2009-2010 Курс 1, семестр 2, семинар 01(m3-01)
Тема: Точки, последовательности, множества в пространстве

2. Анализ-2, функции нескольких переменных

2.1. Многомерные пространства

2.1.1. Свойства множеств

2.1.2. Открытые, замкнутые, ограниченные множества

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. Какие из множеств на плоскости **(1)** $x^2 + y^2 \leqslant 1$, **(2)** $x = y = 0$, **(3)** $|x + y| > 1$,
(4) $x^2 + y^2 = 1$, **(5)** $-1 < x < 1$, $y = 0$,
являются (a) замкнутыми, (b) открытыми, (c) ограниченными?

$\boxed{\text{Д}}$ **Простые задачи для самостоятельного решения.**

2. Какие из множеств на плоскости **(1)** $x^2 + y^2 > 1$, **(2)** $(x^2 - 1) \cdot (y^2 - 1) = 0$, **(3)** $|x + y| \leqslant 1$,
(4) $y = x^2$, **(5)** $-1 < x < 1$, $y = x$,
являются (a) замкнутыми, (b) открытыми, (c) ограниченными?

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

3. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым, **(e)** выпуклым. Найдите **(f)** внутренность, **(g)** границу, **(h)** $\star$ множество всех предельных точек, **(i)** замыкание, **(j)** выпуклую оболочку указанного множества. Каждый раз мы указываем пространство, подмножеством которого является даное множество.
(1) Отрезок (без концов) на прямой, **(2)** Отрезок (с концами) на плоскости, **(3)** Квадрат (вместе с границами) на плоскости в трехмерном пространстве, **(4)** Шар (вместе со своей сферой) в трехмерном пространстве, **(5)** Сфера в трехмерном пространстве,

$\boxed{\text{Д}}$ **Простые задачи для самостоятельного решения.**

4. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым, **(e)** выпуклым. Найдите **(f)** внутренность, **(g)** границу, **(h)** $\star$ множество всех предельных точек, **(i)** замыкание, **(j)** выпуклую оболочку указанного множества. Каждый раз мы указываем пространство, подмножеством которого является даное множество.
(1) Отрезок (без концов) на плоскости, **(2)** Квадрат (без границ) на плоскости в трехмерном пространстве, **(3)** Треугольник на плоскости (включая внутренность), **(4)** Шар (без сферы) в трехмерном пространстве, **(5)** Отрезок (с концами) в трехмерном пространстве,

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

5. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым, **(e)** выпуклым. Найдите **(f)** внутренность, **(g)** границу, **(h)** $\star$ множество всех предельных точек, **(i)** замыкание, **(j)** выпуклую оболочку указанного множества. Каждый раз мы указываем пространство, подмножеством которого является даное множество.
(1) Два отрезка (с концами) без общих точек на прямой, **(2)** Два основания прямого кругового цилиндра в трехмерном пространстве, **(3)** Буква М русского алфавита на плоскости,
(4) Окружность в трехмерном пространстве, **(5)** Сфера и ее отражение в плоском зеркале в трехмерном пространстве,

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

6. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым, **(e)** выпуклым. Найдите **(f)** внутренность, **(g)** границу, **(h)** $\star$ множество всех предельных точек, **(i)** замыкание, **(j)** выпуклую оболочку указанного множества. Каждый раз мы указываем пространство, подмножеством которого является даное множество.
(1) Два отрезка (с концами) без общих точек на прямой в трехмерном пространстве,
(2) Треугольник на плоскости (без внутренности), **(3)** Окружность на плоскости, **(4)** Буква Г

русского алфавита в трехмерном пространстве. **(5)** Шар и его отражение в плоском зеркале в трехмерном пространстве,

С **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

7. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым, **(e)** выпуклым. Найдите **(f)** внутренность, **(g)** границу, **(h)** $\star$ множество всех предельных точек, **(i)** замыкание, **(j)** выпуклую оболочку указанного множества. Каждый раз мы указываем пространство, подмножеством которого является даное множество.
(1) Пусть вектор на плоскости $\vec{a}_n, n \geqslant 1$, имеет координаты $(r_n \cos\varphi_n, r_n \sin\varphi_n)$, $r_n = \frac{1}{n}$, $\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{2}$, вектор $\vec{b}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{a}_n$, конец вектора $\vec{b}_n$ обозначим M_n, причем $M_0 = (0;0)$, множество D на плоскости совпадает с ломаной линией $M_0M_1M_2M_3\ldots M_n\ldots$. **(2)** То же множество, если $r_n = \frac{1}{n}$, $\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{4n}$, **(3)** То же множество, если $r_n = 1$, $\varphi_n = n/100$, **(4)** То же множество исключая все точки M_n.

Д **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

8. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым, **(e)** выпуклым. Найдите **(f)** внутренность, **(g)** границу, **(h)** $\star$ множество всех предельных точек, **(i)** замыкание, **(j)** выпуклую оболочку указанного множества. Каждый раз мы указываем пространство, подмножеством которого является даное множество.
(1) Пусть вектор на плоскости $\vec{a}_n, n \geqslant 1$, имеет координаты $(r_n \cos\varphi_n, r_n \sin\varphi_n)$, $r_n = \frac{1}{2^n}$, $\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{4}$, вектор $\vec{b}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{a}_n$, конец вектора $\vec{b}_n$ обозначим M_n, причем $M_0 = (0;0)$, множество D на плоскости совпадает с ломаной линией $M_0M_1M_2M_3\ldots M_n\ldots$. **(2)** То же множество, если $r_n = \frac{1}{n}$, $\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{2^n}$, **(3)** То же множество, если $r_n = 1$, $\varphi_n = \frac{\pi n}{8}$, **(4)** То же множество исключая все точки M_n.

2.1.3. Свойства аналитических множеств

С **Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым, **(e)** выпуклым. Найдите **(f)** внутренность, **(g)** границу, **(h)** $\star$ множество всех предельных точек, **(i)** замыкание, **(j)** выпуклую оболочку указанного множества. Каждый раз мы указываем пространство, подмножеством которого является даное множество.
Множество на плоскости, состоящее из всех точек на поскости с координатами $(x;y)$, для которых **(1)** $x^2+y^2=1$, **(2)** $x^2+y^2>1$, **(3)** $|x|+|y|\leqslant 1$, **(4)** $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 2, \\ -1<x<1, \end{cases}$

Д **Простые задачи для самостоятельного решения.**

2. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым, **(e)** выпуклым. Найдите **(f)** внутренность, **(g)** границу, **(h)** $\star$ множество всех предельных точек, **(i)** замыкание, **(j)** выпуклую оболочку указанного множества. Каждый раз мы указываем пространство, подмножеством которого является даное множество.
Множество на плоскости, состоящее из всех точек на поскости с координатами $(x;y)$, для которых **(1)** $x^2+y^2<1$, **(2)** $|x|+|y|\geqslant 1$, **(3)** $1\leqslant|x|+|y|<2$, **(4)** $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 2, \\ -|x|\leqslant y\leqslant|x|, \end{cases}$

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

3. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым, **(e)** выпуклым. Найдите **(f)** внутренность, **(g)** границу, **(h)** $\star$ множество всех предельных точек, **(i)** замыкание, **(j)** выпуклую оболочку указанного множества. Каждый раз мы указываем пространство, подмножеством которого является даное множество.

Множество, состоящее из всех точек на поскости с координатами $(x;y)$, для которых
(1) $x^2+y^2 \leqslant 1$, **(2)** $1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4$, **(3)** $|x|+|y|=1$, **(4)** $|x|+|y|<1$, **(5)** $1 \leqslant |x|+|y| \leqslant 2$,
(6) $\begin{cases} x+y=1, \\ -1<x<1, \end{cases}$ **(7)** $\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ -1<x<1, \end{cases}$

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

4. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым, **(e)** выпуклым. Найдите **(f)** внутренность, **(g)** границу, **(h)** $\star$ множество всех предельных точек, **(i)** замыкание, **(j)** выпуклую оболочку указанного множества. Каждый раз мы указываем пространство, подмножеством которого является даное множество.
Множество, состоящее из всех точек на поскости с координатами $(x;y)$, для которых
(1) $x^2+y^2 \geqslant 1$, **(2)** $1 < x^2+y^2 < 4$, **(3)** $1 \leqslant x^2+y^2 < 4$, **(4)** $|x|+|y|>1$, **(5)** $x+y=1$,
(6) $\begin{cases} x+y=1, \\ -1 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$ **(7)** $\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ -1 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

5. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым, **(e)** выпуклым. Найдите **(f)** внутренность, **(g)** границу, **(h)** $\star$ множество всех предельных точек, **(i)** замыкание, **(j)** выпуклую оболочку указанного множества. Каждый раз мы указываем пространство, подмножеством которого является даное множество.
Множество, состоящее из всех точек на поскости с координатами $(x;y)$, для которых
(1) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 2, \\ -|x|<y<|x|, \end{cases}$ **(2)** $\begin{cases} x^2+9y^2 \leqslant 9, \\ 9x^2+y^2 \leqslant 9, \end{cases}$ **(3)** $\left[\begin{array}{l} |x|+5|y|<6 \\ 5|x|+|y|<6, \end{array}\right.$

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

6. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым, **(e)** выпуклым. Найдите **(f)** внутренность, **(g)** границу, **(h)** $\star$ множество всех предельных точек, **(i)** замыкание, **(j)** выпуклую оболочку указанного множества. Каждый раз мы указываем пространство, подмножеством которого является даное множество.
Множество, состоящее из всех точек на поскости с координатами $(x;y)$, для которых
(1) $\left[\begin{array}{l} x^2+9y^2=9 \\ 9x^2+y^2=9, \end{array}\right.$ **(2)** $\begin{cases} x^2+9y^2<9, \\ 9x^2+y^2 \leqslant 9, \end{cases}$ **(3)** $\begin{cases} x^2+9y^2<9, \\ 9x^2+y^2<9, \end{cases}$

2.1.4. Последовательности точек в пространстве

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. Найдите **(a)** Предел, если таковой существует, **(b)** Множество всех предельных точек указанной последовательности.
(1) $x_n=\frac{n+1}{n}$, $y_n=\frac{n-1}{n}$. **(2)** $x_n=\frac{5n+6}{6n+5}$, $y_n=\frac{n-1}{n+2}$. **(3)** $x_n=n\operatorname{tg}\frac{1}{n}$, $y_n=\sqrt{n}\operatorname{tg}\frac{2}{\sqrt{n}}$.
(4) $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $y_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$. **(5)** $x_n=\sin\frac{1}{n}$, $y_n=\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}$, $n>1$. **(6)** $x_n=\cos\frac{\pi}{n}$, $y_n=\sin\frac{\pi}{n}$.
(7) $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2^n}$, $y_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{3^n}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Простые задачи для самостоятельного решения.**

2. Найдите **(a)** Предел, если таковой существует, **(b)** Множество всех предельных точек указанной последовательности.
(1) $x_n=\frac{3n+2}{2n+3}$, $y_n=\frac{4n-1}{3n+1}$. **(2)** $x_n=n\sin\frac{1}{n}$, $y_n=n^2\sin\frac{1}{n^2}$. **(3)** $x_n=\left(1-\frac{2}{n}\right)^{3n}$, $y_n=\left(1+\sin\frac{1}{3n}\right)^{2n}$.
(4) $x_n=\operatorname{tg}\frac{\pi n+1}{4n-1}$, $y_n=2^{x_n}$. **(5)** $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{(-2)^n}$, $y_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1}\frac{3}{3^n}$.

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

3. Найдите **(a)** Предел, если таковой существует, **(b)** Множество всех предельных точек указанной последовательности.

(1) $x_n = \left(1 - \sin\frac{5}{n}\right)^{3n}$, $y_n = \left(1 + \operatorname{tg}\frac{1}{n}\right)^{2n}$. **(2)** $x_n = \sqrt[n]{n}$, $y_n = \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$. **(3)** $x_n = \cos\frac{\pi n}{6}$, $y_n = \sin\frac{\pi n}{6}$.
(4) $x_n = \operatorname{tg}\frac{\pi n+1}{3n-1}$, $y_n = \log_3(x_n)$.

Д **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

4. Найдите **(a)** Предел, если таковой существует, **(b)** Множество всех предельных точек указанной последовательности.
(1) $x_n = \left[1 - \ln(1 + \frac{1}{n})\right]^n$, $y_n = \left(1 + \operatorname{tg}\frac{1}{n}\right)^{2n}$. **(2)** $x_n = \left((1+n)\right)^{\frac{1}{n}}$, $y_n = \left((1+2n)\right)^{\frac{3}{n}}$,
(3) $x_n = \cos\frac{\pi n}{4}$, $y_n = \sin\frac{\pi n}{4}$. **(4)** $x_n = \cos\frac{\pi n}{4}$, $y_n = \sin\frac{\pi n}{8}$.
(5) $x_n = \frac{2n+3}{2n-1}$, $y_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}$, $n > 3$.

С **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

5. Найдите **(a)** Предел, если таковой существует, **(b)** Множество всех предельных точек указанной последовательности.
(1) $x_n = \cos\left(\frac{\pi n}{4} + \frac{1}{n}\right)$, $y_n = \sin\left(\frac{\pi n}{4} + \frac{1}{n}\right)$. **(2)** $x_n = \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \frac{1}{n}\cos n$, $y_n = \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \frac{1}{n}\sin n$.
(3) $x_n = \cos n$, $y_n = \sin n$. **(4)** $x_n = \cos\varphi_n$, $y_n = \sin\varphi_n$, $\varphi_n = \ln n$.
(5) $x_n = \cos\varphi_n$, $y_n = \sin\varphi_n$, $\varphi_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Д **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

6. Найдите **(a)** Предел, если таковой существует, **(b)** Множество всех предельных точек указанной последовательности.
(1) $x_n = \left(\frac{1+n}{en}\right)^{n^2}$, $y_n = \left(\frac{1-n}{en}\right)^{n^2}$. **(2)** $x_n = \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \frac{1}{n}\cos n$, $y_n = \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \frac{1}{n}\sin n$.
(3) $x_n = \cos\varphi_n$, $y_n = \sin\varphi_n$, $\varphi_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}$. **(4)** $x_n = \cos\varphi_n$, $y_n = \sin\varphi_n$, $\varphi_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{2^n}$.
(5) $x_n = \cos\varphi_n$, $y_n = \sin\varphi_n$, $\varphi_n = \sqrt{n}$.

С **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

7. Является ли указанное множество точек **(a)** ограниченным, **(b)** открытым, **(c)** замкнутым. Найдите **(d)** внутренность, **(e)** границу, **(f)** Множество всех предельных точек, **(g)** замыкание, **(h)** выпуклую оболочку указанного множества.
Множество точек $(x_n; y_n)$, $n \in N$ (все натуральные числа), если
(1) $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$. **(2)** $x_n = \cos\frac{\pi}{n}$, $y_n = \sin\frac{\pi}{n}$. **(3)** $x_n = \cos\frac{\pi n}{3}$, $y_n = \sin\frac{\pi n}{3}$.
(4) $x_n = \cos n$, $y_n = \sin n$.

Д **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

8. Является ли указанное множество точек **(a)** ограниченным, **(b)** открытым, **(c)** замкнутым. Найдите **(d)** внутренность, **(e)** границу, **(f)** Множество всех предельных точек, **(g)** замыкание, **(h)** выпуклую оболочку указанного множества.
Множество точек $(x_n; y_n)$, $n \in N$ (все натуральные числа), если
(1) $x_n = n$, $y_n = n$. **(2)** $x_n = \cos\frac{\pi n}{2}$, $y_n = \sin\frac{\pi n}{2}$. **(3)** $x_n = \cos\frac{\pi n}{4}$, $y_n = \sin\frac{\pi n}{4}$.
(4) $x_n = \cos n^2$, $y_n = \sin n^2$.

2009-2010 Курс 1, семестр 2, семинар 02(m3-02)
Тема: Функции нескольких переменных

2.2. Функции нескольких переменных

2.2.1. Линии уровня функции нескольких переменных

С **Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. Нарисуйте семейство линий равного уровня функции
(1) $u = x + y$, **(2)** $u = \frac{y}{x}$, **(3)** $u = \frac{y^2}{x}$, **(4)** $u = xy$, **(5)** $u = \frac{x^2+y^2}{2x}$,
Значения уровней подберите самостоятельно.

Д **Простые задачи для самостоятельного решения.**

2. Нарисуйте семейство линий равного уровня функции
(1) $u = 2x + 3y$, **(2)** $u = x^2 + y^2$, **(3)** $u = xy$, **(4)** $u = \frac{x^2}{y}$, **(5)** $u = \frac{x^2+y^2}{2y}$, **(6)** $u = \frac{2xy}{x^2+y^2}$,
(7) $u = y\big(x + \frac{1}{x}\big)$;

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

3. [1]Нарисуйте семейство линий равного уровня функции
(1) $u = x^2 + xy + y^2$, **(2)** $u = x^2 + 2xy + y^2$, **(3)** $u = x^2 + 3xy + y^2$, **(4)** $u = \frac{x^2+y^2}{2x+2y}$,
Значения уровней подберите самостоятельно.

Д **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

4. Нарисуйте семейство линий равного уровня функции
(1) $u = x^2 - xy + y^2$, **(2)** $u = x^2 - 2xy + y^2$, **(3)** $u = x^2 - 3xy + y^2$, **(4)** $u = \frac{x^2+y^2}{2x-2y}$,
Значения уровней подберите самостоятельно.

2.2.2. Линии уровня функции с модулем

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

1. Нарисуйте семейство линий равного уровня функции
(1) $u = |x| + |y|$, **(2)** $u = |x| - |y|$, **(3)** $u = |x + y| - |x - y|$,
Значения уровней подберите самостоятельно.

Д **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

2. Нарисуйте семейство линий равного уровня функции
(1) $u = |x| + y$, **(2)** $u = ||x| - |y||$, **(3)** $u = |x + y| + |x - y|$,
Значения уровней подберите самостоятельно.

2.2.3. Линии уровня функции с логическим условием

С **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

1. Нарисуйте семейство линий равного уровня функции
(1) $u = \min(x, y + y)$, **(2)** $u = \min(y - x, y)$, **(3)** $u = \min(x^2 + y^2,\ 2xy)$,
(4) $u = \max(x^2 - 2xy + y^2,\ 1 - 2xy)$. **(5)** $u = \min(x^2 + y^2,\ 1 - 2xy)$, **(6)** $u = \min(y + y^2, x^2 + y^2)$,
Значения уровней подберите самостоятельно.

Д **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

2. Нарисуйте семейство линий равного уровня функции
(1) $u = \min(x, x - y)$, **(2)** $u = \min(x + y, x - y)$, **(3)** $u = \min(x^2 + 2xy + y^2,\ 2xy + 1)$,
(4) $u = \max(x^2 - 2xy + y^2,\ x^2 - 1 + y^2)$. **(5)** $u = \min(2y + 2x, x^2 + 2x + y)$,
Значения уровней подберите самостоятельно.

[1]Решение некоторых задач этого раздела основано на использовании элементов аналитической геометрии и линейной алгебры

2.2.4. Асимптотические методы рисования линии уровня

С Сложные задачи для разбора на семинаре.

1. Нарисуйте линию уровня $u = 0$ функции **(1)** $u(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$,
(2) $u(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - xy$, в окрестности начала координат. Решение ищите в виде $y = cx^\alpha(1 + o(1))$.

Д Сложные задачи для самостоятельного решения.

2. Нарисуйте линию уровня $u = 0$ функции **(1)** $u(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$,
(2) $u(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2xy^2$, в окрестности начала координат. Решение ищите в виде $y = cx^\alpha(1 + o(1))$.

2.3. Предел функции нескольких переменных

2.3.1. Предел по совокупности переменных

С Простые задачи для разбора на семинаре.

1. Найдите предел по совокупности переменных $\lim_{(x,y)\to(a,b)} u(x, y)$, если
(1) $u(x, y) = xy,\ a = 2,\ b = 3$, **(2)** $u(x, y) = e^{xy},\ a = 2,\ b = 3$,

Д Простые задачи для самостоятельного решения.

2. Найдите предел по совокупности переменных $\lim_{(x,y)\to(a,b)} u(x, y)$, если
(1) $u(x, y) = \sin(x + y),\ a = \pi,\ b = \pi$, **(2)** $u(x, y) = \ln(xy),\ a = 2,\ b = \frac{1}{2}$,

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

3. Найдите предел по совокупности переменных $\lim_{(x,y)\to(a,b)} u(x, y)$, если
(1) $u(x, y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2},\ a = 0,\ b = 0$, **(2)** $u(x, y) = xy\ln(x^2 + y^2),\ a = 0,\ b = 0$,
(3) $u(x, y) = x\ln(x^2 + y^2),\ a = 0,\ b = 0$,

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

4. Найдите предел по совокупности переменных $\lim_{(x,y)\to(a,b)} u(x, y)$, если
(1) $u(x, y) = \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2},\ a = 0,\ b = 0$, **(2)** $u(x, y) = x^2y^2\ln(x^2 + y^2),\ a = 0,\ b = 0$,
(3) $u(x, y) = y\ln(x^2 + y^2),\ a = 0,\ b = 0$,

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

5. Найдите предел по совокупности переменных $\lim_{(x,y)\to(a,b)} u(x, y)$, если
(1) $u(x, y) = x\ln y,\ a = 0,\ b = 1$, **(2)** $u(x, y) = xy\ln(xy),\ a = 1,\ b = 1$,
(3) $u(x, y) = \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2},\ a = 0,\ b = 0$, **(4)** $u(x, y) = \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2},\ a = 0,\ b = 0$,
(5) $u(x, y) = (x^2 + y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2},\ a = 0,\ b = 0$,

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

6. Найдите предел по совокупности переменных $\lim_{(x,y)\to(a,b)} u(x, y)$, если
(1) $u(x, y) = x\ln(xy),\ a = 1,\ b = 1$, **(2)** $u(x, y) = (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2),\ a = 0,\ b = 0$,
(3) $u(x, y) = \frac{x^2+y^2}{\ln(x^2+y^2)},\ a = 0,\ b = 0$, **(4)** $u(x, y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2},\ a = 0,\ b = 0$,
(5) $u(x, y) = x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x},\ u(x, 0) = 0,\ u(0, y) = 0,\ a = 0,\ b = 0$.

С Сложные задачи для разбора на семинаре.

7. Докажите, что предел по совокупности переменных $\lim_{(x,y)\to(a,b)} u(x, y)$, не существует, если
(1) $u(x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\ a = 0,\ b = 0$, **(2)** $u(x, y) = \frac{x^4-y^2}{x^4+y^2},\ a = 0,\ b = 0$,

Д Сложные задачи для самостоятельного решения.

8. Докажите, что предел по совокупности переменных $\lim_{(x,y)\to(a,b)} u(x, y)$, не существует, если
(1) $u(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2},\ a = 0,\ b = 0$, **(2)** $u(x, y) = \frac{2x^2y}{x^4+y^2},\ a = 0,\ b = 0$,

2.3.2. Предел по кривой

С Простые задачи для разбора на семинаре.

1. Найдите $\lim_{(x,y)\to(0;0)} u(x,y)$, если точка (x,y) приближается к точке $(0;0)$ по кривой $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\to+0$, **(1)** $u(x,y)=xy$, **(a)** $x(t)=t,\ y(t)=t$, **(b)** $x(t)=t,\ y(t)=t^2$,
(c) $x=t\cos t,\ y(t)=t\sin t$,

Д Простые задачи для самостоятельного решения.

2. Найдите $\lim_{(x,y)\to(0;0)} u(x,y)$, если точка (x,y) приближается к точке $(0;0)$ по кривой $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\to+0$, **(1)** $u(x,y)=x^2+y^2$, **(a)** $x(t)=t,\ x(t)=t$, **(b)** $x(t)=t,\ y(t)=t^2$,
(c) $x=t\cos t,\ y(t)=t\sin t$,

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

3. Найдите $\lim_{(x,y)\to(0;0)} u(x,y)$, если точка (x,y) приближается к точке $(0;0)$ по кривой $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\to+0$, **(1)** $u(x,y)=(x+2)^{y+3}$, **(a)** $x(t)=t,\ y(t)=t$, **(b)** $x(t)=t,\ y(t)=t^2$,
(c) $x=t\cos t,\ y(t)=t\sin t$,

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

4. Найдите $\lim_{(x,y)\to(0;0)} u(x,y)$, если точка (x,y) приближается к точке $(0;0)$ по кривой $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\to+0$, **(1)** $u(x,y)=\log_{x+2}(y+8)$, **(a)** $x(t)=t,\ x(t)=t$, **(b)** $x(t)=t,\ y(t)=t^2$,
(c) $x=t\cos t,\ y(t)=t\sin t$,

С Сложные задачи для разбора на семинаре.

5. Найдите $\lim_{(x;y)\to(0;0)} u(x,y)$, если точка $(x;y)$ приближается к точке $(0;0)$ по кривой $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\to 0$, **(1)** $u(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$, **(a)** $\varphi(t)=t,\ \psi(t)=t$, **(b)** $\varphi(t)=t,\ \psi(t)=-t$,
(c) $\varphi(t)=t,\ \psi(t)=2t$, **(2)** $u(x,y)=\frac{2x^3y}{x^6+y^2}$, **(a)** $\varphi(t)=t,\ \psi(t)=t$, **(b)** $\varphi(t)=t,\ \psi(t)=t^2$,
(c) $\varphi(t)=t,\ \psi(t)=t^3$, **(d)** $\varphi(t)=t,\ \psi(t)=t^4$, **(3)** $u(x,y)=\frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}$, **(a)** $\varphi(t)=2t,\ \psi(t)=t$,
(b) $\varphi(t)=-2t,\ \psi(t)=t$, **(c)** $\varphi(t)=t,\ \psi(t)=2t$, **(4)** $u(x,y)=\frac{2x^2y}{x^4+y^2}$, **(a)** $\varphi(t)=t,\ \psi(t)=t$,
(b) $\varphi(t)=t,\ \psi(t)=t^2$, **(c)** $\varphi(t)=t,\ \psi(t)=-t^2$,

Д Сложные задачи для самостоятельного решения.

6. Найдите $\lim_{(x;y)\to(0;0)} u(x,y)$, если точка $(x;y)$ приближается к точке $(0;0)$ по кривой $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\to 0$, **(1)** $u(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, **(a)** $\varphi(t)=2t,\ \psi(t)=t$, **(b)** $\varphi(t)=-2t,\ \psi(t)=t$,
(c) $\varphi(t)=t,\ \psi(t)=2t$, **(2)** $u(x,y)=\frac{2xy^2}{x^2+y^4}$, **(a)** $\varphi(t)=t,\ \psi(t)=t$, **(b)** $\varphi(t)=t^2,\ \psi(t)=t$,
(c) $\varphi(t)=-t^2,\ \psi(t)=t$, **(3)** $u(x,y)=\frac{\sin(2xy)}{x^2+y^2}$, **(a)** $\varphi(t)=t,\ \psi(t)=t$, **(b)** $\varphi(t)=-t,\ \psi(t)=t$,
(c) $\varphi(t)=t,\ \psi(t)=2t$, **(4)** $u(x,y)=\frac{2x^3y}{x^6+y^2}$, **(a)** $\varphi(t)=t,\ \psi(t)=t$, **(b)** $\varphi(t)=t,\ \psi(t)=t^2$,
(c) $\varphi(t)=t,\ \psi(t)=t^3$,

Примеры экзаменационных задач.

7. Докажите, что предел по совокупности переменных $\lim_{(x,y)\to(a,b)} u(x,y)$, не существует, если
(1) $u(x,y)=\frac{2xy^2}{x^2+y^4}$, $a=0,\ b=0$, **(2)** $u(x,y)=\frac{x^2}{x^2+y^2}$, $a=0,\ b=0$,
(3) $u(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$, $a=0,\ b=0$, **(4)** $u(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$, $a=0,\ b=0$,
(5) $u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$, $a=0,\ b=0$, **(6)** $u(x,y)=\frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$, $a=0,\ b=0$,
(7) $u(x,y)=\frac{e^{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$, $a=0,\ b=0$, **(8)** $u(x,y)=\frac{\sin(xy)}{x^2+xy+y^2}$, $a=0,\ b=0$,
(9) $u(x,y)=\frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$, $a=0,\ b=0$, **(10)** $u(x,y)=\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$, $a=0,\ b=0$,
(11) $u(x,y)=\sin\frac{1}{x^2+y^2}$, $a=0,\ b=0$, **(12)** $u(x,y)=\sin\frac{1}{y}+\sin\frac{1}{x}$, $a=0,\ b=0$,

2.3.3. Предел в бесконечно удаленной точке

С Простые задачи для разбора на семинаре.

1. Найдите предел в бесконечно удаленной точке, **(1)** $u(x,y)=\frac{1}{x^4+y^4}$, **(2)** $u(x,y)=\frac{x^2}{x^4+y^4}$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Простые задачи для самостоятельного решения.**

2. Найдите предел в бесконечно удаленной точке, **(1)** $u(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$, **(2)** $u(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

3. Найдите предел в бесконечно удаленной точке или докажите, что предел не существует, **(1)** $u(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, **(2)** $u(x,y)=\frac{x^4}{x^4+y^4}$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

4. Найдите предел в бесконечно удаленной точке или докажите, что предел не существует, **(1)** $u(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$, **(2)** $u(x,y)=\frac{x^4-y^4}{\sqrt{x^4+y^4}}$,

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

5. Найдите предел в бесконечно удаленной точке или докажите, что предел не существует, $\boxed{\text{С}}$ **(1)** $u(x,y)=xe^{-x}+ye^{-y}$, **(2)** $u(x,y)=\frac{xy}{e^x+e^y}$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

6. Найдите предел в бесконечно удаленной точке или докажите, что предел не существует, **(1)** $u(x,y)=e^{-x}+e^{-y}$, **(2)** $u(x,y)=\frac{x+y}{e^x+e^y}$,

Примеры экзаменационных задач.

7. Найдите предел в бесконечно удаленной точке или докажите, что предел не существует, **(1)** $u(x,y)=ye^{-x}+xe^{-y}$, **(2)** $u(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^4+y^4}$, **(3)** $u(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$, **(4)** $u(x,y)=\frac{xy}{x^2+xy+y^2}$, **(5)** $u(x,y)=xye^{-x^2-y^2}$, **(6)** $u(x,y)=e^{-x^2}$, **(7)** $u(x,y)=ye^{-x^2}$, **(8)** $u(x,y)=\frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$, **(9)** $u(x,y)=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$, **(10)** $u(x,y)=(x^2+y^2)\operatorname{tg}\frac{1}{x^2+y^2}$, **(11)** $u(x,y)=(x^2+y^2)\arcsin\frac{1}{x^2+y^2}$, **(12)** $u(x,y)=(x^2+y^2)\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2+y^2}$,

2009-2010 Курс 1, семестр 2, семинар 03(m3-03)
Тема: Дифференцирование функции нескольких переменных

2.4. Частные производные, градиент, дифференциал

2.4.1. Частные производные функции двух переемнных

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. Найдите частные производные первого порядка, градиент. Найдите первый дифференциал. Напишите уравнение нормали и уравнение касательной плоскости к поверхности $z = u(x, y)$ в точке M_0 с координатами $(x_0; y_0)$. Найдите производную по направлению вектора $\vec{L}$ в точке M_0. **(1)** $u = 2x + 3y$, $M_0 = (1;\ 1)$, $\vec{L}_1 = (3; -2)$, $\vec{L}_2 = (2; 3)$. **(2)** $u = xy$, $M_0 = (1; 1)$, $\vec{L}_1 = (1;\ 1)$, $\vec{L}_2 = (1;\ -1)$, **(3)** $u = x^3 + y^3 - 3xy$, $M_0 = (1; 1)$, $\vec{L} = (1;\ 2)$. **(4)** $u = xy^2(4 - x - 2y)$, $M_0 = (1; 1)$, $\vec{L} = (1; 1)$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Простые задачи для самостоятельного решения.**

2. Найдите частные производные первого порядка, градиент. Найдите первый дифференциал. Напишите уравнение нормали и уравнение касательной плоскости к поверхности $z = u(x, y)$ в точке M_0 с координатами $(x_0; y_0)$. Найдите производную по направлению вектора $\vec{L}$ в точке M_0. **(1)** $u = 3x - 2y$, $M_0 = (1;\ 1)$, $\vec{L}_1 = (3; -2)$, $\vec{L}_2 = (2; 3)$. $\vec{L}_3 = (-3; 2)$, **(2)** $u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $M_0 = (2; 3)$, $\vec{L}_1 = (3; -2)$, $\vec{L}_2 = (2; 3)$. **(3)** $u = xy(3 - x - y)$, $M_1 = (1; 1)$, $\vec{L} = (1; 1)$; $M_2 = (0; 0)$, $\vec{L} = (1; 1)$. **(4)** $u = x^2 + 2y^2 - 2x^4 - y^4$, $M_0 = (1; 0{,}5)$, $\vec{L} = (1; -1)$. **(5)** $u = \frac{2xy}{x^2+y^2}$, $M_0 = (1; 1)$, $\vec{L}_1 = (1; 1)$, $\vec{L}_2 = (1; -1)$.

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

3. Найдите частные производные первого порядка, градиент. Найдите первый дифференциал. Напишите уравнение нормали и уравнение касательной плоскости к поверхности $z = u(x, y)$ в точке M_0 с координатами $(x_0; y_0)$. Найдите производную по направлению вектора $\vec{L}$ в точке M_0. **(1)** $u = x^y$, $M_0 = (1; 1)$, $\vec{L} = (2; 3)$;

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

4. Найдите частные производные первого порядка, градиент. Найдите первый дифференциал. Напишите уравнение нормали и уравнение касательной плоскости к поверхности $z = u(x, y)$ в точке M_0 с координатами $(x_0; y_0)$. Найдите производную по направлению вектора $\vec{L}$ в точке M_0. **(1)** $u = \log_x y$, $M_0 = (2; 2)$, $\vec{L} = (2; 3)$;

2.4.2. Частные производные функции трех переменных

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. Найдите частные производные первого порядка, градиент. Найдите первый дифференциал. Найдите производную по направлению вектора $\vec{L}$ в точке с заданными координатами (x_0, y_0, z_0).
(1) $u = 2x + 3y + 4x,\ M_0 = (1; 1; 1)$, $\vec{L}_1 = (2; 3; 4)$, $\vec{L}_2 = (1; 6; -5)$.
(2) $u = x^2 + y^2 + z^2,\ M_0 = (1; 2; 3)$, $\vec{L}_1 = (1; 2; 3)$, $\vec{L}_2 = (1; -2; 1)$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Простые задачи для самостоятельного решения.**

2. Найдите частные производные первого порядка, градиент. Найдите первый дифференциал. Найдите производную по направлению вектора $\vec{L}$ в точке с заданными координатами (x_0, y_0, z_0).
(1) $u = x^2 + y^2 + z^2,\ M_0 = (2; 3; 4)$, $\vec{L}_1 = (2; 3; 4)$, $\vec{L}_2 = (1; 6; -5)$.

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

3. Найдите частные производные первого порядка, градиент. Найдите первый дифференциал. Найдите производную по направлению вектора $\vec{L}$ в точке с заданными координатами (x_0, y_0, z_0).
(1) $u = xy^2z^3(7 - x - 2y - 3z), M_0 = (1; 1; 1)$, $\vec{L} = (1; 1; 1)$.
(2) $u = x^3 + x + y + xyz,\ M_0 = (1; 1; -1)$, $\vec{L} = (1; 1; 1)$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

4. Найдите частные производные первого порядка, градиент. Найдите первый дифференциал. Найдите производную по направлению вектора $\vec{L}$ в точке с заданными координатами (x_0, y_0, z_0). **(1)** $u = x^2y^3z^4(10-2x-3y-4z), M_0 = (1;1;1), \vec{L} = (1;1;1)$.

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

5. Найдите дифференциал первого порядка функции **(1)** $p^{\ln(x^2+y^2)\cdot\arcsin\frac{y}{x}}$, **(2)** $(\sin x)^q$, **(3)** $(\sin x)^{\ln(x^2+y^2)\cdot\arcsin\frac{y}{x}}$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

6. Найдите дифференциал первого порядка функции **(1)** $p^{\ln(x^2+y^2)\cdot\arcsin\frac{y}{x}}$, **(2)** $(\sin x)^q$, **(3)** $(\sin x)^{\ln(x^2+y^2)\cdot\arcsin\frac{y}{x}}$,

2.4.3. Дифференцирование сложной функции

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x)$, если $f(t)$ – дифференцируемая функция, **(1)** $u(x) = f(2x+1)$, **(2)** $u(x) = f(x^2)$, **(3)** $u(x) = e^{f(x)}$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Простые задачи для самостоятельного решения.**

2. Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x)$, если $f(t)$ – дифференцируемая функция, **(1)** $u(x) = f(3x-2)$, **(2)** $u(x) = f(e^x)$, **(3)** $u(x) = \ln f(x)$,

Примеры экзаменационных задач.

3. Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x)$, если $f(t)$ – дифференцируемая функция, **(1)** $u(x) = f(\ln x)$, **(2)** $u(x) = f(f(x))$, **(3)** $u(x) = \sqrt{f(x)}$,

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

4. Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x)$, если $f(t,s)$ – дифференцируемая функция, **(1)** $u(x) = f(x, 2x)$, **(2)** $u(x) = \ln f(x, 2x)$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

5. Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x)$, если $f(t,s)$ – дифференцируемая функция, **(1)** $u(x) = f(x^2, x^3)$, **(2)** $u(x) = e^{f(2x,x)}$,

Примеры экзаменационных задач.

6. Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x)$, если $f(t,s)$ – дифференцируемая функция, **(1)** $u(x) = f(3x-2, e^x)$, **(2)** $u(x) = \sin\big(f(3x-2, e^x)\big)$, **(3)** $u(x) = f(\sqrt{x}, x)$,

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

7. Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x,y)$, если $f(t)$ – дифференцируемая функция, **(1)** $u(x,y) = f(x) + f(y)$, **(2)** $u(x,y) = f(x+y)$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Простые задачи для самостоятельного решения.**

8. Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x,y)$, если $f(t)$ – дифференцируемая функция, **(1)** $u(x,y) = f(x) - f(y)$, **(2)** $u(x,y) = f(x-y)$,

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

9. Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x,y)$, если $f(t)$ – дифференцируемая функция, **(1)** $u(x,y) = \frac{f(x)}{f(y)}$, **(2)** $u(x,y) = f(xy)$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

10. Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x,y)$, если $f(t)$ – дифференцируемая функция, **(1)** $u(x,y) = f(x)f(y)$, **(2)** $u(x,y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$,

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

11. Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x,y)$, если $f(t)$ – дифференцируемая функция, **(1)** $u(x,y) = \log_{f(x)} f(y)$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

12. Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x, y)$, если $f(t)$ – дифференцируемая функция, **(1)** $u(x, y) = f(x)^{f(y)}$,

Примеры экзаменационных задач.

13. Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x, y, z)$, если $f(t)$ – дифференцируемая функция, **(1)** $u(x, y, z) = f(x) + f(y) + f(z)$, **(2)** $u(x, y, z) = f(x + y - z)$,

14. Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x, y)$, если $f(t)$ – дифференцируемая функция, **(1)** $u(x, y) = f(x^2 + y^2)$, **(2)** $u(x, y) = f(xy)$, **(3)** $u(x, y) = f(x/y)$,

15. Найдите дифференциал первого порядка функции $F(x, y)$, если **(1)** $F(x, y) = f(x) + f(y)$, **(2)** $F(x, y) = f(x + y)$, **(3)** $F(x, y) = f(x)^{f(y)}$, **(4)** $F(x, y) = f(xy)$, **(5)** $F(x, y) = f(x)f(y)$, где $f(t)$ – дифференцируемая функция.

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

16. Найдите дифференциал первого порядка сложной функции $u(...)$, если f, g, h – дифференцируемые функции, **(1)** $u(x, y) = f(x) + g(y)$, **(2)** $u(x, y, z) = f(x, y) + f(y, z) + f(z, x)$, **(3)** $u(x, y, z) = f(x)g(y)h(z)$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Простые задачи для самостоятельного решения.**

17. Найдите дифференциал первого порядка сложной функции $u(...)$, если f, g, h – дифференцируемые функции, **(1)** $u(x, y) = f(x)g(y)$, **(2)** $u(x, y, z) = f(x) + g(y) + h(z)$,

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

18. Найдите дифференциал первого порядка сложной функции $u(...)$, если f, g, h – дифференцируемые функции, **(1)** $u(x, y) = f(xy) + g(x/y)$, **(2)** $u(x, y) = f(x, y) \cdot g(x, y)$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

19. Найдите дифференциал первого порядка сложной функции $u(...)$, если f, g, h – дифференцируемые функции, **(1)** $u(x, y) = f(x - y) + g(x + y)$, **(2)** $u(x, y) = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$.

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

20. Найдите дифференциал первого порядка сложной функции $u(...)$, если f, g, h – дифференцируемые функции, **(1)** $u(x, y) = \log_{f(x,y)} g(x, y)$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

21. Найдите дифференциал первого порядка сложной функции $u(...)$, если f, g, h – дифференцируемые функции, **(1)** $u(x, y) = f(x, y)^{g(x,y)}$,

Примеры экзаменационных задач.

22. Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x, y)$, если $f(t, s)$ – дифференцируемая функция, **(1)** $u(x, y) = f(2x, 3y)$, **(2)** $u(x, y) = f(x, y) \cdot f(y, x)$, **(3)** $u(x, y) = f(x + y, x - y)$, **(4)** $u(x, y) = f(x + y, x - y) \cdot f(x - y, x + y)$, **(5)** $u(x, y) = f(x, y) + f(y, x)$, **(6)** $u(x, y) = f(x, y) - f(y, x)$, **(7)** $u(x, y) = f(f(x, y), f(y, x))$, **(8)** $u(x, y) = f(x, y)^{f(x,y)}$, **(9)** $u(x, y) = \log_{f(x,y)} f(x, y)$, **(10)** $u(x, y) = f(x, y)^{f(y,x)}$,

2.4.4. Дифференцируемые и недифференцируемые функции нескольких переменных

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. Пусть $u(x, y) = 3x + 4y + 12xy + x^2 + 2y^2$. **(1)** Является ли $u(x, y)$ непрерывной в точке (0; 0)? **(2)** Существуют ли u_x, u_y в точке (0; 0)? Если имеет, найдите их. **(3)** Верно ли, что $u(x, y)$ имеет производную по любому направлению в точке (0; 0)? Если имеет, найдите производную по направлению $\vec{l} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$. **(4)** Верно ли, что производная по направлению $\vec{l}$ в точке (0; 0) равна $\left(\operatorname{grad} u, \vec{l}\right)$? **(5)** Верно ли, что $u(x, y) - x\frac{\partial u}{\partial x}(0; 0) - y\frac{\partial u}{\partial y}(0; 0) = o(\rho)$, где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$? **(6)** Является ли $u(x, y)$ дифференцируемой в точке (0; 0)?

2. Пусть $u(x,y,z) = x+y+z+xy+xz+yz$. **(1)** Имеет ли данная функция частные производные первого порядка в точке (0; 0; 0)? Если имеет, найдите их. **(2)** Верно ли, что данная функция имеет производную по любому направлению в точке (0; 0; 0)? Если имеет, найдите производную по направлению $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. **(3)** Верно ли, что производная по направлению $\vec{l}$ в точке (0; 0; 0) равна $\left(\operatorname{grad} u, \vec{l}\right)$? **(4)** Верно ли, что $u(x+dx, y+dy, z+dz) - \frac{\partial u}{\partial x}dx - \frac{\partial u}{\partial y}dy - \frac{\partial u}{\partial z}dz = o(\rho)$ в точке (0; 0; 0), где $\rho = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$? **(5)** Является ли указанная функция дифференцируемой в указанной точке?

$\boxed{\text{Д}}$ **Простые задачи для самостоятельного решения.**

3. Пусть $u(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. **(1)** Является ли $u(x,y)$ непрерывной в точке (0; 0)? **(2)** Существуют ли u_x, u_y в точке (0; 0)? Если имеет, найдите их. **(3)** Верно ли, что $u(x,y)$ имеет производную по любому направлению в точке (0; 0)? Если имеет, найдите производную по направлению $\vec{l} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$. **(4)** Верно ли, что производная по направлению $\vec{l}$ в точке (0; 0) равна $\left(\operatorname{grad} u,\, \vec{l}\right)$? **(5)** Верно ли, что $u(x,y) - x\frac{\partial u}{\partial x}(0;0) - y\frac{\partial u}{\partial y}(0;0) = o(\rho)$, где $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$? **(6)** Является ли $u(x,y)$ дифференцируемой в точке $(0;0)$?

4. Пусть $u(x,y,z) = xyz(4-x-y-z)$. **(1)** Имеет ли данная функция частные производные первого порядка в точке (1; 1; 1)? Если имеет, найдите их. **(2)** Верно ли, что данная функция имеет производную по любому направлению в точке (1; 1; 1)? Если имеет, найдите производную по направлению $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. **(3)** Верно ли, что производная по направлению $\vec{l}$ в точке (1; 1; 1) равна $\left(\operatorname{grad} u, \vec{l}\right)$? **(4)** Верно ли, что $u(x+dx, y+dy, z+dz) - \frac{\partial u}{\partial x}dx - \frac{\partial u}{\partial y}dy - \frac{\partial u}{\partial z}dz = o(\rho)$ в точке (1; 1; 1), где $\rho = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$? **(5)** Является ли указанная функция дифференцируемой в указанной точке?

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

5. Пусть $u(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$. **(1)** Является ли $u(x,y)$ непрерывной в точке (0; 0)? **(2)** Существуют ли u_x, u_y в точке (0; 0)? Если имеет, найдите их. **(3)** Верно ли, что $u(x,y)$ имеет производную по любому направлению в точке (0; 0)? Если имеет, найдите производную по направлению $\vec{l} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$. **(4)** Верно ли, что производная по направлению $\vec{l}$ в точке (0; 0) равна $\left(\operatorname{grad} u,\, \vec{l}\right)$? **(5)** Верно ли, что $u(x,y) - x\frac{\partial u}{\partial x}(0;0) - y\frac{\partial u}{\partial y}(0;0) = o(\rho)$, где $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$? **(6)** Является ли $u(x,y)$ дифференцируемой в точке $(0;0)$?

6. Пусть $u(x,y,z) = \sqrt[3]{xyz}$. **(1)** Имеет ли данная функция частные производные первого порядка в точке (0; 0; 0)? Если имеет, найдите их. **(2)** Верно ли, что данная функция имеет производную по любому направлению в точке (0; 0; 0)? Если имеет, найдите производную по направлению $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. **(3)** Верно ли, что производная по направлению $\vec{l}$ в точке (0; 0; 0) равна $\left(\operatorname{grad} u, \vec{l}\right)$? **(4)** Верно ли, что $u(x+dx, y+dy, z+dz) - \frac{\partial u}{\partial x}dx - \frac{\partial u}{\partial y}dy - \frac{\partial u}{\partial z}dz = o(\rho)$ в точке (0; 0; 0), где $\rho = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$? **(5)** Является ли указанная функция дифференцируемой в указанной точке?

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

7. Пусть $u(x,y) = \sqrt[3]{x^2y}$. **(1)** Является ли $u(x,y)$ непрерывной в точке (0; 0)? **(2)** Существуют ли u_x, u_y в точке (0; 0)? Если имеет, найдите их. **(3)** Верно ли, что $u(x,y)$ имеет производную по любому направлению в точке (0; 0)? Если имеет, найдите производную по направлению $\vec{l} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$. **(4)** Верно ли, что производная по направлению $\vec{l}$ в точке (0; 0) равна $\left(\operatorname{grad} u,\, \vec{l}\right)$? **(5)** Верно ли, что $u(x,y) - x\frac{\partial u}{\partial x}(0;0) - y\frac{\partial u}{\partial y}(0;0) = o(\rho)$, где $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$? **(6)** Является ли $u(x,y)$ дифференцируемой в точке $(0;0)$?

8. Пусть $u(x,y,z) = \sqrt[3]{x^3+y^3+z^3}$. **(1)** Имеет ли данная функция частные производные первого порядка в точке (0; 0; 0)? Если имеет, найдите их. **(2)** Верно ли, что данная функция имеет производную по любому направлению в точке (0; 0; 0)? Если имеет, найдите производную по направлению $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. **(3)** Верно ли, что производная по направлению $\vec{l}$ в точке (0; 0; 0) равна $\left(\operatorname{grad} u, \vec{l}\right)$? **(4)** Верно ли, что $u(x + dx, y + dy, z + dz) - \frac{\partial u}{\partial x}dx - \frac{\partial u}{\partial y}dy - \frac{\partial u}{\partial z}dz = o(\rho)$ в точке (0; 0; 0), где $\rho = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$? **(5)** Является ли указанная функция дифференцируемой в указанной точке?

2.4.5. Приложения первого дифференциала

С Простые задачи для разбора на семинаре.

1. Руководитель дома моды может нанять x менеджеров и y портных, при этом его прибыль пропорциональна величине x^2y^3 (x, y выражены в сотнях человек). Однако, общая площадь помещения ограничена и при большом количестве работников они мешают друг другу. Поэтому его прибыль пропорциональна также величине $6 - x - y$, т.е. в конечном счете прибыль равна $x^2y^3\big(6 - x - y\big)$. В данный момент в доме моды работают 100 менеджеров и 100 портных, т.е. $x = y = 1$. Можно нанять еще Δx менеджеров и Δy портных, причем по финансовым соображениям $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = r^2$, где r – некоторое небольшое число. Какие значения должно иметь отношение $\Delta x : \Delta y$ чтобы прирост прибыли был максимален?

Д Простые задачи для самостоятельного решения.

2. Руководитель дома моды может нанять x менеджеров и y портных, при этом его прибыль пропорциональна величине x^3y^4 (x, y выражены в сотнях человек). Однако, общая площадь помещения ограничена и при большом количестве работников они мешают друг другу. Поэтому его прибыль пропорциональна также величине $8 - x - y$, т.е. в конечном счете прибыль равна $x^3y^4\big(8 - x - y\big)$. В данный момент в доме моды работают 100 менеджеров и 100 портных, т.е. $x = y = 1$. Можно нанять еще Δx менеджеров и Δy портных, причем по финансовым соображениям $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = r^2$, где r – некоторое небольшое число. Какие значения должно иметь отношение $\Delta x : \Delta y$ чтобы прирост прибыли был максимален?

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

3. Руководитель дома моды может нанять x менеджеров, y дизайнеров и z портных, при этом его прибыль пропорциональна величине xyz, если x, y, z выражены в сотнях человек. Однако, общая площадь помещения ограничена и при большом количестве работников они мешают друг другу. Поэтому его прибыль пропорциональна также величине $4 - x - y - z$, т.е. в конечном счете прибыль равна $xyz\big(4 - x - y - z\big)$. В данный момент в доме моды работают 40 менеджеров, 50 дизайнеров и 60 портных, т.е. $x = 0{,}4$, $y = 0{,}5$, $z = 0{,}6$. Можно нанять еще Δx менеджеров, Δy дизайнеров и Δz портных, причем по финансовым соображениям $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = r^2$, где r – некоторое небольшое число. Какие значения должно иметь отношение $\Delta x : \Delta y : \Delta z$, чтобы прирост прибыли был максимален?

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

4. Руководитель дома моды может нанять x менеджеров, y дизайнеров и z портных, при этом его прибыль пропорциональна величине $x^5y^3z^2$, если x, y, z выражены в сотнях человек. Однако, общая площадь помещения ограничена и при большом количестве работников они мешают друг другу. Поэтому его прибыль пропорциональна также величине $11 - 5x - 3y - 2z$, т.е. в конечном счете прибыль равна $x^5y^3z^2\big(11 - 5x - 3y - 2z\big)$. В данный момент в доме моды работают 30 менеджеров, 30 дизайнеров и 30 портных, т.е. $x = y = z = 0{,}3$. Можно нанять еще Δx менеджеров, Δy дизайнеров и Δz портных, причем по финансовым соображениям $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = r^2$, где r – некоторое небольшое число. Какие значения должно иметь отношение $\Delta x : \Delta y : \Delta z$, чтобы прирост прибыли был максимален?

2009-2010 Курс 1, семестр 2, семинар 04(m3-04)
Тема: Формула Тейлора для функции нескольких переменных

2.5. Формула Тейлора

2.5.1. Формула Тейлора первого порядка

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. Пусть $u(x, y)$ – дифференцируемая функция, $P_1(x, y|dx, dy) \stackrel{\text{def}}{=\!=} u(x, y) + du$ – многочлен Тейлора первого порядка с центром в точке (x, y),
$R_2(x, y|dx, dy) \stackrel{\text{def}}{=\!=} u(x + dx, y + dy) - P_1(x, y|dx, dy)$ – остаток второго порядка. Найдите все эти величины для **(1)** $u = 3x + 4y$, $(x, y) = (0; 0)$, **(2)** $u = x^2 + y^2$, $(x, y) = (0;\ 0)$,
(3) $u = \ln(1 + x + y)$, $(x, y) = (0;\ 0)$, **(4)** $u = \ln(1 + xy)$, $(x, y) = (0;\ 0)$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Простые задачи для самостоятельного решения.**

2. Пусть $u(x, y)$ – дифференцируемая функция, $P_1(x, y|dx, dy) \stackrel{\text{def}}{=\!=} u(x, y) + du$ – многочлен Тейлора первого порядка с центром в точке (x, y),
$R_2(x, y|dx, dy) \stackrel{\text{def}}{=\!=} u(x + dx, y + dy) - P_1(x, y|dx, dy)$ – остаток второго порядка. Найдите все эти величины для **(1)** $u = 7x - 5y$, $(x, y) = (0; 0)$, **(2)** $u = xy$, $(x, y) = (0;\ 0)$,
(3) $u = \operatorname{arctg}(2x + 3y)$, $(x, y) = (0;\ 0)$, **(4)** $u = \ln(1 + x^2 + y^2)$, $(x, y) = (0;\ 0)$,

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

3. Пусть $u(x, y)$ – дифференцируемая функция, $P_1(x, y|dx, dy) \stackrel{\text{def}}{=\!=} u(x, y) + du$ – многочлен Тейлора первого порядка с центром в точке (x, y),
$R_2(x, y|dx, dy) \stackrel{\text{def}}{=\!=} u(x + dx, y + dy) - P_1(x, y|dx, dy)$ – остаток второго порядка. Найдите все эти величины для **(1)** $u = 3x + 4y$, $(x, y) = (3;\ 4)$, $(dx, dy) = (3;\ 4)$,
(2) $u = 3x + 4y$, $(x, y) = (3;\ 4)$, $(dx, dy) = (-4;\ 3)$,
(3) $u = x^2 + y^2$, $(x, y) = (3;\ 4)$, $(dx, dy) = (3;\ 4)$, **(4)** $u = x^2 + y^2$, $(x, y) = (3;\ 4)$, $(dx, dy) = (-4;\ 3)$,
(5) $u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $(x, y) = (1;\ 1)$, $(dx, dy) = (1;\ 1)$,
(6) $u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $(x, y) = (1;\ 1)$, $(dx, dy) = (-1;\ 1)$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

4. Пусть $u(x, y)$ – дифференцируемая функция, $P_1(x, y|dx, dy) \stackrel{\text{def}}{=\!=} u(x, y) + du$ – многочлен Тейлора первого порядка с центром в точке (x, y),
$R_2(x, y|dx, dy) \stackrel{\text{def}}{=\!=} u(x + dx, y + dy) - P_1(x, y|dx, dy)$ – остаток второго порядка. Найдите все эти величины для **(1)** $u = xy$, $(x, y) = (3;\ 4)$, $(dx, dy) = (4;\ 3)$,
(2) $u = xy$, $(x, y) = (3;\ 4)$, $(dx, dy) = (-3;\ 4)$,
(3) $u = \ln(x^2 + y^2)$, $(x, y) = (4;\ 3)$, $(dx, dy) = (0{,}4;\ 0{,}3)$,
(4) $u = \ln(x^2 + y^2)$, $(x, y) = (4;\ 3)$, $(dx, dy) = (-0{,}3;\ 0{,}4)$,
(5) $u = x^3 + y^3 - 3xy$, $(x, y) = (1;\ 1)$, $(dx, dy) = (1;\ 1)$,
(6) $u = x^3 + y^3 - 3xy$, $(x, y) = (0;\ 0)$, $(dx, dy) = (1;\ 1)$,

Примеры экзаменационных задач.

5. Найдите дифференциал первого порядка функции **(1)** $p^{\cos(x^2+y^2)\cdot\ln\frac{2xy}{x^2+y^2}}$, **(2)** $(\operatorname{arctg} x)^q$,
(3) $(\operatorname{arctg} x)^{\cos(x^2+y^2)\cdot\ln\frac{2xy}{x^2+y^2}}$,

2.5.2. Формула Тейлора второго порядка

1. Найдите первый и второй дифференциалы. Запишите формулу Тейлора с центром в указанной точке для $n = 2$ с остаточным членом в форме Пеано,
$\boxed{\text{С}}$ **(1)** $u = 2x + 3y$, $M_0 = (1; 1)$, **(2)** $u = x^2 + y^2$, $M_0 = (0; 0)$, **(3)** $u = x^3 + y^3 - 3xy$, $M_0 = (1; 1)$,
$\boxed{\text{Д}}$ **(4)** $u = xy$, $M_0 = (0; 0)$, **(5)** $u = xy(3 - x - y)$, $M_0 = (1; 1)$,

$\boxed{\text{Э}}$ **(6)** $u = x^2 + 2xy + y^2,\ M_0 = (0;0)$, **(7)** $u = x^2 + 3xy + y^2,\ M_0 = (0;0)$, **(8)** $u = xy,\ M_0 = (3;2)$,
(9) $u = x^2 + 3xy + y^2,\ M_0 = (2;3)$, **(10)** $u = x^3 + y^3 - 3xy,\ M_0 = (0;0)$,
(11) $u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x},\ M_0 = (1;1)$, **(12)** $u = x^y,\ M_0 = (1;1)$, **(13)** $u = x^y,\ M_0 = (4;\frac{1}{2})$,
(14) $u = xy(3 - x - y),\ M_0 = (0;0)$, **(15)** $u = xy(3 - x - y),\ M_0 = (0;1)$,
(16) $u = 2x^2 + y^2 - 2y^4 - x^4,\ M_0 = (0;0),\ M_1 = (1;0),\ M_2 = (1;\frac{1}{2})$,
$\boxed{\text{Т}}$ **(17)** $u = xy\ln(x^2 + y^2), M_0 = ((2e)^{-0,5};(2e)^{-0,5})$, **(18)** $u = (x^2 + y^2)^2 e^{-x^2 - y^2},\ M_0 = (1;1)$,

2. Найдите первый и второй дифференциалы в точке M с координатами (x, y, z) и в точке M_0 с заданными координатами (x_0, y_0, z_0). Запишите формулу Тейлора с центром в указанных точках для $n = 2$ с остаточным членом в форме Пеано.

$\boxed{\text{С}}$ **(1)** $u = x^3 + x + y + xyz,\ M_0 = (1;1;-1)$,
$\boxed{\text{Д}}$ **(2)** $u = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz,\ M_0 = (0;0;0)$,
$\boxed{\text{Э}}$ **(3)** $u = 2x + 3y + 4x,\ M_0 = (1;1;1)$, **(4)** $u = x^2 + y^2 + z^2,\ M_0 = (0;1;2)$,
(5) $u = x^2 + y^2 + z^2,\ M_0 = (1;1;1)$, **(6)** $u = xyz,\ M_0 = (0;0;0)$,
$\boxed{\text{Т}}$ **(7)** $u = xyz(4 - x - y - z),\ M_0 = (1;1;1)$, **(8)** $u = xy^2z^3(7 - x - 2y - 3z),\ M_0 = (1;1;1)$,

3. Найдите значение многочлена Тейлора $P_1(x_0, y_0|dx, dy) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0|dx, dy)$, многочлена Тейлора $P_2(x_0, y_0|dx, dy) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0|dx, dy) + \frac{1}{2}d^2f(x_0, y_0|dx, dy)$, оцените приближенно значение А $= f(x_1, y_1)$, $dx = x_1 - x_0$, $dy = y_1 - y_0$, используя первый дифференциал и используя второй дифференциал, если

$\boxed{\text{С}}$ **(1)** $f(x, y) = xy$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $A = f(1{,}1,\ 0{,}8)$,
$\boxed{\text{Д}}$ **(2)** $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $A = f(1{,}1,\ 0{,}9)$,
$\boxed{\text{Э}}$ **(3)** $f(x, y) = \frac{y}{x}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $A = f(1{,}1,\ 0{,}9)$, **(4)** $f(x, y) = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $A = f(1{,}1,\ 0{,}9)$, **(5)** $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $A = f(1{,}1,\ 0{,}9)$,
(6) $f(x, y) = xy(3 - x - y)$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $A = f(1{,}1,\ 0{,}9)$,
(7) $f(x, y) = x^2y(4 - 2x - y)$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $A = f(1{,}1,\ 0{,}9)$,
$\boxed{\text{Т}}$ **(8)** $f(x, y) = x^y$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $A = f(1{,}1,\ 0{,}9)$, **(9)** $f(x, y) = x^y$, $x_0 = 2$, $y_0 = 3$, $A = f(2{,}1,\ 2{,}9)$, **(10)** $f(x, y) = \log_x y$, $x_0 = 2$, $y_0 = 4$, $A = f(2{,}1,\ 3{,}9)$,
(11) $f(x, y) = \log_x y$, $x_0 = 2$, $y_0 = 4$, $A = f(2{,}1,\ 4{,}41)$,

2.6. Дифференцирование сложной функции

1. Найдите дифференциалы первого и второго порядка сложной функции $u(...)$, если f – дважды число раз дифференцируемая функция всех своих переменных,

$\boxed{\text{С}}$ **(1)** $u(x, y) = f(xy)$,
$\boxed{\text{Д}}$ **(2)** $u(x, y) = f(x + y)$,
$\boxed{\text{Э}}$ **(3)** $u(x, y) = \frac{f(x)}{f(y)}$, **(4)** $u(x, y) = f(x^2 + y^2)$, **(5)** $u(x, y) = f(x + y, x - y)$, **(6)** $u(x) = f(x, x)$,
(7) $u(x) = f(x, x^2, x^3)$, **(8)** $u(x, y) = f(x - y) + f(x + y)$. **(9)** $u(x, y) = f(x, y) - f(y, x)$.
(10) $u(x, y) = \frac{f(x,y)}{f(y,x)}$.

2. Найдите дифференциалы первого и второго порядка сложной функции $u(...)$, если f, g, h – нужное число раз дифференцируемые функции всех своих переменных,

$\boxed{\text{С}}$ **(1)** $u(x, y) = f(x)g(y)$,
$\boxed{\text{Д}}$ **(2)** $u(x, y) = f(x) + g(y)$,
$\boxed{\text{Э}}$ **(3)** $u(x, y, z) = f(x) + g(y) + h(z)$, **(4)** $u(x, y, z) = f(x)g(y)h(z)$,
(5) $u(x, y) = f(x - y) + g(x + y)$. **(6)** $u(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$. **(7)** $u(x, y) = f(x, y) + g(y, x)$.

2.6.1. Экономические приложения

На этом семинаре доказывать, что прибыль максимальна, не нужно.

С Простые задачи для разбора на семинаре.

1. Руководитель дома моды может нанять x дизайнеров и y портных, при этом его прибыль пропорциональна величине xy, если x, y выражены в сотнях человек. Однако, общая площадь помещения ограничена и при большом количестве работников они мешают друг другу. Поэтому его прибыль пропорциональна также величине $3 - x - y$, т.е. в конечном счете прибыль равна $xy(3 - x - y)$. **(1)** Докажите, что если прибыль максимальна, то $x = y = 1$. **(2)** Используя первый и второй дифференциалы, оцените прибыль при $x = 1{,}01$, $y = 0{,}99$. Сравните с точным значением. **(3)** В данный момент в доме моды работают 50 дизайнеров и 50 портных, т.е. $x = y = 0{,}5$. Можно нанять еще Δy дизайнеров и Δz портных, причем по финансовым соображениям $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = r^2$, где r – некоторое небольшое число. Какие значения должно иметь отношение $\Delta x : \Delta y$, чтобы прирост прибыли был максимален?

Д Простые задачи для самостоятельного решения.

2. Руководитель дома моды может нанять x дизайнеров и y портных, при этом его прибыль равна $x^2y(4 - 2x - y)$, если x, y выражены в сотнях человек. **(1)** Докажите, что максимальная прибыль получится при $x = y = 1$. **(2)** Используя первый и второй дифференциалы, оцените прибыль при $x = 1{,}1$, $y = 0{,}8$. Сравните с точным значением.

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

3. Руководитель дома моды может нанять x менеджеров, y дизайнеров и z портных, при этом его прибыль пропорциональна величине xyz, если x, y, z выражены в сотнях человек. Однако, общая площадь помещения ограничена и при большом количестве работников они мешают друг другу. Поэтому его прибыль пропорциональна также величине $4 - x - y - z$, т.е. в конечном счете прибыль равна $xyz(4 - x - y - z)$. **(1)** Докажите, что максимальная прибыль получится при $x = y = z = 1$. **(2)** Используя первый и второй дифференциалы, оцените прибыль при $x = 1{,}01$, $y = 0{,}99$, $z = 1{,}02$. Сравните с точным значением.

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

4. Если нанять x менеджеров, y дизайнеров и z портных, то прибыль будет равна $x^5y^3z^2$, если x, y, z выражены в сотнях человек. Однако при большом количестве работников они мешают друг другу, так что прибыль пропорциональна также величине $11 - 5x - 3y - 2z$, т.е. в конечном счете прибыль равна $x^5y^3z^2\big(11 - 5x - 3y - 2z\big)$. **(1)** Докажите, что максимальная прибыль получится при $x = y = z = 1$. **(2)** Оцените прибыль при $x = y = z = 1{,}02$. **(3)** В данный момент в доме моды работают 30 менеджеров, 30 дизайнеров и 30 портных, т.е. $x = y = z = 0{,}3$. Можно нанять еще Δx менеджеров, Δy дизайнеров и Δz портных, причем по финансовым соображениям $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = r^2$, где r – некоторое небольшое число. Какие значения должно иметь отношение $\Delta x : \Delta y : \Delta z$, чтобы прирост прибыли был максимален?

2009-2010 Курс 1, семестр 2, семинар 05(m3-05)

Тема: Локальный экстремум функции нескольких переменных

2.7. Локальный экстремум функции нескольких переменных

2.7.1. Необходимые и достаточные условия локального экстремума

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. Найдите все точки возможного экстремума, проверьте выполнение достаточных условий. **(1)** $f(x, y) = x^2 + y^2$, **(2)** $f(x, y) = -x^2 - 2xy - 4y^2$, **(3)** $f(x, y) = xy$,

2. Докажите, что в точке $M_0(x_0; y_0)$ выполнены необходимые условия локального экстремума первого порядка, т.е. первый дифференциал равен нулю, но указанная точка не является точкой локального экстремума. **(1)** $u(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, **(2)** $u(x, y) = x^2 - 2xy$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, **(3)** $u(x, y) = x^2y$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, **(4)** $u(x, y) = xy^3$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, **(5)** $u(x, y) = xy(x^2 - y^2)$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

3. Найдите все точки возможного экстремума, проверьте выполнение достаточных условий:**(1)** $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy$, **(2)** $u(x, y, z) = -x^2 - y^2 - z^2 + xy + xz + yz$, **(3)** $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$,

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

4. Докажите, что точка $M_0(x_0, y_0)$ является точкой локального экстремума функции**(1)** $f(x, y) = x^2y^2$, $M_0(0; 0)$, **(2)** $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$, $M_0(1; 0)$.

5. Найдите все точки локального экстремума: **(1)** $u(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$, **(2)** $u(x, y, z) = xyz$.

6. Найдите все точки локального экстремума: **(1)** $u(x, y, z) = xyz(4 - x - y - z)$ в области $x > 0 \bigcap y > 0 \bigcap z > 0$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Простые задачи для самостоятельного решения.**

7. Найдите все точки возможного экстремума, проверьте выполнение достаточных условий.**(1)** $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$, **(2)** $f(x, y) = -x^2 + 8xy - y^2$, **(3)** $f(x, y) = x^2 - y^2$.

8. Докажите, что в точке $M_0(x_0; y_0)$ выполнены необходимые условия локального экстремума первого порядка, т.е. первый дифференциал равен нулю, но указанная точка не является точкой локального экстремума.**(1)** $u(x, y) = x^4 + x^2y^2 - y^4$, $M_0(0; 0)$, **(2)** $u(x, y) = x^4 - y^4$, $M_0(0; 0)$, **(3)** $u(x, y) = x^3y^5$, $M_0(0; 0)$, **(4)** $u(x, y) = x^2 - 4xy + 4y^2$, $M_0(0; 0)$, **(5)** $u(x, y) = x^5 + y^5$, $M_0(0; 0)$.

9. Найдите все точки возможного экстремума, проверьте выполнение достаточных условий:**(1)** $f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - xy - xz - yz$, **(2)** $u(x, y, z) = -x^2 - 2y^2 - 3z^2 + xy - xz + yz$, **(3)** $f(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

10. Докажите, что точка $M_0(x_0, y_0)$ является точкой локального экстремума функции**(1)** $f(x, y) = (x^2 - y^2)^2$, $M_0(0; 0)$, **(2)** $f(x, y) = x\ln^2(x^2 + y^2 - 2)$, $M_0(1; 1)$.

11. Найдите все точки локального экстремума: **(1)** $f(x, y, z) = x^2 + y^4 + z^6$, **(2)** $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$.

12. Найдите все точки локального экстремума: **(1)** $u(x, y, z) = xy^2z^3(7 - x - 2y - 3z)$ в области $x > 0 \bigcap y > 0 \bigcap z > 0$, **(2)** $u(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$.

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

13. Найдите все точки возможного экстремума, проверьте выполнение достаточных условий. **(1)** $u(x, y) = x^4 + y^4$, **(2)** $u(x, y, z) = x^6 + y^6 + z^6$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Простые задачи для самостоятельного решения.**

14. Найдите все точки возможного экстремума, проверьте выполнение достаточных условий. **(1)** $u(x, y, z) = x^6 + y^6$, **(2)** $u(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$,

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

15. Найдите все точки возможного экстремума, проверьте выполнение достаточных условий.
(1) $u(x,y) = x^3 + y^3$, **(2)** $u(x,y) = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$,
(3) $u(x,y,z) = 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$, **(4)** $u(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz$,

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

16. Найдите все точки возможного экстремума, проверьте выполнение достаточных условий.
(1) $u(x,y) = x^3 - y^3$, **(2)** $u(x,y) = x^6 + 2x^3y^3 + y^6$, **(3)** $u(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$,
(4) $u(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$,

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

17. Найдите все точки возможного экстремума, проверьте выполнение достаточных условий.
(1) $u(x,y,z) = xyz(4 - x - y - z)$, **(2)** $u(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$.

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

18. Найдите все точки возможного экстремума, проверьте выполнение достаточных условий.
(1) $u(x,y,z,t) = xyzt(5 - x - y - z - t)$, **(2)** $u(x,y,z) = xy^2z^3(7 - x - 2y - 3z)$,

Примеры экзаменационных задач.

19. Найдите все точки возможного экстремума, проверьте выполнение достаточных условий экстремума для функции $f(x,y) = x^2 - 4xy + 6y^2$.

20. Найдите все точки возможного экстремума, проверьте выполнение достаточных условий.
$\boxed{\text{С}}$ **(1)** $u(x,y) = x^5 + y^5 - 5xy$, **(2)** $u(x,y) = xy(3 - x - y)$,
$\boxed{\text{Д}}$ **(3)** $u(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$, **(4)** $u(x,y) = xy^2(4 - x - 2y)$,
$\boxed{\text{Э}}$ **(5)** $u(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2x^4 - y^4$, **(6)** $u(x,y) = x^2y^2(3 - x^2 - y^2)$, **(7)** $u(x,y) = x^2y^3(6 - x - y)$,
(8) $u(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$, **(9)** $u(x,y) = xye^{-x^2/2-y^2/2}$, **(10)** $u(x,y) = xye^{-x-y}$,
(11) $u(x,y) = x^2y^2e^{-x-y}$, **(12)** $u(x,y) = x^3y^3e^{-x-y}$, **(13)** $u(x,y) = xy^2e^{-x-y}$,
(14) $u(x,y) = x^3y^4e^{-x-y}$, **(15)** $u(x,y) = x^3y^4e^{-x-y^2}$, **(16)** $u(x,y) = (5 - 2x + y)e^{x^2-y}$,

21. Докажите, что в точке $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ выполнены необходимые условия локального экстремума, но указанная точка не является точкой локального экстремума.
$\boxed{\text{С}}$ **(1)** $u(x,y,z) = xyz$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0, z_0 = 0$,
$\boxed{\text{Д}}$ **(2)** $u(x,y,z) = (x+y)(x+z)(y+z)$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0, z_0 = 0$,
$\boxed{\text{Э}}$ **(3)** $u(x,y,z) = xy^2z^4$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0, z_0 = 0$, **(4)** $u(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0, z_0 = 0$,
(5) $u(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0, z_0 = 0$, **(6)** $u(x,y,z) = x^2y^2z^2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0, z_0 = 0$,

22. Найдите все точки экстремума функции $u(x,y) = x^2y + \frac{8}{x^2} + \frac{8}{y}$ в области $x > 0$, $y > 0$.

2.7.2. Экономические приложения [2]

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. Предприниматель должен израсходовать в общей сложности 1440 у. е. на закупку оборудования (18 у.е. за одну установку) и наем персонала (12 у.е. за человека в расчете на год), причем его доход равен численно произведению количества установок на численность персонала. Найдите наибольший возможный доход (в у.е.).

2. Предприниматель должен израсходовать некоторую сумму денег на наем грузчиков (2 у.е. на каждого) и менеджеров (12 у.е. на каждого) причем ожидаемый доход (в у.е.) равен численно произведению числа грузчиков на число менеджеров. Сколько всего сотрудников нужно нанять, чтобы получить доход 1944 у.е. и израсходовать наименьшую сумму на зарплату?

3. Рыбак должен израсходовать некоторую сумму денег на подкормку рыбы (3 у.е. за килограмм корма) и покупку удочек (5 у.е. за штуку), причем ожидаемый вес выловленной

[2] Эти задачи встретятся далее в разделе условный экстремум, но здесь их нужно решить, используя метод исключения переменной

рыбы (в кг) равен численно произведению количества удочек на вес подкормки. Какова наименьшая сумма (в у.е.), при которой будет выловлено 960 кг рыбы?

Д Простые задачи для самостоятельного решения.

4. Предприниматель должен израсходовать в общей сложности 72 у. е. на закупку оборудования (4 у.е. за одну установку) и наем персонала (4 у.е. на сотрудника в расчете на год), причем его доход равен численно произведению количества установок на численность персонала. Найдите наибольший возможный доход (в у.е.).

5. Предприниматель должен израсходовать некоторую сумму денег на наем грузчиков (2 у.е. на каждого) и менеджеров (15 у.е. на каждого) причем ожидаемый доход (в у.е.) равен численно произведению числа грузчиков на число менеджеров. Сколько всего сотрудников нужно нанять, чтобы получить доход 1080 у.е. и израсходовать наименьшую сумму на зарплату?

6. Рыбак должен израсходовать некоторую сумму денег на подкормку рыбы (4 у.е. за килограмм корма) и покупку удочек (5 у.е. за штуку), причем ожидаемый вес выловленной рыбы (в кг) равен численно произведению количества удочек на вес подкормки. Какова наименьшая сумма (в у.е.), при которой будет выловлено 1620 кг рыбы?

Примеры экзаменационных задач.

7. Предприниматель должен израсходовать в общей сложности 48 у. е. на закупку оборудования (3 у.е. за одну установку) и наем персонала (3 у.е. на сотрудника в расчете на год), причем его доход равен численно произведению количества установок на численность персонала. Найдите наибольший возможный доход (в у.е.).

8. Предприниматель должен израсходовать некоторую сумму денег на наем грузчиков (3 у.е. на каждого) и менеджеров (15 у.е. на каждого) причем ожидаемый доход (в у.е.) равен численно произведению числа грузчиков на число менеджеров. Сколько всего сотрудников нужно нанять, чтобы получить доход 1620 у.е. и израсходовать наименьшую сумму на зарплату?

9. Рыбак должен израсходовать некоторую сумму денег на подкормку рыбы (3 у.е. за килограмм корма) и покупку удочек (5 у.е. за штуку), причем ожидаемый вес выловленной рыбы (в кг) равен численно произведению количества удочек на вес подкормки. Какова наименьшая сумма (в у.е.), при которой будет выловлено 3840 кг рыбы?

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

10. Руководитель дома моды может нанять x дизайнеров и y портных, при этом его прибыль пропорциональна величине xy, если x, y выражены в сотнях человек. Однако, общая площадь помещения ограничена и при большом количестве работников они мешают друг другу. Поэтому его прибыль пропорциональна также величине $3-x-y$, т.е. в конечном счете прибыль равна $xy(3-x-y)$. **(1)** Докажите, что максимальная прибыль получится при $x=y=1$.
(2) Используя первый и второй дифференциалы, оцените прибыль при $x=1{,}01$, $y=0{,}99$. Сравните с точным значением. **(3)** В данный момент в доме моды работают 50 дизайнеров и 50 портных, т.е. $x=y=0{,}5$. Можно нанять еще Δy дизайнеров и Δz портных, причем по финансовым соображениям $(\Delta x)^2+(\Delta y)^2=r^2$, где r – некоторое небольшое число. Какие значения должно иметь отношение $\Delta x:\Delta y$, чтобы прирост прибыли был максимален?

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

11. Руководитель дома моды может нанять x дизайнеров и y портных, при этом его прибыль равна $x^2y(4-2x-y)$, если x, y выражены в сотнях человек. **(1)** Докажите, что максимальная прибыль получится при $x=y=1$. **(2)** Используя первый и второй дифференциалы, оцените прибыль при $x=1{,}1$, $y=0{,}8$. Сравните с точным значением.

С Сложные задачи для разбора на семинаре.

12. Если нанять x менеджеров, y дизайнеров и z портных, то прибыль будет равна $x^5y^3z^2$, если x, y, z выражены в сотнях человек. Однако при большом количестве работников они мешают друг другу, так что прибыль пропорциональна также величине $11-5x-3y-2z$, т.е. в конечном счете прибыль равна $x^5y^3z^2\big(11-5x-3y-2z\big)$. **(1)** Докажите, что максимальная прибыль получится при $x=y=z=1$. **(2)** Оцените прибыль при $x=y=z=1{,}02$. **(3)** В данный момент в доме моды работают 30 менеджеров, 30 дизайнеров и 30 портных, т.е. $x=y=z=0{,}3$. Можно нанять еще Δx менеджеров, Δy дизайнеров и Δz портных, причем по финансовым соображениям $(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2=r^2$, где r – некоторое небольшое число. Какие значения должно иметь отношение $\Delta x:\Delta y:\Delta z$, чтобы прирост прибыли был максимален?

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

13. Если нанять x менеджеров, y дизайнеров и z портных, то прибыль будет равна $x^5y^4z^2$, если x,y,z выражены в сотнях человек. Однако при большом количестве работников они мешают друг другу, так что прибыль пропорциональна также величине $12-5x-4y-2z$, т.е. в конечном счете прибыль равна $x^5y^4z^2\big(12-5x-4y-2z\big)$. **(1)** Докажите, что максимальная прибыль получится при $x=y=z=1$. **(2)** Оцените прибыль при $x=y=z=0{,}99$. **(3)** В данный момент в доме моды работают 40 менеджеров, 40 дизайнеров и 40 портных, т.е. $x=y=z=0{,}4$. Можно нанять еще Δx менеджеров, Δy дизайнеров и Δz портных, причем по финансовым соображениям $(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2=r^2$, где r – некоторое небольшое число. Какие значения должно иметь отношение $\Delta x:\Delta y:\Delta z$, чтобы прирост прибыли был максимален?

Примеры экзаменационных задач.

14. Руководитель дома моды может нанять x менеджеров, y дизайнеров и z портных, при этом его прибыль пропорциональна величине xyz, если x,y,z выражены в сотнях человек. Однако, общая площадь помещения ограничена и при большом количестве работников они мешают друг другу. Поэтому его прибыль пропорциональна также величине $4-x-y-z$, т.е. в конечном счете прибыль равна $xyz(4-x-y-z)$. **(1)** Докажите, что максимальная прибыль получится при $x=y=z=1$. **(2)** Используя первый и второй дифференциалы, оцените прибыль при $x=1{,}01$, $y=0{,}99$, $z=1{,}02$. Сравните с точным значением.

2.7.3. Геометрические приложения

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. В распоряжении предпринимателя находится участок земли в форме прямоугольного треугольника с катетами 12 и 16. Найдите наибольшую площадь цеха прямоугольной формы, который он может разместить на своей земле.

$\boxed{\text{Д}}$ **Простые задачи для самостоятельного решения.**

2. В распоряжении предпринимателя находится участок земли в форме прямоугольного треугольника с катетами 8 и 18. Найдите наибольшую площадь цеха прямоугольной формы, который он может разместить на своей земле.

Примеры экзаменационных задач.

3. В распоряжении предпринимателя находится участок земли в форме прямоугольного треугольника с катетами 8 и 12. Найдите наибольшую площадь цеха прямоугольной формы, который он может разместить на своей земле.

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

4. В распоряжении предпринимателя находится участок земли, ограниченный отрезком оси абсцисс $0\leqslant x\leqslant 4$, отрезком оси ординат и частью линии $y=(4-x)^3$, $0\leqslant x\leqslant 4$. Найдите наибольшую площадь и соответствующие размеры цеха в форме треугольника, который он может разместить на своей земле.

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

5. В распоряжении предпринимателя находится участок земли, ограниченный отрезком оси абсцисс $0\leqslant x\leqslant 5$, отрезком оси ординат и частью линии $y=(5-x)^4$, $0\leqslant x\leqslant 5$. Найдите наибольшую площадь и соответствующие размеры цеха в форме треугольника, который он может разместить на своей земле.

Примеры экзаменационных задач.

6. В распоряжении предпринимателя находится участок земли, ограниченный отрезком оси абсцисс $0 \leqslant x \leqslant 8$, отрезком оси ординат и частью линии $y = \dfrac{1}{4}(8-x)^3$, $0 \leqslant x \leqslant 8$. Найдите наибольшую площадь и соответствующие размеры цеха в форме треугольника, который он может разместить на своей земле.

2009-2010 Курс 1, семестр 2, семинар 06(m3-06)
Тема: Неявные функции, 1

2.8. Неявные функции

2.8.1. Неявные функции двух переменных

С Простые задачи для разбора на семинаре.

1. Найдите первую и вторую производные неявной функции $y = f(x)$, заданной уравнением $u(x, y) = 0$. Не следует явно выражать y через x, даже если это возможно.
(1) $u(x, y) = 2x + 3y - 5$, **(2)** $u(x, y) = xy - 1$, **(3)** $u(x, y) = x^4 + y^4 + y - 2$,
(4) $u(x, y) = x^3 + \ln(x + 1) - y^2 + e^y - 1$ в точке $(0; 0)$,

Д Простые задачи для самостоятельного решения.

2. Найдите первую и вторую производные неявной функции $y = f(x)$, заданной уравнением $u(x, y) = 0$. Найдите все точки возможного экстремума функции $f(x)$. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума в каждой точке возможного экстремеума (если таковые существуют). Не следует явно выражать y через x, даже если это возможно.
(1) $u(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, **(2)** $u(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$, **(3)** $u(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - x^2y$,
(4) $u(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - xy^2$, **(5)** $u(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 4xy,\ x > 0$, **(6)** $u(x, y) = 8x^2y - x^4 - y^4$,
(7) $u(x, y) = x^4 + y^4 - 1$,

2.8.2. Неявные функции трех переменных

С Простые задачи для разбора на семинаре.

1. Найдите первые и вторые производные неявной функции $z = f(x, y)$, заданной уравнением $u(x, y, z) = 0$. Не следует пытаться получить решение уравнения $u(x, y, z) = 0$ в явном виде, даже если это возможно. **(1)** $u = x + y + z$, **(2)** $u = x^2 + y^2 - z$, **(3)** $u = x^2 + y^2 + z^2 - 1$,

Д Простые задачи для самостоятельного решения.

2. Найдите первые и вторые производные неявной функции $z = f(x, y)$, заданной уравнением $u(x, y, z) = 0$. Не следует пытаться получить решение уравнения $u(x, y, z) = 0$ в явном виде, даже если это возможно. **(1)** $u = 2x + 3y - 6z$, **(2)** $u = x^2 + y^2 - z^2$, **(3)** $u = x^4 + y^4 + z - 1$,

С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

3. Найдите первые и вторые производные неявной функции $z = f(x, y)$, заданной уравнением $u(x, y, z) = 0$. Не следует пытаться получить решение уравнения $u(x, y, z) = 0$ в явном виде, даже если это возможно. **(1)** $u = z^3 + x + y + xyz$,
(2) $u = x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2$, **(3)** $u = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 8(x^2 + y^2 - z^2)$,

4. Найдите все точки локального экстремума функции $z(x, y)$, определяемой неявно уравнением $x^2 + 8y^2 + z^2 - 4xy - 8x = 32$.

Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

5. Найдите первые и вторые производные неявной функции $z = f(x, y)$, заданной уравнением $u(x, y, z) = 0$. Не следует пытаться получить решение уравнения $u(x, y, z) = 0$ в явном виде, даже если это возможно. **(1)** $u = z^5 + x + y - xyz$, **(2)** $u = x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz - xy$,
(3) $u = (x^2 + y^2 + z^2)^3 - 27x^2y^2z$.

6. Найдите все точки локального экстремума функции $z(x, y)$, определяемой неявно уравнением $x^2 + 4y^2 + z^2 - 2xy - 6x - 24 = 0$.

С Сложные задачи для разбора на семинаре.

7. Пусть неявная функция $z = f(x, y)$ задана уравнением $z^3 + 3xyz = 1$. Вычислите первый и второй дифференциалы этой функции, dz и d^2z. Найдите все точки возможного экстремума функции $z = f(x, y)$. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума.

Д Сложные задачи для самостоятельного решения.

8. Пусть функция $z = f(x, y)$ задана уравнением $z^3 + 5xyz = x^5 + y^5 + 4z^5$. Найдите dz. Найдите все точки возможного экстремума функции $z = f(x, y)$. Найдите d^2z. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума.

Примеры экзаменационных задач.

9. Пусть функция $z = f(x, y)$ задана уравнением $z^3 + xyz = x + y$. Найдите dz. Найдите все точки возможного экстремума функции $z = f(x, y)$. Найдите d^2z. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума.

10. Пусть неявная функция $z = f(x, y)$ задана уравнением $x^4 + y^4 + 2z^4 - 4xyz = 0$. Найдите dz. Найдите все точки возможного экстремума функции $z = f(x, y)$ в области $x > 0 \bigcap y > 0 \bigcap z > 0$. Найдите d^2z. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума.

11. Пусть неявная функция $z = f(x, y)$ задана уравнением $x^6 + y^6 + 4z^6 - 6xyz = 0$. Найдите dz и d^2z. Найдите все точки возможного экстремума функции $z = f(x, y)$ в области $x > 0 \bigcap y > 0 \bigcap z > 0$. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума.

12. Пусть неявная функция $z = f(x, y)$ задана уравнением $\ln x + \ln y + \ln z = xyz - 1$. Найдите dz и d^2z. Найдите все точки возможного экстремума функции $z = f(x, y)$ в области $x > 0 \bigcap y > 0 \bigcap z > 0$. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума.

2009-2010 Курс 1, семестр 2, семинар 07(m3-07)
Тема: Условный экстремум, 1

2.9. Условный экстремум

2.9.1. Экстремум функции двух переменных с одним условием связи

1. Используя метод исключения, найдите все точки экстремума функции $u(x,y)$ при условии $f(x,y)=0$.

$\boxed{\text{С}}$ **(1)** $u=x^2+y^2$, $f=x+y-2$; **(2)** $u=x+y$, $f=x^2+y^2-2$;

$\boxed{\text{Д}}$ **(3)** $u=xy$, $f=x+y-2$; **(4)** $u=x+y$, $f=xy-1$;

$\boxed{\text{Э}}$ **(5)** $u=x+y$, $f=x^2+y^2-2x$; **(6)** $u=x+y$, $f=x^2-2y$; **(7)** $u=y-x^2$, $f=x^2+y^2-4$. **(8)** $u=xy$, $f=x^3+y^3-2xy$. **(9)** $u=xy^2$, $f=x+2y-3$. **(10)** $u=xy^2$, $f=x+y-3$. **(11)** $u=x^2y^3$, $f=2x+3y-5$. **(12)** $u=x^2y^3$, $f=x+y-900$.

2. Используя метод Лагранжа, найдите все точки экстремума функции $u(x,y)$ при условии $f(x,y)=0$. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума:

$\boxed{\text{С}}$ **(1)** $u=x+y$, $f=x^2+y^2-2$; **(2)** $u=x^2+y^2$, $f=x+y-2$;

$\boxed{\text{Д}}$ **(3)** $u=xy$, $f=x+y-2$; **(4)** $u=x+y$, $f=xy-1$;

$\boxed{\text{Э}}$ **(5)** $u=x+y$, $f=x^2+y^2-2x$; **(6)** $u=x+y$, $f=x^2-2y$; **(7)** $u=y-x^2$, $f=x^2+y^2-4$. **(8)** $u=xy$, $f=x^3+y^3-2xy$. **(9)** $u=xy^2$, $f=x+2y-3$. **(10)** $u=xy^2$, $f=x+y-3$. **(11)** $u=x^2y^3$, $f=2x+3y-5$. **(12)** $u=x^2y^3$, $f=x+y-900$.

2.9.2. Экстремум функции трех переменных с одним условием связи

1. Используя метод Лагранжа, найдите все точки экстремума функции $u(x,y,z)$ при условии $f(x,y,z)=0$. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума:

$\boxed{\text{С}}$ **(1)** $u=x^2y^3z^4$, $f=2x+3y+4z-9$. **(2)** $f=x+y+z$, $u=xyz-1$.

$\boxed{\text{Д}}$ **(3)** $u=x+y+z$, $f=x^2+y^2+z^2-3$. **(4)** $u=xyz$, $f=x+y+z-3$.

$\boxed{\text{Э}}$ **(5)** $u=x^2+y^2+z^2$, $f=x+y+z-3$. **(6)** $u=x^2+y^2+z^2$, $f=xyz-1$. **(7)** $u=xyz$, $f=x^2+y^2+z^2-3$. **(8)** $u=x+y+z$, $f=x^2+y^2+z^2-3$. **(9)** $u=2x+3y+4z$, $f=x^2y^3z^4-1$. **(10)** $u=x^2y^3z^4$, $f=x+y+z-18$, $x>0\bigcap y>0\bigcap z>0$.

2.9.3. Экономические приложения [3]

$\boxed{\text{С}}$ **Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. Предприниматель должен израсходовать в общей сложности 1440 у. е. на закупку оборудования (18 у.е. за одну установку) и наем персонала (12 у.е. за человека в расчете на год), причем его доход равен численно произведению количества установок на численность персонала. Найдите наибольший возможный доход (в у.е.).

2. Предприниматель должен израсходовать некоторую сумму денег на наем грузчиков (2 у.е. на каждого) и менеджеров (12 у.е. на каждого) причем ожидаемый доход (в у.е.) равен численно произведению числа грузчиков на число менеджеров. Сколько всего сотрудников нужно нанять, чтобы получить доход 1944 у.е. и израсходовать наименьшую сумму на зарплату?

3. Рыбак должен израсходовать некоторую сумму денег на подкормку рыбы (3 у.е. за килограмм корма) и покупку удочек (5 у.е. за штуку), причем ожидаемый вес выловленной рыбы (в кг) равен численно произведению количества удочек на вес подкормки. Какова наименьшая сумма (в у.е.), при которой будет выловлено 960 кг рыбы?

$\boxed{\text{Д}}$ **Простые задачи для самостоятельного решения.**

4. Предприниматель должен израсходовать в общей сложности 72 у. е. на закупку оборудования (4 у.е. за одну установку) и наем персонала (4 у.е. на сотрудника в расчете на

[3] Эти задачи ранее встречались в разделе локальный экстремум, но теперь их нужно решить, используя аппарат функции Лагранжа

год), причем его доход равен численно произведению количества установок на численность персонала. Найдите наибольший возможный доход (в у.е.).

5. Предприниматель должен израсходовать некоторую сумму денег на наем грузчиков (2 у.е. на каждого) и менеджеров (15 у.е. на каждого) причем ожидаемый доход (в у.е.) равен численно произведению числа грузчиков на число менеджеров. Сколько всего сотрудников нужно нанять, чтобы получить доход 1080 у.е. и израсходовать наименьшую сумму на зарплату?

6. Рыбак должен израсходовать некоторую сумму денег на подкормку рыбы (4 у.е. за килограмм корма) и покупку удочек (5 у.е. за штуку), причем ожидаемый вес выловленной рыбы (в кг) равен численно произведению количества удочек на вес подкормки. Какова наименьшая сумма (в у.е.), при которой будет выловлено 1620 кг рыбы?

Примеры экзаменационных задач.

7. Предприниматель должен израсходовать в общей сложности 48 у. е. на закупку оборудования (3 у.е. за одну установку) и наем персонала (3 у.е. на сотрудника в расчете на год), причем его доход равен численно произведению количества установок на численность персонала. Найдите наибольший возможный доход (в у.е.).

8. Предприниматель должен израсходовать некоторую сумму денег на наем грузчиков (3 у.е. на каждого) и менеджеров (15 у.е. на каждого) причем ожидаемый доход (в у.е.) равен численно произведению числа грузчиков на число менеджеров. Сколько всего сотрудников нужно нанять, чтобы получить доход 1620 у.е. и израсходовать наименьшую сумму на зарплату?

9. Рыбак должен израсходовать некоторую сумму денег на подкормку рыбы (3 у.е. за килограмм корма) и покупку удочек (5 у.е. за штуку), причем ожидаемый вес выловленной рыбы (в кг) равен численно произведению количества удочек на вес подкормки. Какова наименьшая сумма (в у.е.), при которой будет выловлено 3840 кг рыбы?

$\boxed{\text{С}}$ **Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

10. Предприниматель может израсходовать не более 480 уе на аренду станков, наем персонала и закупку сырья, причем 1 станок стоит 3 уе, 1 сотрудник получает 2 уе, 1 единица сырья стоит 5 уе. Доход предпринимателя численно равен $u = x^6y^8z^{10}$, где x – число станков, y – число сотрудников, z – количество единиц сырья. Сколько нужно станков, сотрудников и сырья, чтобы получить наибольший доход?

$\boxed{\text{Д}}$ **Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

11. Предприниматель может израсходовать не более 880 уе на аренду станков, наем персонала и закупку сырья, причем 1 станок стоит 2 уе, 1 сотрудник получает 1 уе, 1 единица сырья стоит 4 уе. Доход предпринимателя численно равен $u = x^4y^6z^{12}$, где x – число станков, y – число сотрудников, z – количество единиц сырья. Сколько нужно станков, сотрудников и сырья, чтобы получить наибольший доход?

$\boxed{\text{С}}$ **Сложные задачи для разбора на семинаре.**

12. Предприниматель может израсходовать не более 38808 у.е. на аренду станков, наем персонала и закупку сырья, причем 1 станок стоит 7 у.е., 1 сотрудник получает 4 у.е., 1 единица сырья стоит 11 у.е.. Доход предпринимателя численно равен $u = \sqrt[3]{x}\,\sqrt[5]{y}\,\sqrt[6]{z}$, где x – число станков, y – число сотрудников, z – количество единиц сырья. Сколько нужно станков, сотрудников и сырья, чтобы получить наибольший доход?

$\boxed{\text{Д}}$ **Сложные задачи для самостоятельного решения.**

13. Предприниматель может израсходовать не более 33984 у.е. на аренду станков, наем персонала и закупку сырья, причем 1 станок стоит 12 у.е., 1 сотрудник получает 6 у.е., 1 единица сырья стоит 8 у.е.. Доход предпринимателя численно равен $u = \sqrt[7]{x}\,\sqrt[2]{y}\,\sqrt[5]{z}$, где x – число станков, y – число сотрудников, z – количество единиц сырья. Сколько нужно станков, сотрудников и сырья, чтобы получить наибольший доход?

Примеры экзаменационных задач.

14. Предприниматель может израсходовать не более 27195 у.е. на аренду станков, наем персонала и закупку сырья, причем 1 станок стоит 5 у.е., 1 сотрудник получает 3 у.е., 1 единица сырья стоит 7 у.е.. Доход предпринимателя численно равен $u = \sqrt[8]{x}\,\sqrt[9]{y}\,\sqrt[11]{z}$, где x – число станков, y – число сотрудников, z – количество единиц сырья. Сколько нужно станков, сотрудников и сырья, чтобы получить наибольший доход?

2009-2010 Курс 1, семестр 2, семинар 08(m3-08)
Тема: Неявные функции, 2

С

1. Найдите все точки локального экстремума функции $y(x)$, определяемой неявно уравнением $(y-x)^3+x+6=0$.

2. Найдите все точки локального экстремума функции $y(x)$ и $x(y)$, определяемой неявно уравнением $x^4+y^4=8xy^2$.

3. Пусть неявная функция $z=f(x,y)$ задана уравнением $xz^5+y^3z-x^3=0$. Найдите dz и d^2z в точке $M_0=(1;\,0;\,1)$.

4. Пусть неявная функция $z=f(x,y)$ задана уравнением $x^4+y^4+z^4=2(x^2+y^2+z^2)$. Найдите все точки возможного экстремума функции $z=f(x,y)$. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума.

5. Найдите z_x, z_{xx}, dz, d^2z, если $\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^2+y^2+z^2=6. \end{cases}$ Найдите точки локального экстремума функции $z(x)$.

6. Найдите $du,\ dv,\ d^2u,\ d^2v$, если $\begin{cases} x=uv, \\ y=u+v, \end{cases}$ причем $u=u(x,y),\ v=v(x,y)$. Выражать явно $u=u(x,y),\ v=v(x,y)$ не следует, даже если это возможно.

7. Найдите $dz,\ d^2z$, если $\begin{cases} x=u+v, \\ y=u^2+v^2, \\ z=u^3+v^3, \end{cases}$ причем $u=u(x,y),\ v=v(x,y),\ z=z(x,y)$. Выражать явно $u=u(x,y),\ v=v(x,y)$ не следует, даже если это возможно.

8. Найдите $dz,\ d^2z$, если $\begin{cases} x=u\cos v, \\ y=u\sin v, \\ z=uv, \end{cases}$ причем $u=u(x,y),\ v=v(x,y),\ z=z(x,y)$. Выражать явно $u=u(x,y),\ v=v(x,y)$ не следует, даже если это возможно.

Д

9. Найдите все точки локального экстремума функции $y(x)$, определяемой неявно уравнением $(y-x^2)^2=x^5$.

10. Найдите все точки локального экстремума функции $y(x)$ и $x(y)$, определяемой неявно уравнением $(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2)$.

11. Пусть неявная функция $z=f(x,y)$ задана уравнением $x^3+y^3+z^3=5xyz$. Найдите dz и d^2z в точке $M_0=(1;\,1;\,2)$.

12. Пусть неявная функция $z=f(x,y)$ задана уравнением $z^2+xyz=xy^2+x^3$. Найдите все точки возможного экстремума функции $z=f(x,y)$. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума.

13. Найдите z_x, z_{xx}, dz, d^2z, если $\begin{cases} xyz=2, \\ x+y+z=4. \end{cases}$ Найдите точки локального экстремума функции $z(x)$.

14. Найдите $du,\ dv,\ d^2u,\ d^2v$, если $\begin{cases} x=u^2+v^2, \\ y=u+v, \end{cases}$ причем $u=u(x,y),\ v=v(x,y)$. Выражать явно $u=u(x,y),\ v=v(x,y)$ не следует, даже если это возможно.

15. Найдите $dz,\ d^2z$, если $\begin{cases} x=u+v, \\ y=uv, \\ z=u^2+v^2, \end{cases}$ причем $u=u(x,y),\ v=v(x,y),\ z=z(x,y)$. Выражать явно $u=u(x,y),\ v=v(x,y)$ не следует, даже если это возможно.

16. Найдите dz, d^2z, если $\begin{cases} x = ue^{u+v}, \\ y = ue^{u-v}, \\ z = u^2 + v^2, \end{cases}$ причем $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $z = z(x, y)$. Выражать явно $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ не следует, даже если это возможно.

2009-2010 Курс 1, семестр 2, семинар 09(m3-09)
Тема: Условный экстремум, 2

С

1. Докажите, что точки M_1 с координатами $x_1 = 1$, $y_1 = 1$, $\xi_1 = 3$, $\eta_1 = 3$ и M_2 с координатами $x_2 = -1$, $y_2 = -1$, $\xi_2 = 3$, $\eta_2 = 3$ удовлетворяют необходимым условиям экстремума в форме Лагранжа функции $f(x, y, \xi, \eta) = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$ с двумя условиями связи, $x^2 + y^2 = 2$ и $\xi + \eta = 6$. Проверьте для каждой из них выполнение достаточных условий в форме Лагранжа. Определите тип экстремума (минимум, максимум).

2. Задача о гантельке на конусе. Докажите, что точки M_1 с координатами $x_1 = 1$, $y_1 = 1$, $\xi_1 = -1$, $\eta_1 = 1$ и M_2 с координатами $x_2 = 1$, $y_2 = -1$, $\xi_2 = -1$, $\eta_2 = -1$ удовлетворяют необходимым условиям экстремума в форме Лагранжа функции $f(x, y, \xi, \eta) = y + \xi$ с тремя условиями связи, $x = y$, $\xi + \eta = 0$, $(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = 4$. Проверьте для каждой из них выполнение достаточных условий в форме Лагранжа. Определите тип экстремума (минимум, максимум).

3. Докажите, что точка M с координатами $x = 1$, $y = 1$, $z = 2$ удовлетворяет необходимым условиям экстремума в форме Лагранжа функции $f(x, y, z) = x + y + z$ с двумя условиями связи, $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ и $xyz = 2$. Проверьте выполнение достаточных условий в форме Лагранжа. Определите тип экстремума (минимум, максимум).

4. Найдите одну (любую) точку экстремума функции $u(x, y, z) = xy^2z^3$ с двумя условиями $x + y - z = 0$, $6x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 36$, расположенную в области $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Проведите полное исследование.123

5. Найдите точку экстремума функции $u(x, y, z) = xyz$ с условиями $x + y + z = 5$ и $xy + xz + yz = 8$.

Д

6. Докажите, что точки M_1 с координатами $x_1 = 1$, $y_1 = 1$, $\xi_1 = 3$, $\eta_1 = 3$ и M_2 с координатами $x_2 = 1$, $y_2 = 1$, $\xi_2 = 7$, $\eta_2 = 7$ удовлетворяют необходимым условиям экстремума в форме Лагранжа функции $f(x, y, \xi, \eta) = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$ с двумя условиями связи, $x^2 + y^2 = 2$ и $(\xi - 5)^2 + (\eta - 5)^2 = 8$. Проверьте для каждой из них выполнение достаточных условий в форме Лагранжа. Определите тип экстремума (минимум, максимум).

7. Задача о гантельке на шаре. Докажите, что точки M_1 с координатами $x_1 = 1$, $y_1 = 1$, $\xi_1 = -1$, $\eta_1 = 1$ и M_2 с координатами $x_2 = 1$, $y_2 = -1$, $\xi_2 = -1$, $\eta_2 = -1$ удовлетворяют необходимым условиям экстремума в форме Лагранжа функции $f(x, y, \xi, \eta) = y + \xi$ с тремя условиями связи, $x^2 + y^2 = 2$, $\xi^2 + \eta^2 = 2$, $(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = 4$. Проверьте для каждой из них выполнение достаточных условий в форме Лагранжа. Определите тип экстремума (минимум, максимум).

8. Докажите, что точка M с координатами $x = 3$, $y = 3$, $z = 1$ удовлетворяет необходимым условиям экстремума в форме Лагранжа функции $f(x, y, z) = x + y + z$ с двумя условиями связи, $x^2 + y^2 + z^2 = 19$ и $xyz = 9$. Проверьте выполнение достаточных условий в форме Лагранжа. Определите тип экстремума (минимум, максимум).

9. Найдите одну (любую) точку экстремума функции $u(x, y, z) = xy^2z^5$ с двумя условиями $x - y + z = 0$, $10x^2 + 5y^2 + 2z^2 = 240$, расположенную в области $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Проведите полное исследование.

10. Найдите точку экстремума функции $u(x, y, z) = x + y + z$ с условиями $xyz + 4 = 0$ и $xy + xz + yz = 8$.

11. Найдите точку экстремума функции $u(x, y, z) = xy + xz + yz$ с условиями $xyz + 4 = 0$ и $x + y + z + 5 = 0$.