2009-2010 Курс 1, семестр 2, семинар 01(m3-15)
Тема: Точки, последовательности, множества в пространстве

1. Свойства множеств

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым. Найдите **(e)** внутренность, **(f)** границу, **(g)** $\star$ множество всех предельных точек, **(h)** замыкание, **(i)** выпуклую оболочку указанного множества. Каждый раз мы указываем пространство, подмножеством которого является даное множество.
(1) Отрезок на плоскости (без концов), **(2)** Шар в трехмерном пространстве (вместе со сферой), **(3)** Звезда (пятиугольная) на плоскости (включая внутренность),

$\boxed{\text{Д}}$ **Простые задачи для самостоятельного решения.**

2. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым. Найдите **(e)** внутренность, **(f)** границу, **(g)** $\star$ множество всех предельных точек, **(h)** замыкание, **(i)** выпуклую оболочку указанного множества. Каждый раз мы указываем пространство, подмножеством которого является даное множество.
(1) Отрезок на плоскости (с концами), **(2)** Круг на плоскости (вместе с окружностью), **(3)** Звезда (пятиугольная) на плоскости (без внутренности),

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

3. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым. Найдите **(e)** внутренность, **(f)** границу, **(g)** $\star$ множество всех предельных точек, **(h)** замыкание, **(i)** выпуклую оболочку указанного множества. Каждый раз мы указываем пространство, подмножеством которого является даное множество.
(1) Треугольник на плоскости (включая внутренность), **(2)** Буква М русского алфавита.

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

4. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым. Найдите **(e)** внутренность, **(f)** границу, **(g)** $\star$ множество всех предельных точек, **(h)** замыкание, **(i)** выпуклую оболочку указанного множества. Каждый раз мы указываем пространство, подмножеством которого является даное множество.
(1) Треугольник на плоскости (без внутренности), **(2)** Буква Г русского алфавита.

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

5. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым. Найдите **(e)** внутренность, **(f)** границу, **(g)** $\star$ множество всех предельных точек, **(h)** замыкание, **(i)** выпуклую оболочку указанного множества. Каждый раз мы указываем пространство, подмножеством которого является даное множество.
(1) Пусть вектор на плоскости $\vec{a}_n, n \geqslant 1$, имеет координаты $(r_n \cos\varphi_n, r_n \sin\varphi_n)$, $r_n = \frac{1}{n}$, $\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{2}$, вектор $\vec{b}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{a}_n$, конец вектора $\vec{b}_n$ обозначим M_n, причем $M_0 = (0;0)$, множество D на плоскости совпадает с ломаной линией $M_0M_1M_2M_3 \ldots M_n \ldots$. **(2)** То же множество исключая все точки M_n. **(3)** То же множество, если $r_n = \frac{1}{n}$, $\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{4n}$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

6. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым. Найдите **(e)** внутренность, **(f)** границу, **(g)** $\star$ множество всех предельных точек, **(h)** замыкание, **(i)** выпуклую оболочку указанного множества. Каждый раз мы указываем пространство, подмножеством которого является даное множество.
(1) Пусть вектор на плоскости $\vec{a}_n, n \geqslant 1$, имеет координаты $(r_n \cos\varphi_n, r_n \sin\varphi_n)$, $r_n = \frac{1}{2^n}$, $\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{4}$, вектор $\vec{b}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{a}_n$, конец вектора $\vec{b}_n$ обозначим M_n, причем $M_0 = (0;0)$, множество D на плоскости совпадает с ломаной линией $M_0M_1M_2M_3 \ldots M_n \ldots$. **(2)** То же множество исключая все точки M_n. **(3)** То же множество, если $r_n = \frac{1}{n}$, $\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{2^n}$,

2. Свойства аналитических множеств

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

7. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым. Найдите **(e)** внутренность, **(f)** границу, **(g)** $\star$ множество всех предельных точек,

(h) замыкание, **(i)** выпуклую оболочку указанного множества. Каждый раз мы указываем пространство, подмножеством которого является даное множество.
Множество на плоскости, состоящее из всех точек на поскости с координатами $(x; y)$, для которых **(1)** $x^2 + y^2 = 1$, **(2)** $x^2 + y^2 > 1$, **(3)** $|x| + |y| \leqslant 1$, **(4)** $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 2, \\ -1 < x < 1, \end{cases}$

Д **Простые задачи для самостоятельного решения.**

8. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым. Найдите **(e)** внутренность, **(f)** границу, **(g)** $\star$ множество всех предельных точек, **(h)** замыкание, **(i)** выпуклую оболочку указанного множества. Каждый раз мы указываем пространство, подмножеством которого является даное множество.
Множество на плоскости, состоящее из всех точек на поскости с координатами $(x; y)$, для которых **(1)** $x^2 + y^2 < 1$, **(2)** $|x| + |y| \geqslant 1$, **(3)** $1 \leqslant |x| + |y| < 2$, **(4)** $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 2, \\ -|x| \leqslant y \leqslant |x|, \end{cases}$

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

9. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым. Найдите **(e)** внутренность, **(f)** границу, **(g)** $\star$ множество всех предельных точек, **(h)** замыкание, **(i)** выпуклую оболочку указанного множества. Каждый раз мы указываем пространство, подмножеством которого является даное множество.
Множество, состоящее из всех точек на поскости с координатами $(x; y)$, для которых **(1)** $x^2 + y^2 \leqslant 1$, **(2)** $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$, **(3)** $|x| + |y| = 1$, **(4)** $|x| + |y| < 1$, **(5)** $1 \leqslant |x| + |y| \leqslant 2$, **(6)** $\begin{cases} x + y = 1, \\ -1 < x < 1, \end{cases}$ **(7)** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ -1 < x < 1, \end{cases}$

Д **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

10. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым. Найдите **(e)** внутренность, **(f)** границу, **(g)** $\star$ множество всех предельных точек, **(h)** замыкание, **(i)** выпуклую оболочку указанного множества. Каждый раз мы указываем пространство, подмножеством которого является даное множество.
Множество, состоящее из всех точек на поскости с координатами $(x; y)$, для которых **(1)** $x^2 + y^2 \geqslant 1$, **(2)** $1 < x^2 + y^2 < 4$, **(3)** $1 \leqslant x^2 + y^2 < 4$, **(4)** $|x| + |y| > 1$, **(5)** $x + y = 1$, **(6)** $\begin{cases} x + y = 1, \\ -1 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$ **(7)** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ -1 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$

С **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

11. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым. Найдите **(e)** внутренность, **(f)** границу, **(g)** $\star$ множество всех предельных точек, **(h)** замыкание, **(i)** выпуклую оболочку указанного множества. Каждый раз мы указываем пространство, подмножеством которого является даное множество.
Множество, состоящее из всех точек на поскости с координатами $(x; y)$, для которых
(1) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 2, \\ -|x| < y < |x|, \end{cases}$ **(2)** $\begin{cases} x^2 + 9y^2 \leqslant 9, \\ 9x^2 + y^2 \leqslant 9, \end{cases}$ **(3)** $\left[\begin{array}{l} |x| + 5|y| < 6 \\ 5|x| + |y| < 6, \end{array}\right.$

Д **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

12. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым. Найдите **(e)** внутренность, **(f)** границу, **(g)** $\star$ множество всех предельных точек, **(h)** замыкание, **(i)** выпуклую оболочку указанного множества. Каждый раз мы указываем пространство, подмножеством которого является даное множество.
Множество, состоящее из всех точек на поскости с координатами $(x; y)$, для которых **(1)** $\left[\begin{array}{l} x^2 + 9y^2 = 9 \\ 9x^2 + y^2 = 9, \end{array}\right.$ **(2)** $\begin{cases} x^2 + 9y^2 < 9, \\ 9x^2 + y^2 \leqslant 9, \end{cases}$ **(3)** $\begin{cases} x^2 + 9y^2 < 9, \\ 9x^2 + y^2 < 9, \end{cases}$

3. Открытые и замкнутые множества

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

13. Какие из множеств на плоскости **(1)** $x^2+y^2\leqslant 1$, **(2)** $x=y=0$, **(3)** $|x+y|>1$, **(4)** $x^2+y^2=1$, **(5)** $-1<x<1,\ y=0$,
являются (a) замкнутыми, (b) открытыми, (c) ограниченными?

$\boxed{\text{Д}}$ **Простые задачи для самостоятельного решения.**

14. Какие из множеств на плоскости **(1)** $x^2+y^2>1$, **(2)** $(x^2-1)\cdot(y^2-1)=0$, **(3)** $|x+y|\leqslant 1$, **(4)** $y=x^2$, **(5)** $-1<x<1,\ y=x$,
являются (a) замкнутыми, (b) открытыми, (c) ограниченными?

4. Линии уровня функции нескольких переменных

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

15. Нарисуйте семейство линий равного уровня функции
(1) $u=x+y$, **(2)** $u=\dfrac{y}{x}$, **(3)** $u=\dfrac{y^2}{x}$, **(4)** $u=xy$, **(5)** $u=\dfrac{x^2+y^2}{2x}$,
Значения уровней подберите самостоятельно.

$\boxed{\text{Д}}$ **Простые задачи для самостоятельного решения.**

16. Нарисуйте семейство линий равного уровня функции
(1) $u=2x+3y$, **(2)** $u=x^2+y^2$, **(3)** $u=xy$, **(4)** $u=\dfrac{x^2}{y}$, **(5)** $u=\dfrac{x^2+y^2}{2y}$, **(6)** $u=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$,
(7) $u=y\big(x+\dfrac{1}{x}\big)$,

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

17. Нарисуйте семейство линий равного уровня функции
(1) $u=x^2+xy+y^2$, **(2)** $u=x^2+2xy+y^2$, **(3)** $u=x^2+3xy+y^2$, **(4)** $u=\dfrac{x^2+y^2}{2x+2y}$,
Значения уровней подберите самостоятельно.

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

18. Нарисуйте семейство линий равного уровня функции
(1) $u=x^2-xy+y^2$, **(2)** $u=x^2-2xy+y^2$, **(3)** $u=x^2-3xy+y^2$, **(4)** $u=\dfrac{x^2+y^2}{2x-2y}$,
Значения уровней подберите самостоятельно.

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

19. Нарисуйте семейство линий равного уровня функции
(1) $u=|x|+|y|$, **(2)** $u=|x|-|y|$, **(3)** $u=|x+y|-|x-y|$,
Значения уровней подберите самостоятельно.

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

20. Нарисуйте семейство линий равного уровня функции
(1) $u=|x|+y$, **(2)** $u=||x|-|y||$, **(3)** $u=|x+y|+|x-y|$,
Значения уровней подберите самостоятельно.

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

21. Нарисуйте семейство линий равного уровня функции
(1) $u=\min(x,y+y)$, **(2)** $u=\min(y-x,y)$, **(3)** $u=\min(x^2+y^2,\ 2xy)$,
(4) $u=\max(x^2-2xy+y^2,\ 1-2xy)$. **(5)** $u=\min(x^2+y^2,\ 1-2xy)$, **(6)** $u=\min(y+y^2,x^2+y^2)$,
Значения уровней подберите самостоятельно.

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

22. Нарисуйте семейство линий равного уровня функции
(1) $u=\min(x,x-y)$, **(2)** $u=\min(x+y,x-y)$, **(3)** $u=\min(x^2+2xy+y^2,\ 2xy+1)$,
(4) $u=\max(x^2-2xy+y^2,\ x^2-1+y^2)$. **(5)** $u=\min(2y+2x,x^2+2x+y)$,
Значения уровней подберите самостоятельно.

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

23. Нарисуйте линию уровня $u=0$ функции **(1)** $u(x,y)=x^3+y^3-3xy$, **(2)** $u(x,y)=(x^2+y^2)^2-xy$, в окрестности начала координат. Решение ищите в виде $y=cx^{\alpha}(1+o(1))$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

24. Нарисуйте линию уровня $u=0$ функции **(1)** $u(x,y)=x^3+y^3+3xy$, **(2)** $u(x,y)=(x^2+y^2)^2-2xy^2$, в окрестности начала координат. Решение ищите в виде $y=cx^{\alpha}(1+o(1))$.

5. Предел функции нескольких переменных

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

25. Найдите предел по совокупности переменных $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} u(x,y)$, если **(1)** $u(x,y)=xy,\ a=2,\ b=3,$ **(2)** $u(x,y)=e^{xy},\ a=2,\ b=3,$

$\boxed{\text{Д}}$ **Простые задачи для самостоятельного решения.**

26. Найдите предел по совокупности переменных $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} u(x,y)$, если

(1) $u(x,y)=\sin(x+y),\ a=\pi,\ b=\pi,$ **(2)** $u(x,y)=\ln(xy),\ a=2,\ b=\dfrac{1}{2},$

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

27. Найдите предел по совокупности переменных $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} u(x,y)$, если

(1) $u(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2},\ a=0,\ b=0,$ **(2)** $u(x,y)=xy\ln(x^2+y^2),\ a=0,\ b=0,$

(3) $u(x,y)=x\ln(x^2+y^2),\ a=0,\ b=0,$

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

28. Найдите предел по совокупности переменных $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} u(x,y)$, если

(1) $u(x,y)=\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2},\ a=0,\ b=0,$ **(2)** $u(x,y)=x^2y^2\ln(x^2+y^2),\ a=0,\ b=0,$

(3) $u(x,y)=y\ln(x^2+y^2),\ a=0,\ b=0,$

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

29. Найдите предел по совокупности переменных $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} u(x,y)$, если **(1)** $u(x,y)=x\ln y,\ a=0,\ b=1,$

(2) $u(x,y)=xy\ln(xy),\ a=1,\ b=1,$ **(3)** $u(x,y)=\dfrac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2},\ a=0,\ b=0,$

(4) $u(x,y)=\dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2},\ a=0,\ b=0,$ **(5)** $u(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2},\ a=0,\ b=0,$

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

30. Найдите предел по совокупности переменных $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} u(x,y)$, если

(1) $u(x,y)=x\ln(xy),\ a=1,\ b=1,$ **(2)** $u(x,y)=(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2),\ a=0,\ b=0,$

(3) $u(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{\ln(x^2+y^2)},\ a=0,\ b=0,$ **(4)** $u(x,y)=\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2},\ a=0,\ b=0,$

(5) $u(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x},\ u(x,0)=0,\ u(0,y)=0,\ a=0,\ b=0.$

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

31. Найдите $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} u(x,y)$, если точка $(x;y)$ приближается к точке $(0;0)$ по кривой $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\to 0$, **(1)** $u(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$, **(a)** $\varphi(t)=t,\ \psi(t)=t,$ **(b)** $\varphi(t)=t,\ \psi(t)=-t,$ **(c)** $\varphi(t)=t,\ \psi(t)=2t,$

(2) $u(x,y)=\dfrac{2x^3y}{x^6+y^2}$, **(a)** $\varphi(t)=t,\ \psi(t)=t,$ **(b)** $\varphi(t)=t,\ \psi(t)=t^2,$ **(c)** $\varphi(t)=t,\ \psi(t)=t^3,$

(d) $\varphi(t)=t,\ \psi(t)=t^4,$ **(3)** $u(x,y)=\dfrac{x^4-y^4}{x^4+y^4}$, **(a)** $\varphi(t)=2t,\ \psi(t)=t,$ **(b)** $\varphi(t)=-2t,\ \psi(t)=t,$

(**c**) $\varphi(t) = t,\ \psi(t) = 2t,$ **(4)** $u(x,y) = \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2},$ (**a**) $\varphi(t) = t,\ \psi(t) = t,$ (**b**) $\varphi(t) = t,\ \psi(t) = t^2,$
(**c**) $\varphi(t) = t,\ \psi(t) = -t^2,$

Д Сложные задачи для самостоятельного решения.

32. Найдите $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} u(x,y)$, если точка $(x;y)$ приближается к точке $(0;0)$ по кривой $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \to 0$, **(1)** $u(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2},$ (**a**) $\varphi(t) = 2t,\ \psi(t) = t,$ (**b**) $\varphi(t) = -2t,\ \psi(t) = t,$ (**c**) $\varphi(t) = t,\ \psi(t) = 2t,$
(2) $u(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4},$ (**a**) $\varphi(t) = t,\ \psi(t) = t,$ (**b**) $\varphi(t) = t^2,\ \psi(t) = t,$ (**c**) $\varphi(t) = -t^2,\ \psi(t) = t,$
(3) $u(x,y) = \dfrac{\sin(2xy)}{x^2+y^2},$ (**a**) $\varphi(t) = t,\ \psi(t) = t,$ (**b**) $\varphi(t) = -t,\ \psi(t) = t,$ (**c**) $\varphi(t) = t,\ \psi(t) = 2t,$
(4) $u(x,y) = \dfrac{2x^3y}{x^6+y^2},$ (**a**) $\varphi(t) = t,\ \psi(t) = t,$ (**b**) $\varphi(t) = t,\ \psi(t) = t^2,$ (**c**) $\varphi(t) = t,\ \psi(t) = t^3,$

С Сложные задачи для разбора на семинаре.

33. Докажите, что предел по совокупности переменных $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} u(x,y)$, не существует, если
(1) $u(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\ a = 0,\ b = 0,$ **(2)** $u(x,y) = \dfrac{x^4-y^2}{x^4+y^2},\ a = 0,\ b = 0,$

Д Сложные задачи для самостоятельного решения.

34. Докажите, что предел по совокупности переменных $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} u(x,y)$, не существует, если
(1) $u(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2},\ a = 0,\ b = 0,$ **(2)** $u(x,y) = \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2},\ a = 0,\ b = 0,$

Э Примеры экзаменационных задач.

35. Докажите, что предел по совокупности переменных $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} u(x,y)$, не существует, если
(1) $u(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4},\ a = 0,\ b = 0,$ **(2)** $u(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2},\ a = 0,\ b = 0,$ **(3)** $u(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4},\ a = 0,\ b = 0,$
(4) $u(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2+(x-y)^2},\ a = 0,\ b = 0,$ **(5)** $u(x,y) = \ln(x^2+y^2),\ a = 0,\ b = 0,$
(6) $u(x,y) = \dfrac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2},\ a = 0,\ b = 0,$ **(7)** $u(x,y) = \dfrac{e^{x^2+y^2}}{x^2+y^2},\ a = 0,\ b = 0,$
(8) $u(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{x^2+xy+y^2},\ a = 0,\ b = 0,$ **(9)** $u(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2},\ a = 0,\ b = 0,$
(10) $u(x,y) = \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2},\ a = 0,\ b = 0,$ **(11)** $u(x,y) = \sin\dfrac{1}{x^2+y^2},\ a = 0,\ b = 0,$
(12) $u(x,y) = \sin\dfrac{1}{y} + \sin\dfrac{1}{x},\ a = 0,\ b = 0,$

С Простые задачи для разбора на семинаре.

36. Найдите предел в бесконечно удаленной точке или докажите, что предел не существует,
С **(1)** $u(x,y) = \dfrac{1}{x^4+y^4}$, **(2)** $u(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2},$

Д Простые задачи для самостоятельного решения.

37. Найдите предел в бесконечно удаленной точке или докажите, что предел не существует,
С **(1)** $u(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$, **(2)** $u(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

38. Найдите предел в бесконечно удаленной точке или докажите, что предел не существует,
С **(1)** $u(x,y) = xe^{-x} + ye^{-y}$, **(2)** $u(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$, **(3)** $u(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2},$

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

39. Найдите предел в бесконечно удаленной точке или докажите, что предел не существует,

(1) $u(x,y) = e^{-x} + e^{-y}$, **(2)** $u(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2}$, **(3)** $u(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$,

$\boxed{\text{Э}}$ **Примеры экзаменационных задач.**

40. Найдите предел в бесконечно удаленной точке или докажите, что предел не существует,

(1) $u(x,y) = ye^{-x} + xe^{-y}$, **(2)** $u(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^4+y^4}$, **(3)** $u(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$, **(4)** $u(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+xy+y^2}$,

(5) $u(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$, **(6)** $u(x,y) = e^{-x^2}$, **(7)** $u(x,y) = ye^{-x^2}$, **(8)** $u(x,y) = \dfrac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$,

(9) $u(x,y) = (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$, **(10)** $u(x,y) = (x^2+y^2)\operatorname{tg}\dfrac{1}{x^2+y^2}$,

(11) $u(x,y) = (x^2+y^2)\arcsin\dfrac{1}{x^2+y^2}$, **(12)** $u(x,y) = (x^2+y^2)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2+y^2}$,

2009-2010 Курс 1, семестр 2, семинар 02(m3-16)
Тема: Дифференцирование функции нескольких переменных

1. Частные производные функции двух переемнных

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. Найдите частные производные первого порядка, градиент. Найдите первый дифференциал. Напишите уравнение нормали и уравнение касательной плоскости к поверхности $z = u(x, y)$ в точке M_0 с координатами $(x_0; y_0)$. Найдите производную по направлению вектора $\vec{L}$ в точке M_0.
(1) $u = 2x + 3y$, $M_0 = (1;\ 1)$, $\vec{L}_1 = (3; -2)$, $\vec{L}_2 = (2; 3)$. **(2)** $u = xy$, $M_0 = (1; 1)$, $\vec{L}_1 = (1;\ 1)$, $\vec{L}_2 = (1;\ -1)$, **(3)** $u = x^3 + y^3 - 3xy$, $M_0 = (1; 1)$, $\vec{L} = (1;\ 2)$. **(4)** $u = xy^2(4 - x - 2y)$, $M_0 = (1; 1)$, $\vec{L} = (1; 1)$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Простые задачи для самостоятельного решения.**

2. Найдите частные производные первого порядка, градиент. Найдите первый дифференциал. Напишите уравнение нормали и уравнение касательной плоскости к поверхности $z = u(x, y)$ в точке M_0 с координатами $(x_0; y_0)$. Найдите производную по направлению вектора $\vec{L}$ в точке M_0.
(1) $u = 3x - 2y$, $M_0 = (1;\ 1)$, $\vec{L}_1 = (3; -2)$, $\vec{L}_2 = (2; 3)$. $\vec{L}_3 = (-3; 2)$, **(2)** $u = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$, $M_0 = (2; 3)$, $\vec{L}_1 = (3; -2)$, $\vec{L}_2 = (2; 3)$. **(3)** $u = xy(3 - x - y)$, $M_1 = (1; 1)$, $\vec{L} = (1; 1)$; $M_2 = (0; 0)$, $\vec{L} = (1; 1)$.
(4) $u = x^2 + 2y^2 - 2x^4 - y^4$, $M_0 = (1; 0{,}5)$, $\vec{L} = (1; -1)$. **(5)** $u = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$, $M_0 = (1; 1)$, $\vec{L}_1 = (1; 1)$, $\vec{L}_2 = (1; -1)$.

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

3. Найдите частные производные первого порядка, градиент. Найдите первый дифференциал. Напишите уравнение нормали и уравнение касательной плоскости к поверхности $z = u(x, y)$ в точке M_0 с координатами $(x_0; y_0)$. Найдите производную по направлению вектора $\vec{L}$ в точке M_0.
(1) $u = x^y$, $M_0 = (1; 1)$, $\vec{L} = (2; 3)$;

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

4. Найдите частные производные первого порядка, градиент. Найдите первый дифференциал. Напишите уравнение нормали и уравнение касательной плоскости к поверхности $z = u(x, y)$ в точке M_0 с координатами $(x_0; y_0)$. Найдите производную по направлению вектора $\vec{L}$ в точке M_0.
(1) $u = \log_x y$, $M_0 = (2; 2)$, $\vec{L} = (2; 3)$;

2. Частные производные функции трех переменных

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

5. Найдите частные производные первого порядка, градиент. Найдите первый дифференциал. Найдите производную по направлению вектора $\vec{L}$ в точке с заданными координатами (x_0, y_0, z_0).
(1) $u = 2x + 3y + 4x,\ M_0 = (1; 1; 1)$, $\vec{L}_1 = (2; 3; 4)$, $\vec{L}_2 = (1; 6; -5)$. **(2)** $u = x^2 + y^2 + z^2,\ M_0 = (1; 2; 3)$, $\vec{L}_1 = (1; 2; 3)$, $\vec{L}_2 = (1; -2; 1)$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Простые задачи для самостоятельного решения.**

6. Найдите частные производные первого порядка, градиент. Найдите первый дифференциал. Найдите производную по направлению вектора $\vec{L}$ в точке с заданными координатами (x_0, y_0, z_0).
(1) $u = x^2 + y^2 + z^2,\ M_0 = (2; 3; 4)$, $\vec{L}_1 = (2; 3; 4)$, $\vec{L}_2 = (1; 6; -5)$.

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

7. Найдите частные производные первого порядка, градиент. Найдите первый дифференциал. Найдите производную по направлению вектора $\vec{L}$ в точке с заданными координатами (x_0, y_0, z_0).
(1) $u = xy^2z^3(7 - x - 2y - 3z), M_0 = (1; 1; 1)$, $\vec{L} = (1; 1; 1)$. **(2)** $u = x^3 + x + y + xyz,\ M_0 = (1; 1; -1)$, $\vec{L} = (1; 1; 1)$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

8. Найдите частные производные первого порядка, градиент. Найдите первый дифференциал. Найдите производную по направлению вектора $\vec{L}$ в точке с заданными координатами (x_0, y_0, z_0).
(1) $u = x^2y^3z^4(10 - 2x - 3y - 4z), M_0 = (1; 1; 1)$, $\vec{L} = (1; 1; 1)$.

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

9. Пусть $u(x, y)$ – дифференцируемая функция, $P_1(x, y|dx, dy) \stackrel{\text{def}}{=\!=} u(x, y) + du$ – многочлен Тейлора первого порядка с центром в точке (x, y), $R_2(x, y|dx, dy) \stackrel{\text{def}}{=\!=} u(x + dx, y + dy) - P_1(x, y|dx, dy)$ – остаток второго порядка. Найдите все эти величины для **(1)** $u = 3x + 4y$, $(x, y) = (3; 4)$, $(dx, dy) = (3; 4)$,
(2) $u = 3x + 4y$, $(x, y) = (3; 4)$, $(dx, dy) = (-4; 3)$, **(3)** $u = x^2 + y^2$, $(x, y) = (3; 4)$, $(dx, dy) = (3; 4)$,
(4) $u = x^2 + y^2$, $(x, y) = (3; 4)$, $(dx, dy) = (-4; 3)$, **(5)** $u = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$, $(x, y) = (1; 1)$, $(dx, dy) = (1; 1)$,
(6) $u = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$, $(x, y) = (1; 1)$, $(dx, dy) = (-1; 1)$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

10. Пусть $u(x, y)$ – дифференцируемая функция, $P_1(x, y|dx, dy) \stackrel{\text{def}}{=\!=} u(x, y) + du$ – многочлен Тейлора первого порядка с центром в точке (x, y), $R_2(x, y|dx, dy) \stackrel{\text{def}}{=\!=} u(x + dx, y + dy) - P_1(x, y|dx, dy)$ – остаток второго порядка. Найдите все эти величины для **(1)** $u = xy$, $(x, y) = (3; 4)$, $(dx, dy) = (4; 3)$,
(2) $u = xy$, $(x, y) = (3; 4)$, $(dx, dy) = (-3; 4)$, **(3)** $u = \ln(x^2 + y^2)$, $(x, y) = (4; 3)$, $(dx, dy) = (0{,}4; 0{,}3)$,
(4) $u = \ln(x^2 + y^2)$, $(x, y) = (4; 3)$, $(dx, dy) = (-0{,}3; 0{,}4)$,
(5) $u = x^3 + y^3 - 3xy$, $(x, y) = (1; 1)$, $(dx, dy) = (1; 1)$,
(6) $u = x^3 + y^3 - 3xy$, $(x, y) = (0; 0)$, $(dx, dy) = (1; 1)$,

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

11. Найдите дифференциал первого порядка функции **(1)** $p^{\ln(x^2+y^2)\cdot \arcsin \frac{y}{x}}$, **(2)** $(\sin x)^q$,
(3) $(\sin x)^{\ln(x^2+y^2)\cdot \arcsin \frac{y}{x}}$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

12. Найдите дифференциал первого порядка функции **(1)** $p^{\ln(x^2+y^2)\cdot \arcsin \frac{y}{x}}$, **(2)** $(\sin x)^q$,
(3) $(\sin x)^{\ln(x^2+y^2)\cdot \arcsin \frac{y}{x}}$,

$\boxed{\text{Э}}$ **Примеры экзаменационных задач.**

13. Найдите дифференциал первого порядка функции **(1)** $p^{\cos(x^2+y^2)\cdot \ln \frac{2xy}{x^2+y^2}}$, **(2)** $(\operatorname{arctg} x)^q$,
(3) $(\operatorname{arctg} x)^{\cos(x^2+y^2)\cdot \ln \frac{2xy}{x^2+y^2}}$,

14. Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x)$, если $f(t)$ – дифференцируемая функция,
$\boxed{\text{С1}}$ **(1)** $u(x) = f(2x + 1)$, **(2)** $u(x) = f(x^2)$, **(3)** $u(x) = e^{f(x)}$,
$\boxed{\text{Д1}}$ **(4)** $u(x) = f(3x - 2)$, **(5)** $u(x) = f(e^x)$, **(6)** $u(x) = \ln f(x)$,
$\boxed{\text{Э}}$ **(7)** $u(x) = f(\ln x)$, **(8)** $u(x) = f(f(x))$, **(9)** $u(x) = \sqrt{f(x)}$,

15. Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x)$, если $f(t, s)$ – дифференцируемая функция,
$\boxed{\text{С1}}$ **(1)** $u(x) = f(x, 2x)$,
$\boxed{\text{Д1}}$ **(2)** $u(x) = f(x^2, x^3)$,
$\boxed{\text{С2}}$ **(3)** $u(x) = \ln f(x, 2x)$,
$\boxed{\text{Д2}}$ **(4)** $u(x) = e^{f(2x,x)}$,
$\boxed{\text{Э}}$ **(5)** $u(x) = f(3x - 2, e^x)$, **(6)** $u(x) = \sin\big(f(3x - 2, e^x)\big)$, **(7)** $u(x) = f(\sqrt{x}, x)$,

16. Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x, y)$, если $f(t)$ – дифференцируемая функция,
$\boxed{\text{С1}}$ **(1)** $u(x, y) = f(x) + f(y)$,
$\boxed{\text{Д1}}$ **(2)** $u(x, y) = f(x + y)$,
$\boxed{\text{С2}}$ **(3)** $u(x, y) = \dfrac{f(x)}{f(y)}$,
$\boxed{\text{С3}}$ **(4)** $u(x, y) = f(x)^{f(y)}$,
$\boxed{\text{Д3}}$ **(5)** $u(x, y) = \log_{f(x)} f(y)$,
$\boxed{\text{Э}}$ **(6)** $u(x, y) = f(x^2 + y^2)$, **(7)** $u(x, y) = f(xy)$, **(8)** $u(x, y) = f(x)f(y)$,

17. Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x, y)$, если $f(t, s)$ – дифференцируемая функция,
$\boxed{\text{С1}}$ **(1)** $u(x, y) = f(2x, 3y)$, **(2)** $u(x, y) = f(x, y) \cdot f(y, x)$,
$\boxed{\text{Д1}}$ **(3)** $u(x, y) = f(x + y, x - y)$, **(4)** $u(x, y) = f(x + y, x - y) \cdot f(x - y, x + y)$,

$\boxed{\text{С2}}$ **(5)** $u(x,y) = f(x,y) + f(y,x)$,

$\boxed{\text{Д2}}$ **(6)** $u(x,y) = f(x,y) - f(y,x)$,

$\boxed{\text{С3}}$ **(7)** $u(x,y) = f(f(x,y), f(y,x))$, **(8)** $u(x,y) = f(x,y)^{f(x,y)}$,

$\boxed{\text{Д3}}$ **(9)** $u(x,y) = \log_{f(x,y)} f(x,y)$, **(10)** $u(x,y) = f(x,y)^{f(y,x)}$,

18. Найдите дифференциал первого порядка сложной функции $u(...)$, если f, g, h – нужное число раз дифференцируемые функции всех своих переменных,

$\boxed{\text{С1}}$ **(1)** $u(x,y) = f(x) + g(y)$, **(2)** $u(x,y,z) = f(x,y) + f(y,z) + f(z,x)$, **(3)** $u(x,y,z) = f(x)g(y)h(z)$,

$\boxed{\text{Д1}}$ **(4)** $u(x,y) = f(x)g(y)$, **(5)** $u(x,y,z) = f(x) + g(y) + h(z)$,

$\boxed{\text{С2}}$ **(6)** $u(x,y) = f(x,y) \cdot g(x,y)$.

$\boxed{\text{Д2}}$ **(7)** $u(x,y) = f(x-y) + g(x+y)$. **(8)** $u(x,y) = f(x,y) + g(x,y)$.

$\boxed{\text{С3}}$ **(9)** $u(x,y) = \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$.

$\boxed{\text{Д3}}$ **(10)** $u(x,y) = f(x,y)^{g(x,y)}$.

3. Дифференцируемые и недифференцируемые функции нескольких переменных

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

19. Пусть $u(x,y) = 3x + 4y + 12xy + x^2 + 2y^2$.
(1) Является ли данная функция непрерывной в точке $(0;\,0)$?
(2) Имеет ли данная функция частные производные первого порядка в точке $(0;\,0)$? Если имеет, найдите их.
(3) Верно ли, что данная функция имеет производную по любому направлению в точке $(0;\,0)$? Если имеет, найдите производную по направлению $\vec{l} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$.
(4) Верно ли, что производная по направлению $\vec{l}$ в точке $(0;\ 0)$ равна $\big(\operatorname{grad} u,\ \vec{l}\big)$?
(5) Верно ли, что $u(x,y) - x\frac{\partial u}{\partial x}(0;0) - y\frac{\partial u}{\partial y}(0;0) = o(\rho)$, где $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$?
(6) Является ли функция $u(x,y)$ дифференцируемой в точке $(0;0)$?

20. Пусть $u(x,y,z) = x + y + z + xy + xz + yz$.
(1) Имеет ли данная функция частные производные первого порядка в точке $(0;\,0;\,0)$? Если имеет, найдите их.
(2) Верно ли, что данная функция имеет производную по любому направлению в точке $(0;\,0;\,0)$? Если имеет, найдите производную по направлению $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.
(3) Верно ли, что производная по направлению $\vec{l}$ в точке $(0;\,0;\,0)$ равна $\left(\operatorname{grad} u, \vec{l}\right)$?
(4) Верно ли, что $u(x+dx, y+dy, z+dz) - \frac{\partial u}{\partial x}dx - \frac{\partial u}{\partial y}dy - \frac{\partial u}{\partial z}dz = o(\rho)$ в точке $(0;\,0;\,0)$, где $\rho = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$?
(5) Является ли указанная функция дифференцируемой в указанной точке?

$\boxed{\text{Д}}$ **Простые задачи для самостоятельного решения.**

21. Пусть $u(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
(1) Является ли данная функция непрерывной в точке $(0;\,0)$?
(2) Имеет ли данная функция частные производные первого порядка в точке $(0;\,0)$? Если имеет, найдите их.
(3) Верно ли, что данная функция имеет производную по любому направлению в точке $(0;\,0)$? Если имеет, найдите производную по направлению $\vec{l} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$.
(4) Верно ли, что производная по направлению $\vec{l}$ в точке $(0;\ 0)$ равна $\big(\operatorname{grad} u,\ \vec{l}\big)$?
(5) Верно ли, что $u(x,y) - x\frac{\partial u}{\partial x}(0;0) - y\frac{\partial u}{\partial y}(0;0) = o(\rho)$, где $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$?
(6) Является ли функция $u(x,y)$ дифференцируемой в точке $(0;0)$?

22. Пусть $u(x,y,z) = xyz(4 - x - y - z)$.
(1) Имеет ли данная функция частные производные первого порядка в точке $(1;\,1;\,1)$? Если имеет, найдите их.
(2) Верно ли, что данная функция имеет производную по любому направлению в точке $(1;\,1;\,1)$? Если имеет, найдите производную по направлению $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

(3) Верно ли, что производная по направлению $\vec{l}$ в точке (1; 1; 1) равна $\left(\operatorname{grad} u, \vec{l}\right)$?

(4) Верно ли, что $u(x+dx, y+dy, z+dz) - \frac{\partial u}{\partial x}dx - \frac{\partial u}{\partial y}dy - \frac{\partial u}{\partial z}dz = o(\rho)$ в точке (1; 1; 1), где $\rho = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$?

(5) Является ли указанная функция дифференцируемой в указанной точке?

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

23. Пусть $u(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.

(1) Является ли данная функция непрерывной в точке (0; 0)?

(2) Имеет ли данная функция частные производные первого порядка в точке (0; 0)? Если имеет, найдите их.

(3) Верно ли, что данная функция имеет производную по любому направлению в точке (0; 0)? Если имеет, найдите производную по направлению $\vec{l} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$.

(4) Верно ли, что производная по направлению $\vec{l}$ в точке (0; 0) равна $\left(\operatorname{grad} u, \vec{l}\right)$?

(5) Верно ли, что $u(x, y) - x\frac{\partial u}{\partial x}(0; 0) - y\frac{\partial u}{\partial y}(0; 0) = o(\rho)$, где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$?

(6) Является ли функция $u(x, y)$ дифференцируемой в точке $(0; 0)$?

24. Пусть $u(x, y, z) = \sqrt[3]{xyz}$.

(1) Имеет ли данная функция частные производные первого порядка в точке (0; 0; 0)? Если имеет, найдите их.

(2) Верно ли, что данная функция имеет производную по любому направлению в точке (0; 0; 0)? Если имеет, найдите производную по направлению $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

(3) Верно ли, что производная по направлению $\vec{l}$ в точке (0; 0; 0) равна $\left(\operatorname{grad} u, \vec{l}\right)$?

(4) Верно ли, что $u(x+dx, y+dy, z+dz) - \frac{\partial u}{\partial x}dx - \frac{\partial u}{\partial y}dy - \frac{\partial u}{\partial z}dz = o(\rho)$ в точке (0; 0; 0), где $\rho = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$?

(5) Является ли указанная функция дифференцируемой в указанной точке?

Д **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

25. Пусть $u(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y}$.

(1) Является ли данная функция непрерывной в точке (0; 0)?

(2) Имеет ли данная функция частные производные первого порядка в точке (0; 0)? Если имеет, найдите их.

(3) Верно ли, что данная функция имеет производную по любому направлению в точке (0; 0)? Если имеет, найдите производную по направлению $\vec{l} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$.

(4) Верно ли, что производная по направлению $\vec{l}$ в точке (0; 0) равна $\left(\operatorname{grad} u, \vec{l}\right)$?

(5) Верно ли, что $u(x, y) - x\frac{\partial u}{\partial x}(0; 0) - y\frac{\partial u}{\partial y}(0; 0) = o(\rho)$, где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$?

(6) Является ли функция $u(x, y)$ дифференцируемой в точке $(0; 0)$?

26. Пусть $u(x, y, z) = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3}$.

(1) Имеет ли данная функция частные производные первого порядка в точке (0; 0; 0)? Если имеет, найдите их.

(2) Верно ли, что данная функция имеет производную по любому направлению в точке (0; 0; 0)? Если имеет, найдите производную по направлению $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

(3) Верно ли, что производная по направлению $\vec{l}$ в точке (0; 0; 0) равна $\left(\operatorname{grad} u, \vec{l}\right)$?

(4) Верно ли, что $u(x+dx, y+dy, z+dz) - \frac{\partial u}{\partial x}dx - \frac{\partial u}{\partial y}dy - \frac{\partial u}{\partial z}dz = o(\rho)$ в точке (0; 0; 0), где $\rho = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$?

(5) Является ли указанная функция дифференцируемой в указанной точке?

4. Приложения первого дифференциала

С **Простые задачи для разбора на семинаре.**

27. Руководитель дома моды может нанять x менеджеров и y портных, при этом его прибыль пропорциональна величине x^2y^3 (x, y выражены в сотнях человек). Однако, общая площадь помещения ограничена и при большом количестве работников они мешают друг другу. Поэтому его прибыль пропорциональна также величине $6 - x - y$, т.е. в конечном счете прибыль равна $x^2y^3(6 - x - y)$. В данный момент в доме моды работают 100 менеджеров и 100 портных, т.е. $x = y = 1$. Можно нанять еще Δx менеджеров и Δy портных, причем по финансовым соображениям $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = r^2$, где r – некоторое небольшое число. Какие значения должно иметь отношение $\Delta x : \Delta y$ чтобы прирост прибыли был максимален?

С Простые задачи для разбора на семинаре.

28. Руководитель дома моды может нанять x менеджеров и y портных, при этом его прибыль пропорциональна величине x^3y^4 (x, y выражены в сотнях человек). Однако, общая площадь помещения ограничена и при большом количестве работников они мешают друг другу. Поэтому его прибыль пропорциональна также величине $8 - x - y$, т.е. в конечном счете прибыль равна $x^3y^4\bigl(8 - x - y\bigr)$. В данный момент в доме моды работают 100 менеджеров и 100 портных, т.е. $x = y = 1$. Можно нанять еще Δx менеджеров и Δy портных, причем по финансовым соображениям $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = r^2$, где r – некоторое небольшое число. Какие значения должно иметь отношение $\Delta x : \Delta y$ чтобы прирост прибыли был максимален?

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

29. Руководитель дома моды может нанять x менеджеров, y дизайнеров и z портных, при этом его прибыль пропорциональна величине xyz, если x, y, z выражены в сотнях человек. Однако, общая площадь помещения ограничена и при большом количестве работников они мешают друг другу. Поэтому его прибыль пропорциональна также величине $4 - x - y - z$, т.е. в конечном счете прибыль равна $xyz\bigl(4 - x - y - z\bigr)$. В данный момент в доме моды работают 40 менеджеров, 50 дизайнеров и 60 портных, т.е. $x = 0{,}4$, $y = 0{,}5$, $z = 0{,}6$. Можно нанять еще Δx менеджеров, Δy дизайнеров и Δz портных, причем по финансовым соображениям $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = r^2$, где r – некоторое небольшое число. Какие значения должно иметь отношение $\Delta x : \Delta y : \Delta z$, чтобы прирост прибыли был максимален?

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

30. Руководитель дома моды может нанять x менеджеров, y дизайнеров и z портных, при этом его прибыль пропорциональна величине $x^5y^3z^2$, если x, y, z выражены в сотнях человек. Однако, общая площадь помещения ограничена и при большом количестве работников они мешают друг другу. Поэтому его прибыль пропорциональна также величине $11 - 5x - 3y - 2z$, т.е. в конечном счете прибыль равна $x^5y^3z^2\bigl(11 - 5x - 3y - 2z\bigr)$. В данный момент в доме моды работают 30 менеджеров, 30 дизайнеров и 30 портных, т.е. $x = y = z = 0{,}3$. Можно нанять еще Δx менеджеров, Δy дизайнеров и Δz портных, причем по финансовым соображениям $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = r^2$, где r – некоторое небольшое число. Какие значения должно иметь отношение $\Delta x : \Delta y : \Delta z$, чтобы прирост прибыли был максимален?

2009-2010 Курс 1, семестр 2, семинар 3(m3-17)
Тема: Формула Тейлора для функции нескольких переменных

1. Формула Тейлора

1. Найдите первый и второй дифференциалы. Запишите формулу Тейлора с центром в указанной точке для $n = 2$ с остаточным членом в форме Пеано,
$\boxed{\text{С}}$ **(1)** $u = 2x + 3y,\ M_0 = (1; 1)$, **(2)** $u = x^2 + y^2,\ M_0 = (0; 0)$, **(3)** $u = x^3 + y^3 - 3xy,\ M_0 = (1; 1)$,
$\boxed{\text{Д}}$ **(4)** $u = xy,\ M_0 = (0; 0)$, **(5)** $u = xy(3 - x - y),\ M_0 = (1; 1)$,
$\boxed{\text{Э}}$ **(6)** $u = x^2 + 2xy + y^2,\ M_0 = (0; 0)$, **(7)** $u = x^2 + 3xy + y^2,\ M_0 = (0; 0)$, **(8)** $u = xy,\ M_0 = (3; 2)$,
(9) $u = x^2 + 3xy + y^2,\ M_0 = (2; 3)$, **(10)** $u = x^3 + y^3 - 3xy,\ M_0 = (0; 0)$, **(11)** $u = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x},\ M_0 = (1; 1)$,
(12) $u = x^y,\ M_0 = (1; 1)$, **(13)** $u = x^y,\ M_0 = (4; \dfrac{1}{2})$, **(14)** $u = xy(3 - x - y),\ M_0 = (0; 0)$,
(15) $u = xy(3 - x - y),\ M_0 = (0; 1)$, **(16)** $u = 2x^2 + y^2 - 2y^4 - x^4,\ M_0 = (0; 0),\ M_1 = (1; 0),\ M_2 = (1; \dfrac{1}{2})$,
$\boxed{\text{Т}}$ **(17)** $u = xy\ln(x^2 + y^2), M_0 = ((2e)^{-0,5}; (2e)^{-0,5})$, **(18)** $u = (x^2 + y^2)^2 e^{-x^2-y^2},\ M_0 = (1; 1)$,

2. Найдите первый и второй дифференциалы в точке M с координатами (x, y, z) и в точке M_0 с заданными координатами (x_0, y_0, z_0). Запишите формулу Тейлора с центром в указанных точках для $n = 2$ с остаточным членом в форме Пеано.
$\boxed{\text{С}}$ **(1)** $u = x^3 + x + y + xyz,\ M_0 = (1; 1; -1)$,
$\boxed{\text{Д}}$ **(2)** $u = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz,\ M_0 = (0; 0; 0)$,
$\boxed{\text{Э}}$ **(3)** $u = 2x + 3y + 4x,\ M_0 = (1; 1; 1)$, **(4)** $u = x^2 + y^2 + z^2,\ M_0 = (0; 1; 2)$,
(5) $u = x^2 + y^2 + z^2,\ M_0 = (1; 1; 1)$, **(6)** $u = xyz,\ M_0 = (0; 0; 0)$,
$\boxed{\text{Т}}$ **(7)** $u = xyz(4 - x - y - z),\ M_0 = (1; 1; 1)$, **(8)** $u = xy^2z^3(7 - x - 2y - 3z),\ M_0 = (1; 1; 1)$,

3. Найдите значение многочлена Тейлора $P_1(x_0, y_0|dx, dy) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0|dx, dy)$, многочлена Тейлора $P_2(x_0, y_0|dx, dy) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0|dx, dy) + \frac{1}{2}d^2 f(x_0, y_0|dx, dy)$, оцените приближенно значение А $= f(x_1, y_1)$, $dx = x_1 - x_0$, $dy = y_1 - y_0$, используя первый дифференциал и используя второй дифференциал, если
$\boxed{\text{С}}$ **(1)** $f(x, y) = xy$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $A = f(1{,}1,\ 0{,}8)$,
$\boxed{\text{Д}}$ **(2)** $f(x, y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $A = f(1{,}1,\ 0{,}9)$,
$\boxed{\text{Э}}$ **(3)** $f(x, y) = \dfrac{y}{x}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $A = f(1{,}1,\ 0{,}9)$, **(4)** $f(x, y) = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $A = f(1{,}1,\ 0{,}9)$,
(5) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $A = f(1{,}1,\ 0{,}9)$, **(6)** $f(x, y) = xy(3 - x - y)$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $A = f(1{,}1,\ 0{,}9)$, **(7)** $f(x, y) = x^2y(4 - 2x - y)$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $A = f(1{,}1,\ 0{,}9)$,
$\boxed{\text{Т}}$ **(8)** $f(x, y) = x^y$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $A = f(1{,}1,\ 0{,}9)$, **(9)** $f(x, y) = x^y$, $x_0 = 2$, $y_0 = 3$, $A = f(2{,}1,\ 2{,}9)$,
(10) $f(x, y) = \log_x y$, $x_0 = 2$, $y_0 = 4$, $A = f(2{,}1,\ 3{,}9)$, **(11)** $f(x, y) = \log_x y$, $x_0 = 2$, $y_0 = 4$, $A = f(2{,}1,\ 4{,}41)$,

2. Дифференцирование сложной функции

4. Найдите дифференциалы первого и второго порядка сложной функции $u(...)$, если f – дважды число раз дифференцируемая функция всех своих переменных,
$\boxed{\text{С}}$ **(1)** $u(x, y) = f(xy)$,
$\boxed{\text{Д}}$ **(2)** $u(x, y) = f(x + y)$,
$\boxed{\text{Э}}$ **(3)** $u(x, y) = \dfrac{f(x)}{f(y)}$, **(4)** $u(x, y) = f(x^2 + y^2)$, **(5)** $u(x, y) = f(x + y, x - y)$, **(6)** $u(x) = f(x, x)$,
(7) $u(x) = f(x, x^2, x^3)$, **(8)** $u(x, y) = f(x - y) + f(x + y)$. **(9)** $u(x, y) = f(x, y) - f(y, x)$.
(10) $u(x, y) = \dfrac{f(x, y)}{f(y, x)}$.

5. Найдите дифференциалы первого и второго порядка сложной функции $u(...)$, если f, g, h – нужное число раз дифференцируемые функции всех своих переменных,
$\boxed{\text{С}}$ **(1)** $u(x, y) = f(x)g(y)$,
$\boxed{\text{Д}}$ **(2)** $u(x, y) = f(x) + g(y)$,

Э **(3)** $u(x, y, z) = f(x) + g(y) + h(z)$, **(4)** $u(x, y, z) = f(x)g(y)h(z)$, **(5)** $u(x, y) = f(x - y) + g(x + y)$. **(6)** $u(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$. **(7)** $u(x, y) = f(x, y) + g(y, x)$.

3. Экономические приложения

На этом семинаре доказывать, что прибыль максимальна, не нужно.

С

6. Руководитель дома моды может нанять x дизайнеров и y портных, при этом его прибыль пропорциональна величине xy, если x, y выражены в сотнях человек. Однако, общая площадь помещения ограничена и при большом количестве работников они мешают друг другу. Поэтому его прибыль пропорциональна также величине $3 - x - y$, т.е. в конечном счете прибыль равна $xy(3 - x - y)$. **(1)** Докажите, что максимальная прибыль получится при $x = y = 1$. **(2)** Используя первый и второй дифференциалы, оцените прибыль при $x = 1{,}01$, $y = 0{,}99$. Сравните с точным значением. **(3)** В данный момент в доме моды работают 50 дизайнеров и 50 портных, т.е. $x = y = 0{,}5$. Можно нанять еще Δy дизайнеров и Δz портных, причем по финансовым соображениям $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = r^2$, где r – некоторое небольшое число. Какие значения должно иметь отношение $\Delta x : \Delta y$, чтобы прирост прибыли был максимален?

Д

7. Руководитель дома моды может нанять x дизайнеров и y портных, при этом его прибыль равна $x^2y(4 - 2x - y)$, если x, y выражены в сотнях человек. **(1)** Докажите, что максимальная прибыль получится при $x = y = 1$. **(2)** Используя первый и второй дифференциалы, оцените прибыль при $x = 1{,}1$, $y = 0{,}8$. Сравните с точным значением.

Т

8. Руководитель дома моды может нанять x менеджеров, y дизайнеров и z портных, при этом его прибыль пропорциональна величине xyz, если x, y, z выражены в сотнях человек. Однако, общая площадь помещения ограничена и при большом количестве работников они мешают друг другу. Поэтому его прибыль пропорциональна также величине $4 - x - y - z$, т.е. в конечном счете прибыль равна $xyz(4 - x - y - z)$. **(1)** Докажите, что максимальная прибыль получится при $x = y = z = 1$. **(2)** Используя первый и второй дифференциалы, оцените прибыль при $x = 1{,}01$, $y = 0{,}99$, $z = 1{,}02$. Сравните с точным значением.

9. Руководитель дома моды может нанять x менеджеров, y дизайнеров и z портных, при этом его прибыль пропорциональна величине $x^5y^3z^2$, если x, y, z выражены в сотнях человек. Однако, общая площадь помещения ограничена и при большом количестве работников они мешают друг другу. Поэтому его прибыль пропорциональна также величине $11 - 5x - 3y - 2z$, т.е. в конечном счете прибыль равна $x^5y^3z^2\big(11 - 5x - 3y - 2z\big)$. **(1)** Докажите, что максимальная прибыль получится при $x = y = z = 1$. **(2)** Используя первый и второй дифференциалы, оцените прибыль при $x = y = z = 1{,}02$. **(3)** В данный момент в доме моды работают 30 менеджеров, 30 дизайнеров и 30 портных, т.е. $x = y = z = 0{,}3$. Можно нанять еще Δx менеджеров, Δy дизайнеров и Δz портных, причем по финансовым соображениям $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = r^2$, где r – некоторое небольшое число. Какие значения должно иметь отношение $\Delta x : \Delta y : \Delta z$, чтобы прирост прибыли был максимален?

2009-2010 Курс 1, семестр 2, семинар 4(m3-18)
Тема: Локальный экстремум функции нескольких переменных

1. Найдите все точки возможного экстремума, проверьте выполнение достаточных условий экстремума для функции $f(x,y) = x^2 - 4xy + 6y^2$.

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

2. Найдите все точки возможного экстремума, проверьте выполнение достаточных условий.
(1) $f(x,y) = x^2 + y^2$, **(2)** $f(x,y) = -x^2 - 2xy - 4y^2$, **(3)** $f(x,y) = xy$,

3. Докажите, что в точке $M_0(x_0; y_0)$ выполнены необходимые условия локального экстремума первого порядка, т.е. первый дифференциал равен нулю, но указанная точка не является точкой локального экстремума. **(1)** $u(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, **(2)** $u(x,y) = x^2 - 2xy$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$,
(3) $u(x,y) = x^2 y$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, **(4)** $u(x,y) = xy^3$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$,
(5) $u(x,y) = xy(x^2 - y^2)$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

4. Найдите все точки возможного экстремума, проверьте выполнение достаточных условий:**(1)** $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy$, **(2)** $u(x,y,z) = -x^2 - y^2 - z^2 + xy + xz + yz$,
(3) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$,

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

5. Докажите, что точка $M_0(x_0, y_0)$ является точкой локального экстремума функции**(1)** $f(x,y) = x^2 y^2$, $M_0(0;0)$, **(2)** $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$, $M_0(1;0)$.

6. Найдите все точки локального экстремума: **(1)** $u(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4$, **(2)** $u(x,y,z) = xyz$.

7. Найдите все точки локального экстремума: **(1)** $u(x,y,z) = xyz(4 - x - y - z)$ в области $x > 0 \bigcap y > 0 \bigcap z > 0$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Простые задачи для самостоятельного решения.**

8. Найдите все точки возможного экстремума, проверьте выполнение достаточных условий.**(1)** $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$, **(2)** $f(x,y) = -x^2 + 8xy - y^2$, **(3)** $f(x,y) = x^2 - y^2$.

9. Докажите, что в точке $M_0(x_0; y_0)$ выполнены необходимые условия локального экстремума первого порядка, т.е. первый дифференциал равен нулю, но указанная точка не является точкой локального экстремума.**(1)** $u(x,y) = x^4 + x^2y^2 - y^4$, $M_0(0;0)$, **(2)** $u(x,y) = x^4 - y^4$, $M_0(0;0)$,
(3) $u(x,y) = x^3y^5$, $M_0(0;0)$, **(4)** $u(x,y) = x^2 - 4xy + 4y^2$, $M_0(0;0)$, **(5)** $u(x,y) = x^5 + y^5$, $M_0(0;0)$.

10. Найдите все точки возможного экстремума, проверьте выполнение достаточных условий:**(1)** $f(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - xy - xz - yz$, **(2)** $u(x,y,z) = -x^2 - 2y^2 - 3z^2 + xy - xz + yz$,
(3) $f(x,y,z) = 2xy + 2xz + 2yz$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

11. Докажите, что точка $M_0(x_0, y_0)$ является точкой локального экстремума функции**(1)** $f(x,y) = (x^2 - y^2)^2$, $M_0(0;0)$, **(2)** $f(x,y) = x\ln^2(x^2 + y^2 - 2)$, $M_0(1;1)$.

12. Найдите все точки локального экстремума: **(1)** $f(x,y,z) = x^2 + y^4 + z^6$, **(2)** $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$.

13. Найдите все точки локального экстремума: **(1)** $u(x,y,z) = xy^2z^3(7 - x - 2y - 3z)$ в области $x > 0 \bigcap y > 0 \bigcap z > 0$, **(2)** $u(x,y,z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$.

Ответы.

2. **(1)** ♦ Локальный минимум в точке (0; 0). **(2)** ♦ Локальный максимум в точке (0; 0). **(3)** ♦ Единственная точка возможного экстремума (0; 0), локального экстремума нет (седловая точка). **3.** **4.** **(1)** ♦ Единственная точка возможного экстремума (0; 0; 0) является точкой локального минимума. **(2)** ♦ Единственная точка возможного экстремума (0; 0; 0) является точкой локального максимума. **(3)** ♦ Единственная точка возможного экстремума (0; 0; 0) не является точкой локального экстремума. **5.** **6.** **(1)** ♦ Единственная точка возможного экстремума (0; 0; 0) является точкой локального минимума. **(2)** ♦ Единственная точка возможного экстремума (0; 0; 0) не является точкой локального экстремума. **7.** **(1)** ♦ Точка локального максимума (1; 1; 1). **8.** **(1)** ♦ Локальный минимум в точке (0; 0). **(2)** ♦ Единственная точка возможного экстремума (0; 0), локального экстремума нет (седловая точка).
(3) ♦ Единственная точка возможного экстремума (0; 0), локального экстремума нет (седловая точка).
9. **10.** **(1)** ♦ Единственная точка возможного экстремума (0; 0; 0) является точкой локального минимума.
(2) ♦ Единственная точка возможного экстремума (0; 0; 0) является точкой локального максимума.
(3) ♦ Единственная точка возможного экстремума (0; 0; 0) не является точкой локального экстремума.
11. **12.** **(1)** ♦ Единственная точка возможного экстремума (0; 0; 0) является точкой локального минимума.

(2) ♦ Единственная точка возможного экстремума (0; 0; 0) не является точкой локального экстремума.

13. **(1)** ♦ Точка локального максимума (1; 1; 1).

14. Найдите все точки возможного экстремума, проверьте выполнение достаточных условий:**(1)** $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+2xy$, **(2)** $u(x,y,z) = -x^2-y^2-z^2+xy+xz+yz$, **(3)** $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$,

15. Найдите все точки возможного экстремума, проверьте выполнение необходимых условий второго порядка, проверьте выполнение достаточных условий второго порядка.

С **(1)** $u(x,y,z) = 4x^2+4y^2+4z^2-2xy-2xz-2yz$,

Д **(2)** $u(x,y,z) = x^2+4y^2+9z^2$,

Э **(3)** $u(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz$, **(4)** $u(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz$, **(5)** $u(x,y,z) = xyz(4-x-y-z)$,

Т **(6)** $u(x,y,z,t) = xyzt(5-x-y-z-t)$, **(7)** $u(x,y,z) = xy^2z^3(7-x-2y-3z)$, **(8)** $u(x,y,z) = x+\dfrac{y^2}{4x}+\dfrac{z^2}{y}+\dfrac{2}{z}$. **(9)** $u(x,y,z) = x^4+y^4+z^4$,

16. Найдите все точки возможного экстремума, проверьте выполнение необходимых условий второго порядка, проверьте выполнение достаточных условий второго порядка.

С **(1)** $u(x,y) = x^5+y^5-5xy$, **(2)** $u(x,y) = xy(3-x-y)$,

Д **(3)** $u(x,y) = x^3+y^3-3xy$, **(4)** $u(x,y) = xy^2(4-x-2y)$,

Э **(5)** $u(x,y) = x^2+2y^2-2x^4-y^4$, **(6)** $u(x,y) = x^2y^2(3-x^2-y^2)$, **(7)** $u(x,y) = x^2y^3(6-x-y)$, **(8)** $u(x,y) = xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}$, **(9)** $u(x,y) = xye^{-x^2/2-y^2/2}$, **(10)** $u(x,y) = xye^{-x-y}$, **(11)** $u(x,y) = x^2y^2e^{-x-y}$, **(12)** $u(x,y) = x^3y^3e^{-x-y}$, **(13)** $u(x,y) = xy^2e^{-x-y}$, **(14)** $u(x,y) = x^3y^4e^{-x-y}$, **(15)** $u(x,y) = x^3y^4e^{-x-y^2}$, **(16)** $u(x,y) = (5-2x+y)e^{x^2-y}$,

17. Докажите, что в точке $M_0 = (x_0; y_0; z_0)$ выполнены необходимые условия локального экстремума первого порядка, но указанная точка не является точкой локального экстремума.

С **(1)** $u(x,y,z) = xyz$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0, z_0 = 0$,

Д **(2)** $u(x,y,z) = (x+y)(x+z)(y+z)$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0, z_0 = 0$,

Э **(3)** $u(x,y,z) = xy^2z^4$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0, z_0 = 0$, **(4)** $u(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0, z_0 = 0$, **(5)** $u(x,y,z) = x^3+y^3+z^3$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0, z_0 = 0$, **(6)** $u(x,y,z) = x^2y^2z^2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0, z_0 = 0$,

18. Найдите все точки экстремума функции $u(x,y) = x^2y+\dfrac{8}{x^2}+\dfrac{8}{y}$ в области $x > 0$, $y > 0$.

1. Экономические приложения

На этом семинаре нужно доказать, что прибыль максимальна.

С

19. Руководитель дома моды может нанять x дизайнеров и y портных, при этом его прибыль равна $x^2y(4-2x-y)$, если x, y выражены в сотнях человек. **(1)** Докажите, что максимальная прибыль получится при $x = y = 1$. **(2)** Используя первый и второй дифференциалы, оцените прибыль при $x = 1{,}1$, $y = 0{,}8$. Сравните с точным значением.

Д

20. Руководитель дома моды может нанять x дизайнеров и y портных, при этом его прибыль пропорциональна величине xy, если x, y выражены в сотнях человек. Однако, общая площадь помещения ограничена и при большом количестве работников они мешают друг другу. Поэтому его прибыль пропорциональна также величине $3-x-y$, т.е. в конечном счете прибыль равна $xy(3-x-y)$. **(1)** Докажите, что максимальная прибыль получится при $x = y = 1$. **(2)** Используя первый и второй дифференциалы, оцените прибыль при $x = 1{,}01$, $y = 0{,}99$. Сравните с точным значением. **(3)** В данный момент в доме моды работают 50 дизайнеров и 50 портных, т.е. $x = y = 0{,}5$. Можно нанять еще Δy дизайнеров и Δz портных, причем по финансовым соображениям $(\Delta x)^2+(\Delta y)^2 = r^2$, где r – некоторое небольшое число. Какие значения должно иметь отношение $\Delta x : \Delta y$, чтобы прирост прибыли был максимален?

Э

21. Руководитель дома моды может нанять x менеджеров, y дизайнеров и z портных, при этом его прибыль пропорциональна величине xyz, если x, y, z выражены в сотнях человек. Однако, общая площадь помещения ограничена и при большом количестве работников они мешают друг другу. Поэтому его прибыль пропорциональна также величине $4 - x - y - z$, т.е. в конечном счете прибыль равна $xyz(4 - x - y - z)$. **(1)** Докажите, что максимальная прибыль получится при $x = y = z = 1$. **(2)** Используя первый и второй дифференциалы, оцените прибыль при $x = 1{,}01$, $y = 0{,}99$, $z = 1{,}02$. Сравните с точным значением.

$\boxed{\textbf{T}}$

22. Руководитель дома моды может нанять x менеджеров, y дизайнеров и z портных, при этом его прибыль пропорциональна величине $x^5y^3z^2$, если x, y, z выражены в сотнях человек. Однако, общая площадь помещения ограничена и при большом количестве работников они мешают друг другу. Поэтому его прибыль пропорциональна также величине $11 - 5x - 3y - 2z$, т.е. в конечном счете прибыль равна $x^5y^3z^2\big(11 - 5x - 3y - 2z\big)$. **(1)** Докажите, что максимальная прибыль получится при $x = y = z = 1$. **(2)** Используя первый и второй дифференциалы, оцените прибыль при $x = y = z = 1{,}02$. **(3)** В данный момент в доме моды работают 30 менеджеров, 30 дизайнеров и 30 портных, т.е. $x = y = z = 0{,}3$. Можно нанять еще Δx менеджеров, Δy дизайнеров и Δz портных, причем по финансовым соображениям $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = r^2$, где r – некоторое небольшое число. Какие значения должно иметь отношение $\Delta x : \Delta y : \Delta z$, чтобы прирост прибыли был максимален?

23. Руководитель дома моды может нанять x менеджеров, y дизайнеров и z портных, при этом его прибыль пропорциональна величине $x^5y^4z^2$, если x, y, z выражены в сотнях человек. Однако, общая площадь помещения ограничена и при большом количестве работников они мешают друг другу. Поэтому его прибыль пропорциональна также величине $12 - 5x - 4y - 2z$, т.е. в конечном счете прибыль равна $x^5y^4z^2\big(12 - 5x - 4y - 2z\big)$. **(1)** Докажите, что максимальная прибыль получится при $x = y = z = 1$. **(2)** Используя первый и второй дифференциалы, оцените прибыль при $x = y = z = 0{,}99$. **(3)** В данный момент в доме моды работают 40 менеджеров, 40 дизайнеров и 40 портных, т.е. $x = y = z = 0{,}4$. Можно нанять еще Δx менеджеров, Δy дизайнеров и Δz портных, причем по финансовым соображениям $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = r^2$, где r – некоторое небольшое число. Какие значения должно иметь отношение $\Delta x : \Delta y : \Delta z$, чтобы прирост прибыли был максимален?

2009-2010 Курс 1, семестр 2, семинар 5(m3-19)
Тема: Неявные функции, 1

1. Неявные функции двух переменных

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. Найдите первую и вторую производные неявной функции $y = f(x)$, заданной уравнением $u(x, y) = 0$. Не следует явно выражать y через x, даже если это возможно. **(1)** $u(x, y) = 2x + 3y - 5$, **(2)** $u(x, y) = xy - 1$, **(3)** $u(x, y) = x^4 + y^4 + y - 2$, **(4)** $u(x, y) = x^3 + \ln(x + 1) - y^2 + e^y - 1$ в точке $(0; 0)$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Простые задачи для самостоятельного решения.**

2. Найдите первую и вторую производные неявной функции $y = f(x)$, заданной уравнением $u(x, y) = 0$. Найдите все точки возможного экстремума функции $f(x)$. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума в каждой точке возможного экстремеума (если таковые существуют). Не следует явно выражать y через x, даже если это возможно. **(1)** $u(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, **(2)** $u(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$, **(3)** $u(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - x^2y$, **(4)** $u(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - xy^2$, **(5)** $u(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 4xy$, $x > 0$, **(6)** $u(x, y) = 8x^2y - x^4 - y^4$, **(7)** $u(x, y) = x^4 + y^4 - 1$,

3. Найдите первые и вторые производные неявной функции $z = f(x, y)$, заданной уравнением $u(x, y, z) = 0$. **(1)** $u = x^2 + y^2 - z$, **(2)** $u = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, **(3)** $u = z^3 + x + y + xyz$, **(4)** $u = x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2$, **(5)** $u = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 8(x^2 + y^2 - z^2)$, **(6)** $u = (x^2 + y^2 + z^2)^3 - 27x^2y^2z$.
Не следует пытаться получить решение уравнения $u(x, y, z) = 0$ в явном виде, даже если это возможно.

2. Неявные функции трех переменных

4. Найдите первые и вторые производные неявной функции $z = f(x, y)$, заданной уравнением $u(x, y, z) = 0$. Найдите все точки возможного экстремума функции $f(x, y)$. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума в каждой точке возможного экстремума (если таковые существуют). **(1)** $u = x^2 + y^2 - z$, **(2)** $u = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, **(3)** $u = z^3 + x + y + xyz$, **(4)** $u = x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2$, **(5)** $u = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 8(x^2 + y^2 - z^2)$, **(6)** $u = (x^2 + y^2 + z^2)^3 - 27x^2y^2z$.
Не следует пытаться получить решение уравнения $u(x, y, z) = 0$ в явном виде, даже если это возможно.

5. Найдите все точки локального экстремума функции $z(x, y)$, определяемой неявно уравнением $x^2 + 4y^2 + z^2 - 2xy - 6x - 24 = 0$.

$\boxed{\text{С}}$

6. Пусть неявная функция $z = f(x, y)$ задана уравнением $z^3 + 3xyz = 1$. Вычислите первый и второй дифференциалы этой функции, dz и d^2z. Найдите все точки возможного экстремума функции $z = f(x, y)$. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума.

$\boxed{\text{Д}}$

7. Пусть функция $z = f(x, y)$ задана уравнением $z^3 + 5xyz = x^5 + y^5 + 4z^5$. Найдите dz. Найдите все точки возможного экстремума функции $z = f(x, y)$. Найдите d^2z. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума.

$\boxed{\text{Э}}$

8. Пусть функция $z = f(x, y)$ задана уравнением $z^3 + xyz = x + y$. Найдите dz. Найдите все точки возможного экстремума функции $z = f(x, y)$. Найдите d^2z. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума.

9. Пусть неявная функция $z = f(x, y)$ задана уравнением $x^4 + y^4 + 2z^4 - 4xyz = 0$. Найдите dz. Найдите все точки возможного экстремума функции $z = f(x, y)$ в области $x > 0 \bigcap y > 0 \bigcap z > 0$. Найдите d^2z. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума.

10. Пусть неявная функция $z = f(x, y)$ задана уравнением $x^6 + y^6 + 4z^6 - 6xyz = 0$. Найдите dz и d^2z. Найдите все точки возможного экстремума функции $z = f(x, y)$ в области $x > 0 \bigcap y > 0 \bigcap z > 0$. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума.

11. Пусть неявная функция $z = f(x, y)$ задана уравнением $\ln x + \ln y + \ln z = xyz - 1$. Найдите dz и d^2z. Найдите все точки возможного экстремума функции $z = f(x, y)$ в области $x > 0 \bigcap y > 0 \bigcap z > 0$. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума.

2009-2010 Курс 1, семестр 2, семинар 6(m3-20)
Тема: Условный экстремум, 1

1. Используя метод исключения, найдите все точки экстремума функции $u(x,y)$ при условии $f(x,y)=0$.
$\boxed{\text{С}}$ **(1)** $u=x^2+y^2$, $f=x+y-2$; **(2)** $u=x+y$, $f=x^2+y^2-2$;
$\boxed{\text{Д}}$ **(3)** $u=xy$, $f=x+y-2$; **(4)** $u=x+y$, $f=xy-1$;
$\boxed{\text{Э}}$ **(5)** $u=x+y$, $f=x^2+y^2-2x$; **(6)** $u=x+y$, $f=x^2-2y$; **(7)** $u=y-x^2$, $f=x^2+y^2-4$. **(8)** $u=xy$, $f=x^3+y^3-2xy$. **(9)** $u=xy^2$, $f=x+2y-3$. **(10)** $u=xy^2$, $f=x+y-3$. **(11)** $u=x^2y^3$, $f=2x+3y-5$. **(12)** $u=x^2y^3$, $f=x+y-900$.

2. Используя метод Лагранжа, найдите все точки экстремума функции $u(x,y)$ при условии $f(x,y)=0$. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума:
$\boxed{\text{С}}$ **(1)** $u=x+y$, $f=x^2+y^2-2$; **(2)** $u=x^2+y^2$, $f=x+y-2$;
$\boxed{\text{Д}}$ **(3)** $u=xy$, $f=x+y-2$; **(4)** $u=x+y$, $f=xy-1$;
$\boxed{\text{Э}}$ **(5)** $u=x+y$, $f=x^2+y^2-2x$; **(6)** $u=x+y$, $f=x^2-2y$; **(7)** $u=y-x^2$, $f=x^2+y^2-4$. **(8)** $u=xy$, $f=x^3+y^3-2xy$. **(9)** $u=xy^2$, $f=x+2y-3$. **(10)** $u=xy^2$, $f=x+y-3$. **(11)** $u=x^2y^3$, $f=2x+3y-5$. **(12)** $u=x^2y^3$, $f=x+y-900$.

3. Используя метод Лагранжа, найдите все точки экстремума функции $u(x,y,z)$ при условии $f(x,y,z)=0$. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума:
$\boxed{\text{С}}$ **(1)** $u=x^2y^3z^4$, $f=2x+3y+4z-9$. **(2)** $f=x+y+z$, $u=xyz-1$.
$\boxed{\text{Д}}$ **(3)** $u=x+y+z$, $f=x^2+y^2+z^2-3$. **(4)** $u=xyz$, $f=x+y+z-3$.
$\boxed{\text{Э}}$ **(5)** $u=x^2+y^2+z^2$, $f=x+y+z-3$. **(6)** $u=x^2+y^2+z^2$, $f=xyz-1$. **(7)** $u=xyz$, $f=x^2+y^2+z^2-3$. **(8)** $u=x+y+z$, $f=x^2+y^2+z^2-3$. **(9)** $u=2x+3y+4z$, $f=x^2y^3z^4-1$. **(10)** $u=x^2y^3z^4$, $f=x+y+z-18$, $x>0\bigcap y>0\bigcap z>0$.

$\boxed{\text{С}}$

4. Предприниматель может израсходовать не более 480 уе на аренду станков, наем персонала и закупку сырья, причем 1 станок стоит 3 уе, 1 сотрудник получает 2 уе, 1 единица сырья стоит 5 уе. Доход предпринимателя численно равен $u=x^6y^8z^{10}$, где x – число станков, y – число сотрудников, z – количество единиц сырья. Сколько нужно станков, сотрудников и сырья, чтобы получить наибольший доход?

5. Предприниматель может израсходовать не более 38808 у.е. на аренду станков, наем персонала и закупку сырья, причем 1 станок стоит 7 у.е., 1 сотрудник получает 4 у.е., 1 единица сырья стоит 11 у.е.. Доход предпринимателя численно равен $u=\sqrt[3]{x}\,\sqrt[5]{y}\,\sqrt[6]{z}$, где x – число станков, y – число сотрудников, z – количество единиц сырья. Сколько нужно станков, сотрудников и сырья, чтобы получить наибольший доход?

$\boxed{\text{Д}}$

6. Предприниматель может израсходовать не более 880 уе на аренду станков, наем персонала и закупку сырья, причем 1 станок стоит 2 уе, 1 сотрудник получает 1 уе, 1 единица сырья стоит 4 уе. Доход предпринимателя численно равен $u=x^4y^6z^{12}$, где x – число станков, y – число сотрудников, z – количество единиц сырья. Сколько нужно станков, сотрудников и сырья, чтобы получить наибольший доход?

7. Предприниматель может израсходовать не более 33984 у.е. на аренду станков, наем персонала и закупку сырья, причем 1 станок стоит 12 у.е., 1 сотрудник получает 6 у.е., 1 единица сырья стоит 8 у.е.. Доход предпринимателя численно равен $u=\sqrt[7]{x}\,\sqrt[2]{y}\,\sqrt[5]{z}$, где x – число станков, y – число сотрудников, z – количество единиц сырья. Сколько нужно станков, сотрудников и сырья, чтобы получить наибольший доход?

$\boxed{\text{Э}}$

8. Предприниматель может израсходовать не более 27195 у.е. на аренду станков, наем персонала и закупку сырья, причем 1 станок стоит 5 у.е., 1 сотрудник получает 3 у.е., 1 единица сырья стоит 7 у.е.. Доход предпринимателя численно равен $u=\sqrt[8]{x}\,\sqrt[9]{y}\,\sqrt[11]{z}$, где x – число станков, y – число сотрудников, z – количество единиц сырья. Сколько нужно станков, сотрудников и сырья, чтобы получить наибольший доход?

2009-2010 Курс 1, семестр 2, семинар 7(m3-21)
Тема: Неявные функции, 2

С

1. Найдите все точки локального экстремума функции $y(x)$, определяемой неявно уравнением $(y-x)^3+x+6=0$.

2. Найдите все точки локального экстремума функции $y(x)$ и $x(y)$, определяемой неявно уравнением $x^4+y^4=8xy^2$.

3. Пусть неявная функция $z=f(x,y)$ задана уравнением $xz^5+y^3z-x^3=0$. Найдите dz и d^2z в точке $M_0=(1;\,0;\,1)$.

4. Пусть неявная функция $z=f(x,y)$ задана уравнением $x^4+y^4+z^4=2(x^2+y^2+z^2)$. Найдите все точки возможного экстремума функции $z=f(x,y)$. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума.

5. Найдите z_x, z_{xx}, dz, d^2z, если $\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^2+y^2+z^2=6. \end{cases}$ Найдите точки локального экстремума функции $z(x)$.

6. Найдите $du,\ dv,\ d^2u,\ d^2v$, если $\begin{cases} x=uv, \\ y=u+v, \end{cases}$ причем $u=u(x,y),\ v=v(x,y)$. Выражать явно $u=u(x,y),\ v=v(x,y)$ не следует, даже если это возможно.

7. Найдите $dz,\ d^2z$, если $\begin{cases} x=u+v, \\ y=u^2+v^2, \\ z=u^3+v^3, \end{cases}$ причем $u=u(x,y),\ v=v(x,y),\ z=z(x,y)$. Выражать явно $u=u(x,y),\ v=v(x,y)$ не следует, даже если это возможно.

8. Найдите $dz,\ d^2z$, если $\begin{cases} x=u\cos v, \\ y=u\sin v, \\ z=uv, \end{cases}$ причем $u=u(x,y),\ v=v(x,y),\ z=z(x,y)$. Выражать явно $u=u(x,y),\ v=v(x,y)$ не следует, даже если это возможно.

Д

9. Найдите все точки локального экстремума функции $y(x)$, определяемой неявно уравнением $(y-x^2)^2=x^5$.

10. Найдите все точки локального экстремума функции $y(x)$ и $x(y)$, определяемой неявно уравнением $(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2)$.

11. Пусть неявная функция $z=f(x,y)$ задана уравнением $x^3+y^3+z^3=5xyz$. Найдите dz и d^2z в точке $M_0=(1;\,1;\,2)$.

12. Пусть неявная функция $z=f(x,y)$ задана уравнением $z^2+xyz=xy^2+x^3$. Найдите все точки возможного экстремума функции $z=f(x,y)$. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума.

13. Найдите z_x, z_{xx}, dz, d^2z, если $\begin{cases} xyz=2, \\ x+y+z=4. \end{cases}$ Найдите точки локального экстремума функции $z(x)$.

14. Найдите $du,\ dv,\ d^2u,\ d^2v$, если $\begin{cases} x=u^2+v^2, \\ y=u+v, \end{cases}$ причем $u=u(x,y),\ v=v(x,y)$. Выражать явно $u=u(x,y),\ v=v(x,y)$ не следует, даже если это возможно.

15. Найдите $dz,\ d^2z$, если $\begin{cases} x=u+v, \\ y=uv, \\ z=u^2+v^2, \end{cases}$ причем $u=u(x,y),\ v=v(x,y),\ z=z(x,y)$. Выражать явно $u=u(x,y),\ v=v(x,y)$ не следует, даже если это возможно.

16. Найдите $dz,\ d^2z$, если $\begin{cases} x=ue^{u+v}, \\ y=ue^{u-v}, \\ z=u^2+v^2, \end{cases}$ причем $u=u(x,y),\ v=v(x,y),\ z=z(x,y)$. Выражать явно $u=u(x,y),\ v=v(x,y)$ не следует, даже если это возможно.

2009-2010 Курс 1, семестр 2, семинар 8(m4-22)
Тема: Условный экстремум, 2

С

1. Докажите, что точки M_1 с координатами $x_1 = 1$, $y_1 = 1$, $\xi_1 = 3$, $\eta_1 = 3$ и M_2 с координатами $x_2 = -1$, $y_2 = -1$, $\xi_2 = 3$, $\eta_2 = 3$ удовлетворяют необходимым условиям экстремума в форме Лагранжа функции $f(x, y, \xi, \eta) = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$ с двумя условиями связи, $x^2 + y^2 = 2$ и $\xi + \eta = 6$. Проверьте для каждой из них выполнение достаточных условий в форме Лагранжа. Определите тип экстремума (минимум, максимум).

2. Задача о гантельке на конусе. Докажите, что точки M_1 с координатами $x_1 = 1$, $y_1 = 1$, $\xi_1 = -1$, $\eta_1 = 1$ и M_2 с координатами $x_2 = 1$, $y_2 = -1$, $\xi_2 = -1$, $\eta_2 = -1$ удовлетворяют необходимым условиям экстремума в форме Лагранжа функции $f(x, y, \xi, \eta) = y + \xi$ с тремя условиями связи, $x = y$, $\xi + \eta = 0$, $(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = 4$. Проверьте для каждой из них выполнение достаточных условий в форме Лагранжа. Определите тип экстремума (минимум, максимум).

3. Докажите, что точка M с координатами $x = 1$, $y = 1$, $z = 2$ удовлетворяет необходимым условиям экстремума в форме Лагранжа функции $f(x, y, z) = x + y + z$ с двумя условиями связи, $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ и $xyz = 2$. Проверьте выполнение достаточных условий в форме Лагранжа. Определите тип экстремума (минимум, максимум).

4. Найдите одну (любую) точку экстремума функции $u = xy^2z^3$ с двумя условиями $x + y - z = 0$, $6x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 36$, расположенную в области $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$. Проведите полное исследование.123

5. 221-Найдите точку экстремума функции $u = xyz$ с условиями $x + y + z = 5$ и $xy + xz + yz = 8$.

Д

6. Докажите, что точки M_1 с координатами $x_1 = 1$, $y_1 = 1$, $\xi_1 = 3$, $\eta_1 = 3$ и M_2 с координатами $x_2 = 1$, $y_2 = 1$, $\xi_2 = 7$, $\eta_2 = 7$ удовлетворяют необходимым условиям экстремума в форме Лагранжа функции $f(x, y, \xi, \eta) = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$ с двумя условиями связи, $x^2 + y^2 = 2$ и $(\xi - 5)^2 + (\eta - 5)^2 = 8$. Проверьте для каждой из них выполнение достаточных условий в форме Лагранжа. Определите тип экстремума (минимум, максимум).

7. Задача о гантельке на шаре. Докажите, что точки M_1 с координатами $x_1 = 1$, $y_1 = 1$, $\xi_1 = -1$, $\eta_1 = 1$ и M_2 с координатами $x_2 = 1$, $y_2 = -1$, $\xi_2 = -1$, $\eta_2 = -1$ удовлетворяют необходимым условиям экстремума в форме Лагранжа функции $f(x, y, \xi, \eta) = y + \xi$ с тремя условиями связи, $x^2 + y^2 = 2$, $\xi^2 + \eta^2 = 2$, $(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = 4$. Проверьте для каждой из них выполнение достаточных условий в форме Лагранжа. Определите тип экстремума (минимум, максимум).

8. Докажите, что точка M с координатами $x = 3$, $y = 3$, $z = 1$ удовлетворяет необходимым условиям экстремума в форме Лагранжа функции $f(x, y, z) = x + y + z$ с двумя условиями связи, $x^2 + y^2 + z^2 = 19$ и $xyz = 9$. Проверьте выполнение достаточных условий в форме Лагранжа. Определите тип экстремума (минимум, максимум).

9. Найдите одну (любую) точку экстремума функции $u = xy^2z^5$ с двумя условиями $x - y + z = 0$, $10x^2 + 5y^2 + 2z^2 = 240$, расположенную в области $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$. Проведите полное исследование.

10. 212-Найдите точку экстремума функции $u = x + y + z$ с условиями $xyz = 4$ и $xy + xz + yz = 8$.

11. 122-Найдите точку экстремума функции $u = xy + xz + yz$ с условиями $xyz = 4$ и $x + y + z = 5$.