2008-2009 Курс 1, семестр 2, семинар 25-26
Тема: Определенный интеграл

1. Дифференцирование по верхнему пределу

С **Для обязательного разбора на семинаре.**

1. Найдите производную функции **(1)** $f(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,dt$, **(2)** $f(x) = \int_x^1 \arcsin\sqrt{t}\,dt$, **(3)** $f(x) = \int_0^{x^2} \ln(\frac{\cos t}{1+t^3})\,dt$, **(4)** $f(x) = \int_{\operatorname{arctg} x}^{\cos x} e^{-t^2}\,dt$.

Д **Обязательное задание на дом.**

2. Найдите производную функции **(1)** $f(x) = \int_0^x \cos\sqrt{t}\,dt$, **(2)** $f(x) = \int_x^1 \operatorname{arctg} t\,dt$, **(3)** $f(x) = \int_0^{x^3} e^{\sqrt[3]{t}}\,dt$, **(4)** $f(x) = \int_{x^3}^{x^2} \arcsin t\,dt$.

2. Применение формулы Ньютона-Лейбница

С **Для обязательного разбора на семинаре.**

3. Найдите **(1)** $\int_0^2 x(2-x)\,dx$, **(2)** $\int_0^2 x^3(2-x)^2\,dx$, **(3)** $\int_0^\pi x\sin x\,dx$, **(4)** $\int_1^e x\ln x\,dx$, **(5)** $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$, **(6)** $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, **(7)** $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$, **(8)** $\int_2^3 \frac{dx}{x^2-6x+5}$, **(9)** $\int_0^\pi e^x\sin x\,dx$, **(10)** $\int_1^{e^\pi} \sin\ln x\,dx$, **(11)** $\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \frac{dx}{\sin x}$,

Д **Обязательное задание на дом.**

4. Найдите **(1)** $\int_0^3 x(3-x)\,dx$, **(2)** $\int_0^3 x^5(3-x)^7\,dx$, **(3)** $\int_0^\pi x\cos x\,dx$, **(4)** $\int_1^e x^2\ln x\,dx$, **(5)** $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-x+1}$, **(6)** $\int_{-1000}^{1000} \frac{dx}{4+x^2}$, **(7)** $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^3}$, **(8)** $\int_2^6 \frac{dx}{x^2-8x+7}$, **(9)** $\int_0^\pi e^{-x}\sin x\,dx$, **(10)** $\int_1^{e^\pi} \cos\ln x\,dx$, **(11)** $\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{dx}{\cos x}$,

2008-2009 Курс 1, семестр 2, семинар 27
Тема: Приложения определенного интеграла

1. Площадь плоской фигуры

С **Для обязательного разбора на семинаре.**

1. Найдите площадь фигуры **(1)** $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant x^2$, **(2)** $0 \leqslant x \leqslant 1$, $x^8 \leqslant y \leqslant x^7$, **(3)** $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\sqrt[7]{x} \leqslant y \leqslant \sqrt[8]{x}$, **(4)** $1 \leqslant x \leqslant p$, $p > 1$, $\frac{1}{x^8} \leqslant y \leqslant \frac{1}{x^7}$, **(5)** $1 \leqslant x \leqslant p$, $p > 1$, $\frac{1}{\sqrt[7]{x}} \leqslant y \leqslant \frac{1}{\sqrt[8]{x}}$, **(6)** $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \sin x$, **(7)** $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \sin^2 x$, **(8)** $1 \leqslant x \leqslant 5$, $0 \leqslant y \leqslant -x^2+6x-5$, **(9)** $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant e^x$,

Д **Обязательное задание на дом.**

2. Найдите площадь фигуры **(1)** $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant x^3$, **(2)** $0 \leqslant x \leqslant 1$, $x^6 \leqslant y \leqslant x^5$, **(3)** $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\sqrt[5]{x} \leqslant y \leqslant \sqrt[6]{x}$, **(4)** $1 \leqslant x \leqslant p$, $p > 1$, $\frac{1}{x^6} \leqslant y \leqslant \frac{1}{x^5}$, **(5)** $1 \leqslant x \leqslant p$, $p > 1$, $\frac{1}{\sqrt[5]{x}} \leqslant y \leqslant \frac{1}{\sqrt[6]{x}}$, **(6)** $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant \cos x$, **(7)** $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant y \leqslant \cos^2 x$, **(8)** $3 \leqslant x \leqslant 7$, $x^2-10x+21 \leqslant y \leqslant 0$, **(9)** $1 \leqslant x \leqslant e$, $0 \leqslant y \leqslant \ln x$,

2. Средние значения

С **Для обязательного разбора на семинаре.**

3. Известно, что x – координата центра масс плоской пластинки постоянной толщины и плотности, выполненной в виде фигуры $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$, $f(x) \geqslant 0$, равна $x_0 = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$. Вычислите x – координату центра масс плоской фигуры

(1) $0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1$. **(2)** $0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x$. **(3)** $0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1-x$.
(4) $0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x^2$. **(5)** $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant y \leqslant \cos x$. **(6)** $0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant \sin x$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Обязательное задание на дом.**

4. Известно, что y – координата центра масс плоской пластинки постоянной толщины и плотности, выполненной в виде фигуры $a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x),\ f(x) \geqslant 0$, равна $x_0 = \frac{1}{2}\frac{\int_a^b (f(x))^2 dx}{\int_a^b f(x)dx}$. Вычислите y – координату центра масс плоской фигуры
(1) $0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1$. **(2)** $0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x$. **(3)** $0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1-x$.
(4) $0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x^2$. **(5)** $0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}$. **(6)** $0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant \sin x$.

3. Площади и объемы

$\boxed{\text{С}}$ **Для обязательного разбора на семинаре.**

5. Пусть $y_1(x) \leqslant y_2(x)$ при $x \in [a;\, b]$, область D определена неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$, $M[1] = \int_a^b \big(y_2(x) - y_1(x)\big)dx$, $M[x] = \int_a^b x\big(y_2(x) - y_1(x)\big)dx$, $M[x^2] = \int_a^b x^2\big(y_2(x) - y_1(x)\big)dx$, $\langle x\rangle = \frac{M[x]}{M[1]}$, $\langle x^2\rangle = \frac{M[x^2]}{M[1]}$, $Dx = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$, $M[y] = \frac{1}{2}\int_a^b \big(y_2^2(x) - y_1^2(x)\big)dx$, $\langle y\rangle = \frac{M[y]}{M[1]}$, $\mathrm{V}_{OX}[1] = \pi\int_a^b \big(y_2^2(x) - y_1^2(x)\big)dx$, $\mathrm{V}_{OX}[x] = \pi\int_a^b x\big(y_2^2(x) - y_1^2(x)\big)dx$, $\mathrm{V}_{OX}\,\langle x\rangle \xlongequal{\text{def}} \frac{\mathrm{V}OX[x]}{\mathrm{V}OX[1]}$, $\mathrm{V}_{OX}[y] = 0$, $\mathrm{V}_{OX}[y^2] = \frac{\pi}{2}\int_a^b \big(y_2^4(x) - y_1^4(x)\big)dx$, $\mathrm{V}_{OY}[1] = 2\pi\int_a^b x\big(y_2(x) - y_1(x)\big)dx$, $\mathrm{V}_{OY}[y] = \pi\int_a^b x\big(y_2^2(x) - y_1^2(x)\big)dx$, $\mathrm{V}_{OY}\,\langle y\rangle \xlongequal{\text{def}} \frac{\mathrm{VOY}[y]}{\mathrm{VOY}[1]}$, $\mathrm{V}_{OY}[x] = 0$, $\mathrm{V}_{OY}[x^2] = 2\pi\int_a^b x^3\big(y_2(x) - y_1(x)\big)dx$. Вычислите все указанные величины для
(1) $\rho(x) = 1,\ x \in [0;\, 1]$, **(2)** $\rho(x) = x^2,\ x \in [0;\, 12]$, **(3)** $\rho(x) = x(2-x),\ x \in [0;\, 2]$,
(4) $\rho(x) = \sin x,\ x \in [0;\, \pi]$,

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

6. Вычислите все указанные величины для **(1)** $\rho(x) = x^4(3-x)^5,\ x \in [0;\, 3]$,
(2) $\rho(x) = -x\ln x,\ x \in (0;\, 1]$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Обязательное задание на дом.**

7. Пусть $y_1(x) \leqslant y_2(x)$ при $x \in [a;\, b]$, область D определена неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$, $M[1] = \int_a^b \big(y_2(x) - y_1(x)\big)dx$, $M[x] = \int_a^b x\big(y_2(x) - y_1(x)\big)dx$, $M[x^2] = \int_a^b x^2\big(y_2(x) - y_1(x)\big)dx$, $\langle x\rangle = \frac{M[x]}{M[1]}$, $\langle x^2\rangle = \frac{M[x^2]}{M[1]}$, $Dx = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$, $M[y] = \frac{1}{2}\int_a^b \big(y_2^2(x) - y_1^2(x)\big)dx$, $\langle y\rangle = \frac{M[y]}{M[1]}$, $\mathrm{V}_{OX}[1] = \pi\int_a^b \big(y_2^2(x) - y_1^2(x)\big)dx$, $\mathrm{V}_{OX}[x] = \pi\int_a^b x\big(y_2^2(x) - y_1^2(x)\big)dx$, $\mathrm{V}_{OX}\,\langle x\rangle \xlongequal{\text{def}} \frac{\mathrm{V}OX[x]}{\mathrm{V}OX[1]}$, $\mathrm{V}_{OX}[y] = 0$, $\mathrm{V}_{OX}[y^2] = \frac{\pi}{2}\int_a^b \big(y_2^4(x) - y_1^4(x)\big)dx$, $\mathrm{V}_{OY}[1] = 2\pi\int_a^b x\big(y_2(x) - y_1(x)\big)dx$, $\mathrm{V}_{OY}[y] = \pi\int_a^b x\big(y_2^2(x) - y_1^2(x)\big)dx$, $\mathrm{V}_{OY}\,\langle y\rangle \xlongequal{\text{def}} \frac{\mathrm{VOY}[y]}{\mathrm{VOY}[1]}$, $\mathrm{V}_{OY}[x] = 0$, $\mathrm{V}_{OY}[x^2] = 2\pi\int_a^b x^3\big(y_2(x) - y_1(x)\big)dx$. Вычислите все указанные величины для
(1) $\rho(x) = \sqrt{x},\ x \in [0;\, 1]$, **(2)** $\rho(x) = x^3,\ x \in [0;\, 1]$, **(3)** $\rho(x) = x(4-x),\ x \in [0;\, 4]$,
(4) $\rho(x) = \cos x,\ x \in [0;\, \frac{\pi}{2}]$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

8. Вычислите все указанные величины для **(1)** $\rho(x) = x^3(2-x)^4,\ x \in [0;\, 2]$,
(2) $\rho(x) = -x^2\ln x,\ x \in (0;\, 1]$,

4. Интегральные суммы

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

9. Пусть непрерывная функция $f(x)$ задана на отрезке $[a;b]$ и натуральное число $n>0$. Пусть $h=\frac{b-a}{n}$, $x_k=a+kh$, так что $x_0=a$, $x_n=b$, и $S_n=\sum_{k=1}^{n}h\cdot\max_{x\in[x_{k-1};x_k]}f(x)$, $s_n=\sum_{k=1}^{n}h\cdot\min_{x\in[x_{k-1};x_k]}f(x)$. Найдите S_n, $\lim_{n\to+\infty}S_n$. Найдите s_n, $\lim_{n\to+\infty}s_n$, если **(1)** $f(x)=x$, $[a;b]=[0;1]$, **(2)** $f(x)=2^x$, $[a;b]=[0;1]$, убедитесь в том, что $\lim_{n\to+\infty}s_n=\lim_{n\to+\infty}S_n=\int_a^b f(x)dx$. Можно использовать тождества $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=1}^{n}q^k=\frac{q-q^{n+1}}{1-q}$, $|q|<1$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

10. $\star$ Пусть непрерывная функция $f(x)$ задана на отрезке $[a;b]$ и натуральное число $n>0$. Пусть $h=\frac{b-a}{n}$, $x_k=a+kh$, так что $x_0=a$, $x_n=b$, и $S_n=\sum_{k=1}^{n}h\cdot\max_{x\in[x_{k-1};x_k]}f(x)$, $s_n=\sum_{k=1}^{n}h\cdot\min_{x\in[x_{k-1};x_k]}f(x)$. Найдите S_n, $\lim_{n\to+\infty}S_n$. Найдите s_n, $\lim_{n\to+\infty}s_n$, если **(1)** $f(x)=1$, $[a;b]=[0;1]$, **(2)** $f(x)=x^2$, $[a;b]=[0;1]$, **(3)** $f(x)=e^x$, $[a;b]=[0;1]$, убедитесь в том, что $\lim_{n\to+\infty}s_n=\lim_{n\to+\infty}S_n=\int_a^b f(x)dx$. Можно использовать тождества $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=1}^{n}q^k=\frac{q-q^{n+1}}{1-q}$, $|q|<1$.