** $f(x) = \cos x,\ x_0 = 0,\ x = \dfrac{1}{2},\ n = 4.$ **(4)** $f(x) = \cos x,\ x_0 = 0,\ x = 2,\ n = 4.$ **(5)** $f(x) = e^{-x},\ x_0 = 0,\ x = 2,\ n = 6.$ **(6)** $f(x) = \ln(1-x),\ x_0 = 0,\ x = \dfrac{1}{2},\ n = 4.$ **(7)** $f(x) = \dfrac{1}{1+x},\ x_0 = 0,\ x = \dfrac{1}{2},\ n = 4.$

5. Многочлен Тейлора, оценка порядка для достижения заданной точности

С **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

19. Оцените величину остаточного члена формулы Тейлора $R_{n+1}(x|x_0) = f(x) - P_n(x|x_0)$, $P_n(x|x_0) = f(x_0) + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, принимая

$\max|R_{n+1}(x|x_0)| = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\max_{\xi\in[0;x_0]}\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|$, и найдите наименьшее n, при котором $\max|R_{n+1}(x|x_0)| < \varepsilon$, если **(1)** $f(x)=\sin x,\ x_0=0,\ x=1,\ \varepsilon=10^{-5}$,
(2) $f(x)=\cos x,\ x_0=0,\ x=2,\ \varepsilon=10^{-6}$, **(3)** $f(x)=e^x,\ x_0=0,\ x=1,\ \varepsilon=10^{-6}$,
(4) $f(x)=e^{-x},\ x_0=0,\ x=2,\ \varepsilon=10^{-6}$.

Д **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

20. Оцените величину остаточного члена формулы Тейлора $R_{n+1}(x|x_0)=f(x)-P_n(x|x_0)$, $P_n(x|x_0)=f(x_0)+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, принимая
$\max|R_{n+1}(x|x_0)| = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\max_{\xi\in[0;x_0]}\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|$, и найдите наименьшее n, при котором $\max|R_{n+1}(x|x_0)| < \varepsilon$, если **(1)** $f(x)=\sin x,\ x_0=0,\ x=2,\ \varepsilon=10^{-5}$,
(2) $f(x)=\cos x,\ x_0=0,\ x=1,\ \varepsilon=10^{-6}$, **(3)** $f(x)=e^x,\ x_0=0,\ x=2,\ \varepsilon=10^{-6}$,
(4) $f(x)=e^{-x},\ x_0=0,\ x=1,\ \varepsilon=10^{-6}$,

6. Многочлен Тейлора, оценка максимального значения слагаемого

С **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

21. Найдите номер и оцените величину наибольшего по модулю слагаемого многочлена Тейлора $P_n(x|x_0)=f(x_0)+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, если **(1)** $f(x)=\cos x,\ x_0=0,\ x=9$,
(2) $f(x)=e^{-x},\ x_0=0,\ x=11$, **(3)** $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^3},\ x_0=0,\ x=0{,}9$. Обратите внимание на то, что многочлен Тейлора для функции $f(x)=g'(x)$ равен
$P=P_n(f|x|x_0)=P_n(g'|x|x_0)$, $P=f'(x_0)+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(f')^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$,
$P=f'(x_0)+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, $P=f'(x_0)+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(k+1)(x-x_0)^k$,
$P=\left\{(x-x_0)f'(x_0)+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}\right\}'$, $P=\left\{\sum\limits_{k=1}^{n+1}\dfrac{f^{k}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right\}'$, то есть он равен производной от многочлена Тейлора для функции $g(x)$.

Д **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

22. Найдите номер и оцените величину наибольшего по модулю слагаемого многочлена Тейлора $P_n(x|x_0)=f(x_0)+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, если **(1)** $f(x)=\sin x,\ x_0=0,\ x=7$,
(2) $f(x)=e^{x},\ x_0=0,\ x=10$, **(3)** $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2},\ x_0=0,\ x=0{,}9$, Обратите внимание на то, что многочлен Тейлора для функции $f(x)=g'(x)$ равен $P=P_n(f|x|x_0)=P_n(g'|x|x_0)$,
$P=f'(x_0)+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(f')^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, $P=f'(x_0)+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$,
$P=f'(x_0)+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(k+1)(x-x_0)^k$,
$P=\left\{(x-x_0)f'(x_0)+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}\right\}'$, $P=\left\{\sum\limits_{k=1}^{n+1}\dfrac{f^{k}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right\}'$, то есть он

равен производной от многочлена Тейлора для функции $g(x)$.

2008-2009 Курс 1, семестр 2, семинар 11
Тема: Последовательности-1

1. Вычисление предела последовательности

С **Для обязательного разбора на семинаре.**

1. Найдите наименьшее N такое, что $\forall n \geqslant N \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon$, если **(1)** $x_n = \dfrac{1}{n}$, $b = 0$ и $\varepsilon = 10^{-3}$, **(2)** $x_n = \dfrac{3n+2}{n+1}$, $b = 3$ и $\varepsilon = 10^{-3}$, **(3)** $x_n = \dfrac{n^3+n}{n^3+1}$, $b = 1$ и $\varepsilon = 10^{-3}$, **(4)** $x_n = \dfrac{n}{n^2+1}$, $b = 0$ и $\varepsilon = 10^{-3}$,

2. Найдите наименьшее N такое, что $\forall n \geqslant N \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon$, если **(1)** $x_n = \dfrac{1}{2^n}$, $b = 0$ и $\varepsilon = 10^{-3}$, **(2)** $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $b = 0$ и $\varepsilon = 10^{-3}$, **(3)** $x_n = \ln n - \ln(n-1)$, $b = 0$ и $\varepsilon = 10^{-3}$, **(4)** $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$, $b = 0$ и $\varepsilon = 10^{-3}$, **(5)** $x_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}$, $b = 0$ и $\varepsilon = 10^{-3}$, **(6)** $x_n = \sin\bigl(1 + \dfrac{1}{n}\bigr)$, $b = \sin 1$ и $\varepsilon = 10^{-3}$,

3. Укажите наименьшее значение $N : \forall n \geqslant N \Rightarrow \left|\dfrac{40n^2+7}{8n^2+3} - 5\right| < 10^{-4}$.

4. Найдите **(1)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-5n+6}{n^2-7n+10}$, **(2)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n^2-2n+1}{n^2-2n+3}$, **(3)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n^2-2n+1}{n^3-2n^2+3n-4}$,

5. Найдите **(1)** $\lim\limits_{n\to+\infty} n\Bigl(\sqrt{4+\dfrac{1}{n}} - 2\Bigr)$, **(2)** $\lim\limits_{n\to+\infty} n\Bigl(\sqrt[3]{27+\dfrac{1}{n}} - \sqrt{9+\dfrac{1}{n}}\Bigr)$, **(3)** $\lim\limits_{n\to+\infty} (n - \sqrt{n^2-n})$, **(4)** $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n^2+3n+2} - \sqrt{n^2-n-2})$, **(5)** $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2(\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt[3]{n^3-2})$, **(6)** $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3(\sqrt{n^2-1} - 2n + \sqrt{n^2+1})$.

Д **Обязательное задание на дом.**

6. Найдите наименьшее N такое, что $\forall n \geqslant N \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon$, если **(1)** $x_n = \dfrac{1}{n^2}$, $b = 0$ и $\varepsilon = 10^{-3}$, **(2)** $x_n = \dfrac{n-1}{n}$, $b = 1$ и $\varepsilon = 10^{-3}$, **(3)** $x_n = \dfrac{n^2+1}{n^2-1}$, $b = 1$ и $\varepsilon = 10^{-3}$, **(4)** $x_n = \dfrac{n}{n^2+3n+2}$, $b = 0$ и $\varepsilon = 10^{-3}$,

7. Найдите наименьшее N такое, что $\forall n \geqslant N \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon$, если **(1)** $x_n = \dfrac{1}{3^n}$, $b = 0$ и $\varepsilon = 10^{-10}$, **(2)** $x_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$, $b = 0$ и $\varepsilon = 10^{-5}$, **(3)** $x_n = \ln(n+1) - \ln(n-1)$, $b = 0$ и $\varepsilon = 10^{-2}$, **(4)** $x_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}$, $b = 0$ и $\varepsilon = 10^{-4}$, **(5)** $x_n = \sqrt[3]{n^2+n} - \sqrt[3]{n^2-n}$, $b = 0$ и $\varepsilon = 10^{-3}$, **(6)** $x_n = \cos\bigl(1 + \dfrac{1}{n}\bigr)$, $b = \sin 1$ и $\varepsilon = 10^{-3}$,

8. Укажите наименьшее значение $N : \forall n \geqslant N \Rightarrow \left|\dfrac{42n^2+58}{7n^2+5} - 6\right| < 10^{-4}$.

9. Найдите **(1)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-8n+15}{n^2-10n+21}$, **(2)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2-3n+4}{3n^2-2n+1}$, **(3)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3+n^2+n+1}{n^3+n^4+n^5+n^6}$,

10. Найдите **(1)** $\lim\limits_{n\to+\infty} n\Big(\sqrt{9+\dfrac{2}{n}}-3\Big)$, **(2)** $\lim\limits_{n\to+\infty} n\Big(\sqrt[3]{8+\dfrac{3}{n}}-\sqrt{4+\dfrac{1}{n}}\Big)$,
(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)$, **(4)** $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-2})$, **(5)** $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{n^3+n^2}-\sqrt[3]{n^3-n^2})$,
(6) $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sqrt{n}(\sqrt{n-1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n+1})$.

2. Бесконечно большие последовательности

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

11. Найдите наименьшее N такое, что $\forall n \geqslant N \Rightarrow x_n > A$, если **(1)** $x_n = 2n$, $A = 1001$, **(2)** $x_n = n^2$, $A = 1000001$, **(3)** $x_n = \sqrt{n}$, $A = 100$, **(4)** $x_n = 2^n$, $A = 1001$, **(5)** $x_n = \log_2 n$, $A = 10$, **(6)** $x_n = n^2 - 6n + 9$, $A = 10000$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

12. Найдите наименьшее N такое, что $\forall n \geqslant N \Rightarrow x_n > A$, если **(1)** $x_n = 3n-2$, $A = 1001$, **(2)** $x_n = n^3$, $A = 1000001$, **(3)** $x_n = \sqrt[3]{n}$, $A = 101$, **(4)** $x_n = 3^n$, $A = 1001$, **(5)** $x_n = \log_{10} n$, $A = 10$, **(6)** $x_n = n^2 - 4n + 4$, $A = 1000$.

3. Второй замечательный предел для последовательности

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

13. Найдите **(1)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\big(1+\dfrac{2}{n}\big)^{3n}$, **(2)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\big(1-\dfrac{3}{n}\big)^{4n}$, **(3)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\big(1+n\big)^{1/n}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

14. Найдите **(1)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\big(1+\dfrac{1}{2n}\big)^{6n}$, **(2)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\big(1-\dfrac{1}{2n^2}\big)^{6n^2}$, **(3)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\big(1+2n\big)^{3/n}$.

4. Эталонные последовательности, 1

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

15. Пусть $x_n = \sqrt[n]{n}$. Укажите какое нибудь $N:\ \forall n \geqslant N \Rightarrow x_n \in (1;\ 1{,}001)$.

16. Укажите какое-нибудь значение $N : \forall n \geqslant N \Rightarrow \dfrac{1}{n!} < 10^{-3}$.

17. Укажите какое-нибудь значение $N : \forall n \geqslant N \Rightarrow \dfrac{1}{n^n} < \dfrac{1}{257}$.

18. Найдите **(1)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}$, **(2)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{n}$, **(3)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(\ln n)^{17}}{n^{0{,}01}}$, **(4)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{2^n}$,
(5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^{2008}}{(1{,}001)^n}$, **(6)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n!}{n^n}$, **(7)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^{2006}}{n!}$, **(8)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^{2006}}{n^n}$, **(9)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{n!}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

19. Пусть $x_n = \sqrt[n]{\dfrac{1}{n}}$. Укажите какое нибудь $N:\ \forall n \geqslant N \Rightarrow x_n \in (0{,}999;\ 1)$.

20. Укажите какое-нибудь значение $N : \forall n \geqslant N \Rightarrow \dfrac{1}{n!} < 10^{-6}$.

21. Укажите какое-нибудь значение $N : \forall n \geqslant N \Rightarrow n^n > 3100$.

22. Найдите **(1)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n}}$, **(2)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\ln n}$, **(3)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{n^{0{,}01}}$, **(4)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3^n}{n}$, **(5)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^{0{,}1}}{(1{,}1)^n}$,
(6) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(2n)!}{n^n}$, **(7)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^3 3^n \ln n}{n!}$, **(8)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(2n)!}{n^n}$, **(9)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{n^n}$.

5. Эталонные подпоследовательности, 2

$\boxed{\text{С}}$ **Для обязательного разбора на семинаре.**

23. Для каждой последовательности укажите все верные утверждения:
(I) $x_n = \frac{2^n}{n^{2005}}$ **(II)** $x_n = \frac{\log_{2005} n}{n^{1,01}}$ **(III)** $x_n = \frac{n!}{n^n}$ **(IV)** $x_n = \frac{0{,}9^n}{n^{0,9}}$ **(V)** $x_n = \frac{n^n}{2^n}$
(VI) $x_n = \frac{(1{,}0001)^n}{\log_2 n}$, $n \geqslant 2$
(a) x_n – бесконечно большая (б.б.) положительная.
(b) x_n является б.б., но не является б.б. положительной.
(c) x_n – неограниченная, но не является б.б. **(d)** x_n – ограниченная, но не имеет предела.
(e) x_n сходится, но не является бесконечно малой. **(f)** x_n – бесконечно малая.

$\boxed{\text{Д}}$ **Обязательное задание на дом.**

24. Для каждой последовательности укажите все верные утверждения:
(I) $x_n = \frac{n^{2005}}{2005^n}$ **(II)** $x_n = \frac{\sqrt{n}}{\log_3 n}$, $n \geqslant 2$ **(III)** $x_n = \frac{n!}{n^n}$ **(IV)** $x_n = \frac{n!}{4^n}$ **(V)** $x_n = \frac{2^n}{n^n}$
(VI) $x_n = \frac{\log_{2005} n}{2^n}$
(a) x_n – бесконечно большая (б.б.) положительная.
(b) x_n является б.б., но не является б.б. положительной.
(c) x_n – неограниченная, но не является б.б. **(d)** x_n – ограниченная, но не имеет предела.
(e) x_n сходится, но не является бесконечно малой. **(f)** x_n – бесконечно малая.

6. Эталонные последовательности, 3

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

25. Пусть $x_n = \frac{\ln n}{n^2}$. Укажите все верные утверждения: **(a)** $x_n = o\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)$
(b) $x_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ **(c)** $x_n = o\left(\frac{\ln n}{n^3 \cdot \sqrt{n}}\right)$ **(d)** $x_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ **(e)** $x_n = o\left(\frac{1}{n^3 \cdot \ln n}\right)$ **(f)** $x_n = o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

26. Пусть $x_n = \frac{\ln n}{n^3}$. Укажите все верные утверждения: **(a)** $x_n = o\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)$
(b) $x_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ **(c)** $x_n = o\left(\frac{\ln n}{n^3 \cdot \sqrt{n}}\right)$ **(d)** $x_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ **(e)** $x_n = o\left(\frac{1}{n^3 \cdot \ln n}\right)$ **(f)** $x_n = o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

2008-2009 Курс 1, семестр 2, семинар 12
Тема: Графики-2
Исследование точек перегиба

1. Степенные функции

$\boxed{\text{С}}$ **Для обязательного разбора на семинаре.**

1. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, найдите вторую производную, исследуйте направление выпуклости, найдите точки перегиба, нарисуйте эскиз графика функции,
(1) $f(x) = 3x^2 - 2x^3$, **(2)** $f(x) = 2x^6 - 3x^4$, **(3)** $f(x) = 3x^5 - 5x^3$,
(4) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, **(5)** $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, **(6)** $f(x) = x(4-x)^3$,
(7) $f(x) = x^2(5-x)^3$, **(8)** $f(x) = (x-2)^3(10-x)^5$. **(9)** $f(x) = x(x-1)(x+1)$.
(10) $f(x) = (4-x)\sqrt[3]{x}$, **(11)** $f(x) = (3-x)\sqrt{x}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Обязательное задание на дом.**

2. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, найдите вторую производную, исследуйте направление выпуклости, найдите точки перегиба, нарисуйте эскиз графика функции,
(1) $f(x) = 6x^5 - 5x^6$, **(2)** $f(x) = x^4 - 2x^2$, **(3)** $f(x) = x^3 - 3x$, **(4)** $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$,
(5) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$, **(6)** $f(x) = x(6-x)^2$, **(7)** $f(x) = x^2(4-x)^2$,
(8) $f(x) = x(x-3)(x+2)$. **(9)** $f(x) = (6-x)\sqrt[5]{x}$, **(10)** $f(x) = x\sqrt{3-x}$.

2. Иррациональные функции

$\boxed{\text{С}}$ **Для обязательного разбора на семинаре.**

3. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, найдите вторую производную, исследуйте направление выпуклости, найдите точки перегиба, нарисуйте эскиз графика функции,
(1) $f(x) = \sqrt{x(2-x)}$, **(2)** $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{2-x}$, **(3)** $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{6-x}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Обязательное задание на дом.**

4. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, найдите вторую производную, исследуйте направление выпуклости, найдите точки перегиба, нарисуйте эскиз графика функции,
(1) $f(x) = \sqrt{x(4-x)}$, **(2)** $f(x) = \sqrt[5]{x} \cdot \sqrt[5]{64-x}$, **(3)** $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{12-x}$.

3. Показательные функции

$\boxed{\text{С}}$ **Для обязательного разбора на семинаре.**

5. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, найдите вторую производную, исследуйте направление выпуклости, найдите точки перегиба, нарисуйте эскиз графика функции.
(1) $f(x) = x^2 e^{-x}$, **(2)** $f(x) = \sqrt{x} e^{-x}$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Обязательное задание на дом.**

6. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, найдите вторую производную, исследуйте направление выпуклости, найдите точки перегиба, нарисуйте эскиз графика функции.
(1) $f(x) = xe^{-x}$, **(2)** $f(x) = \sqrt[3]{x} e^{-x}$.

4. Тригонометрические функции

$\boxed{\text{С}}$ **Для обязательного разбора на семинаре.**

7. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, найдите вторую производную, исследуйте направление выпуклости, найдите точки перегиба, нарисуйте эскиз графика функции,
(1) $f(x) = \sin x$, **(2)** $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$, **(3)** $f(x) = \operatorname{tg} x$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Обязательное задание на дом.**

8. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, найдите вторую производную, исследуйте направление выпуклости, найдите точки перегиба, нарисуйте эскиз графика функции,
(1) $f(x) = \cos x$, **(2)** $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$, **(3)** $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$,

5. Показательные и логарифмические функции с модулем

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

9. Найдите первую и вторую производные, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума и перегиба, нарисуйте эских графика,
(1) $f(x) = x \ln x$, $g(x) = \begin{cases} x \ln|x| \text{ при } x \neq 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \end{cases}$ **(2)** $f(x) = x^2 \ln x$,
$f(x) = \begin{cases} x|x| \ln|x| \text{ при } x \neq 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \end{cases}$ **(3)** $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln|x|} \text{ при } x \neq 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \end{cases}$

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

10. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, **(1)** $f(x) = x \ln(-x)$, $f(x) = \begin{cases} |x| \ln|x| \text{ при } x \neq 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \end{cases}$
(2) $f(x) = x^2 \ln x$, $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x| \text{ при } x \neq 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \end{cases}$ **(3)** $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{\ln|x|} \text{ при } x \neq 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \end{cases}$

6. Функции с особенными точками

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

11. Найдите координаты точек перегиба, нарисуйте эских графика, **(1)** $f(x) = \sin \sqrt[3]{x}$,
(2) $f(x) = \sqrt[3]{\ln x}$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

12. Найдите координаты точек перегиба, нарисуйте эских графика,
(1) $f(x) = \sqrt[3]{x(x^2-1)}$, **(2)** $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt[3]{x}$,

2008-2009 Курс 1, семестр 2, семинар 13
Тема: Графики-3
Исследование асимптот

1. Показательно-степенные функции

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**
1. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, найдите вторую производную, исследуйте направление выпуклости, найдите точки перегиба, нарисуйте эскиз графика функции. **(1)** $f(x) = x^x$, **(2)** $f(x) = e^{1/x}$, **(3)** $f(x) = e^{-x^3}$, **(4)** $f(x) = e^{-1/x^2}$.
$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**
2. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, найдите вторую производную, исследуйте направление выпуклости, найдите точки перегиба, нарисуйте эскиз графика функции.
(1) $f(x) = x^{1/x}$, точку перегиба не определяйте, **(2)** $f(x) = e^{-x^2}$, **(3)** $f(x) = e^{-1/x^3}$.

2. Исследование асимптот алгебраических функций

$\boxed{\text{С}}$ **Для обязательного разбора на семинаре.**
3. Найдите наклонные асимптоты (правостороннюю и левостороннюю),
(1) $f(x) = |x-1|$, **(2)** $f(x) = \dfrac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^3}$, **(3)** $f(x) = \sqrt{x^2-4}$,
$\boxed{\text{Д}}$ **Обязательное задание на дом.**
4. Найдите наклонные асимптоты (правостороннюю и левостороннюю), **(1)** $f(x) = |x|$, **(2)** $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, **(3)** $f(x) = \sqrt{x^2-6x+5}$,

3. Исследование асимптот тригонометрических функций

$\boxed{\text{С}}$ **Для обязательного разбора на семинаре.**
5. Найдите наклонные асимптоты (правостороннюю и левостороннюю), **(1)** $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, **(2)** $f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$, **(3)** $f(x) = x\sqrt{x}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
$\boxed{\text{Д}}$ **Обязательное задание на дом.**
6. Найдите наклонные асимптоты (правостороннюю и левостороннюю), **(1)** $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$, **(2)** $f(x) = x \operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$, **(3)** $f(x) = x\sqrt{x}\operatorname{tg}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

4. Исследование асимптот логарифмических функций

$\boxed{\text{С}}$ **Для обязательного разбора на семинаре.**
7. Найдите наклонные асимптоты (правостороннюю и левостороннюю),
(1) $f(x) = x\ln\dfrac{x+2}{x}$, **(2)** $f(x) = x^2\ln\dfrac{x+2}{x}$, **(3)** $f(x) = x^2\ln\cos\dfrac{1}{x}$,
$\boxed{\text{Д}}$ **Обязательное задание на дом.**
8. Найдите наклонные асимптоты (правостороннюю и левостороннюю),
(1) $f(x) = x\ln\dfrac{x+1}{x}$, **(2)** $f(x) = x^2\ln\dfrac{x+1}{x}$, **(3)** $f(x) = x^2\ln\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)$,

5. Исследование асимптот обратных тригонометрических функций

$\boxed{\text{С}}$ **Для обязательного разбора на семинаре.**

9. Найдите наклонные асимптоты (правостороннюю и левостороннюю),
(1) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, **(2)** $f(x) = x \operatorname{arctg} x$, **(3)** $f(x) = x + \operatorname{arctg} x$,
(4) $f(x) = x\big(\operatorname{arctg} 2x - \operatorname{arctg} x\big)$, **(5)** $f(x) = x^2 \arcsin \dfrac{1}{x}$, **(6)** $f(x) = x\sqrt{x} \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{x}}$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Обязательное задание на дом.**

10. Найдите наклонные асимптоты (правостороннюю и левостороннюю),
(1) $f(x) = \arcsin \dfrac{x^2-1}{x^2}$, **(2)** $f(x) = x \operatorname{arctg} 2x$, **(3)** $f(x) = 2x - \operatorname{arctg} 2x$,
(4) $f(x) = x\Big(\operatorname{arctg} \dfrac{x}{2} - \operatorname{arctg} \dfrac{x}{3}\Big)$, **(5)** $f(x) = \arcsin \dfrac{x^2}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x$, **(6)** $f(x) = x^2 \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$,
(7) $f(x) = x\sqrt{x} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$,

6. Исследование асимптот простых иррациональных функций

$\boxed{\text{С}}$ **Для обязательного разбора на семинаре.**

11. Найдите наклонные асимптоты (правостороннюю и левостороннюю),
(1) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, **(2)** $f(x) = \sqrt{9x^2+1}$, **(3)** $f(x) = \sqrt{16x^2+24x}$, **(4)** $f(x) = \sqrt[3]{x^3+x^2}$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Обязательное задание на дом.**

12. Найдите наклонные асимптоты (правостороннюю и левостороннюю),
(1) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$, **(2)** $f(x) = \sqrt{x^2+9}$, **(3)** $f(x) = \sqrt{x^2-2x}$, **(4)** $f(x) = \sqrt[3]{x^3-x^2}$,

7. Исследование асимптот иррациональных функций

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

13. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, найдите наклонную асимптоту, нарисуйте эскиз графика функции, **(1)** $f(x) = \sqrt[3]{x(x-3)^2}$, **(2)** $f(x) = \sqrt[5]{x^2(x-5)^3}$, **(3)** $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{(x-3)^5}{x^2}}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

14. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, найдите наклонную асимптоту, нарисуйте эскиз графика функции, **(1)** $f(x) = \sqrt[3]{8x^2(x-6)}$, **(2)** $f(x) = \sqrt[5]{x^3(x-10)^2}$, **(3)** $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{(x-3)^4}{x}}$.

8. Исследование асимптот показательно-логарифмических функций

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

15. Найдите наклонную асимптоту при $x \to +\infty$, **(1)** $f(x) = x \ln \cos \dfrac{1}{\sqrt{x}}$,
(2) $f(x) = x\Big(1 + \dfrac{1}{x}\Big)^x$, **(3)** $f(x) = x^2\Big(1 + \dfrac{1}{x^2}\Big)^{x^2}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

16. Найдите наклонную асимптоту при $x \to +\infty$, **(1)** $f(x) = x \ln\Big(\sqrt{x} \sin \dfrac{1}{\sqrt{x}}\Big)$,
(2) $f(x) = x\Big(1 + \dfrac{2}{x}\Big)^x$, **(3)** $f(x) = x\Big(1 + \dfrac{1}{x}\Big)^{2x}$.

2008-2009 Курс 1, семестр 2, семинар 14
Тема: Графики-3, параметрические функции

1. Найдите промежутки возрастания и убывания, точки локального экстремума, ⋆ точки перегиба, асимптоты, нарисуйте эскиз графика функции $y = f(x)$, заданной параметрически в виде **(1)** $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0;\, 2\pi)$, **(2)** $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$, **(3)** $x = -5t^2 + 2t^5$, $y = -3t^2 + 2t^3$, **(4)** $x = (t+1)^2$, $y = (t-1)^2$, **(5)** $x = \dfrac{t^2}{t-1}$, $y = \dfrac{t}{t^2-1}$, **(6)** $x = \dfrac{t^2+1}{1-t}$, $y = \dfrac{4t}{t+1}$, **(7)** $x = \dfrac{(t+2)^2}{t+1}$, $y = \dfrac{(t-2)^2}{t-1}$, **(8)** $x = \dfrac{t^2}{1-t^2}$, $y = \dfrac{1}{1+t^2}$, **(9)** $x = \dfrac{t(1-t)}{1+t^2}$, $y = \dfrac{t^2(1-t)}{1+t^2}$, **(10)** $x = \dfrac{t}{1-t^2}$, $y = \dfrac{t(1-2t^2)}{1-t^2}$,

2. Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрически в виде $x = \dfrac{3t}{1-t^3}$, $y = \dfrac{3t^2}{1-t^3}$. Нарисуйте эскиз графика.

3. Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрически в виде $x = \dfrac{t^4}{t^2-1}$, $y = \dfrac{t^3}{t-1}$. Нарисуйте эскиз графика.

4. Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрически в виде $x = \dfrac{t^3}{t^2-1}$, $y = \dfrac{t^2}{t-1}$. Нарисуйте эскиз графика.

5. Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрически в виде $x = \dfrac{t^3}{t-1}$, $y = \dfrac{t^4}{t^2-1}$. Нарисуйте эскиз графика.

6. Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрически в виде $x = \dfrac{t^2}{t-1}$, $y = \dfrac{t^3}{t^2-1}$. Нарисуйте эскиз графика.

7. Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрически в виде $x = \dfrac{t^2}{t-1}$, $y = \dfrac{t^2}{t+1}$. Нарисуйте эскиз графика.

8. Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрически в виде $x = \dfrac{t}{1+t^5}$, $y = \dfrac{t^2}{1+t^5}$. Нарисуйте эскиз графика.

9. Найдите **(1)** $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2}$, **(2)** $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{1-x^2}$, **(3)** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$, **(4)** $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^2-5x+6}$, **(5)** $\displaystyle\int \frac{(2x-3)dx}{x^2-5x+6}$, **(6)** $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{x^2-5x+6}$, **(7)** $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{x^2-5x+6}$, **(8)** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)^2}$, **(9)** $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x-2)^2}$, **(10)** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x+1}$, **(11)** $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^2+x+1}$, **(12)** $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x-1}$, **(13)** $\displaystyle\int \frac{e^xdx}{e^x-1}$, **(14)** $\displaystyle\int \frac{e^xdx}{e^{2x}-1}$,

10. Докажите, что функция $f(x) = \sqrt{x}$ равномерно непрерывна на промежутке $(0;\, +\infty)$.

11. Докажите, что функция $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt[3]{x}$ равномерно непрерывна на интервале $(0;\, +\infty)$.

1. Асимптотическое представление обратной функции

$\boxed{\text{C}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

12. Пусть $f(x) = 5x - 2x^4$ и в окрестности точки $x = 0$ определена обратная функция $g(x)$, $g\big(f(x)\big) = x$, и $g(x) = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + o(x^4)$ при $x \to 0$. Найдите значения коэффициентов.

13. Пусть $f(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$ и в окрестности точки $x = 0$ определена обратная функция $g(x)$, $g\big(f(x)\big) = x$, и $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k x^k + o(x^n)$, $n = 5$ при $x \to 0$. Найдите значения коэффициентов.

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

14. Пусть $f(x) = 2x + 3x^5 + o(x^5)$ и в окрестности точки $x = 0$ определена обратная функция $g(x)$, $g\big(f(x)\big) = x$, и $g(x) = mx + nx^2 + kx^3 + px^4 + qx^5 + o(x^5)$ при $x \to 0$. Найдите значения коэффициентов.

15. Пусть $f(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5}$ и в окрестности точки $x = 0$ определена обратная функция $g(x)$, $g\big(f(x)\big) = x$, и $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k x^k + o(x^n)$, $n = 5$ при $x \to 0$. Найдите значения коэффициентов.

16. Пусть $f(x) = 2x + x^2$ и в окрестности точки $x = 0$ определена обратная функция $g(x)$, $g\big(f(x)\big) = x$, и $g(x) = ax + bx^2 + o(x^2)$ при $x \to 0$. Найдите значения коэффициентов.

2. Асимптотические формулы

$\boxed{\text{С}}$ **Для обязательного разбора на семинаре.**

17. Укажите бесконечно малые и бесконечно большие функции.

(1) $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$, $x \to +\infty$, **(2)** $f(x) = x \ln x$, $x \to +0$, **(3)** $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$, $x \to +0$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Обязательное задание на дом.**

18. Укажите бесконечно малые и бесконечно большие функции.

(1) $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$, $x \to 0$, **(2)** $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$, $x \to +\infty$, **(3)** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $x \to +\infty$.