T571(2003-2004) Анализ, модули 1 и 2, теоретическая часть Анализ k1m1&2-731

1. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = x^3$ в точке $x = 2$.

2. Используя логические формулы (т.е. символы $\forall, \exists, \epsilon, \delta$), сформулируйте определение функции, ограниченной снизу на множестве X.

3. Сформулируйте "по Коши" определение: "Функция $f(x)$ имеет предел при $x \to +\infty$".

4. Пусть существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и бесконечный предел $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$. Что можно сказать о существовании и величине $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$?

5. Докажите, что если $\exists \lim_{x\to a} f(x)$ и $\nexists \lim_{x\to a} g(x)$, то $\nexists \lim_{x\to a}(f(x) + g(x))$.

6. Пусть $f(x) = o(x^2)$ при $x \to 0$. Укажите все верные утверждения:
$\boxed{1}$ $\exists \lim_{x\to 0} f(x) = 0$. $\boxed{2}$ $\exists \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$. $\boxed{3}$ $\exists \lim_{x\to 0} xf(x) = 0$. $\boxed{4}$ $\exists \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.
$\boxed{5}$ $\exists \lim_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$. $\boxed{6}$ $\exists \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = 0$.

7. Пусть функция $f(x)$ определена на $[a;\ b]$, $f(a)f(b) < 0$, и уравнение $f(x) = 0$ не имеет корней на $(a;\ b)$. Докажите, что функция $f(x)$ не является непрерывной на $[a;\ b]$.

8. Докажите, что если существует дифференциал функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, то существует число A такое, что $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$ при $\Delta x \neq 0$, где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

9. Предположим, что $u(t)$ – дифференцируемая функция независимой переменной t. Вычислите первый дифференциал сложной функции $y = \cos(u(t))$. Поясните на этом примере, что означает "инвариантность формы первого дифференциала"

10. Сформулируйте достаточные условия перегиба графика функции, использующие вторую производную.

11. Существуют ли ограниченные последовательности, не имеющие ни одной предельной точки? Если да, то приведите пример, а если нет, приведите формулировку теоремы, из которой это следует.

12. Напишите формулу Тейлора с многочленом n-й степени с центром $x_0 = 0$ с остаточным членом в форме Пеано для функции $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

13. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для функции e^x с центром в точке $x_0 = 0$ для $n = 4$ (n – степень многочлена Тейлора).

14. Пусть значение параметра p таково, что уравнение $x^6 - p = \frac{48}{x}$ имеет ровно два различных корня. Найдите меньший корень.

15. Докажите, что если $\exists \lim_{x\to a} f(x) = A$, $\exists \lim_{x\to a} g(x) = B$, то $\exists \lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = A\cdot B$.

16. Обьясните, в каком месте будет нарушен ход доказательства второй теоремы Вейерштрасса, если в условии этой теоремы заменить "сегмент"на "интервал"

17. Сформулируйте необходимые условия локального экстремума дифференцируемой функции. Докажите соответствующую теорему.

18. Докажите, что если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) = 0$, $f^{(4)}(x_0) < 0$, то в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет строгий локальный максимум.

19. Пусть $f(x) = \begin{cases} x^3 \cos\frac{1}{x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Докажите, что $\exists f'(x)$ при $x \neq 0$, $\exists f'(0)$, $\nexists \lim_{x\to 0} f'(x)$.

20. Предположим, что $\mathcal{X}$ – непустое множество вещественных чисел и $\exists m \in R : \forall y > m\ \exists x \in X : x < y$. Какое еще условие нужно наложить на упомянутые величины, чтобы из всего этого вместе вытекало, что m – точная нижняя грань множества $\mathcal{X}$?

T571(2003-2004) Анализ, модули 1 и 2, теоретическая часть Анализ k1m1&2-732

1. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt{x}$ в точке $x = 1$.

2. Используя логические формулы (т.е. символы $\forall, \exists, \epsilon, \delta$), сформулируйте определение функции, ограниченной на множестве X.

3. Сформулируйте "по Коши" определение: "Функция $f(x)$ имеет предел при $x \to -\infty$".

4. Пусть существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и бесконечный предел $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$. Что можно сказать о существовании и величине $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x))$?

5. Приведите пример: $\nexists \lim_{x\to a} f(x)$ и $\nexists \lim_{x\to a} g(x)$, но $\exists \lim_{x\to a}(f(x) + g(x))$.

6. Пусть $f(x) = o(x^{-1})$ при $x \to +\infty$. Укажите все верные утверждения.
$\boxed{1}$ $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ $\boxed{2}$ $\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$ $\boxed{3}$ $\exists \lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$ $\boxed{4}$ $\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$
$\boxed{5}$ $\exists \lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = 0$ $\boxed{6}$ $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x^{-1}) = 0$

7. Пусть функция $f(x)$ определена на $[a;\ b]$, $f(a) < f(b)$, и $\exists c \in (f(a);\ f(b))$ такое, что уравнение $f(x) = c$ не имеет корней на $(a;\ b)$. Докажите, что функция $f(x)$ не является непрерывной на $[a;\ b]$.

8. Докажите, что если $\exists f'(x_0)$, то $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$.

9. Предположим, что $u(t)$ – дифференцируемая функция независимой переменной t. Вычислите первый дифференциал сложной функции $y = \sin(u)$. Поясните на этом примере, что означает "инвариантность формы первого дифференциала"

10. Сформулируйте достаточные условия перегиба графика функции, использующие третью производную.

11. Существуют ли ограниченные последовательности, имеющие бесконечно много предельных точек? Если да, то приведите пример, а если нет, приведите формулировку теоремы, из которой это следует.

12. Напишите формулу Тейлора с многочленом n-й степени с центром $x_0 = 0$ с остаточным членом в форме Пеано для функции $f(x) = \ln(1 + x)$.

13. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для функции e^{-x} с центром в точке $x_0 = 0$ для $n = 4$ (n – степень многочлена Тейлора).

14. Пусть значение параметра p таково, что уравнение $x^8 + \frac{72}{x} = p$ имеет ровно два различных корня. Найдите больший корень.

15. Докажите, что если $\exists \lim_{x\to a} f(x) = A$, $\exists \lim_{x\to a} g(x) = B \neq 0$, то $\exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

16. Сформулируйте и докажите вторую теорему Вейерштрасса

17. Сформулируйте достаточные условия локального максимума, в которых используется только первая производная. Докажите соответствующую теорему.

18. Докажите, что если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) > 0$, то в точке x_0 функция $y = f(x)$ не имеет локального экстремума.

19. Пусть $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\frac{1}{x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Докажите, что $\exists f'(x)$ при $x \neq 0$, $\exists f'(0)$, $\nexists \lim_{x\to 0} f'(x)$.

20. Предположим, что $\mathcal{X}$ – непустое множество вещественных чисел и $\exists M \in R : \forall x \in X$ верно $x \leqslant M$. Какое еще условие нужно наложить на упомянутые величины, чтобы из всего этого вместе вытекало, что M – точная верхняя грань множества $\mathcal{X}$?

T571(2003-2004) Анализ, модули 1 и 2, теоретическая часть Анализ k1m1&2-733

1. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = \operatorname{arctg} x$ в точке $x = 1$.

2. Используя логические формулы (т.е. символы $\forall, \exists, \epsilon, \delta$), сформулируйте определение функции, неограниченной сверху на множестве X.

3. Сформулируйте "по Коши" определение предела функции $f(x)$ при $x \to +\infty$.

4. Пусть существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и бесконечный предел $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$. Что можно сказать о существовании и величине $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - g(x))$?

5. Докажите, что если $\exists \lim_{x\to a}(f(x) + g(x))$ и $\nexists \lim_{x\to a} f(x)$, то $\nexists \lim_{x\to a} g(x)$.

6. Пусть $f(x) = o(x^{-2})$ при $x \to +\infty$. Укажите все верные утверждения.
$\boxed{1}$ $\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ $\boxed{2}$ $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x^{-2}) = 0$ $\boxed{3}$ $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ $\boxed{4}$ $\exists \lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = 0$
$\boxed{5}$ $\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$ $\boxed{6}$ $\exists \lim_{x\to+\infty} x f(x) = 0$

7. Сформулируйте теорему о свойстве непрерывной функции, принимающей значения противоположных знаков на концах сегмента $[a,\ b]$.

8. Докажите, что если существует дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0, то $\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$ при $\Delta x \neq 0$, где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

9. Предположим, что $u(t)$ – дифференцируемая функция независимой переменной t. Вычислите первый дифференциал сложной функции $y = e^{-u}$. Поясните на этом примере, что означает "инвариантность формы первого дифференциала"

10. Известно, что непрерывная функция $y = f(x)$ имеет положительную вторую производную на промежутке $x \in (a;\ a+\delta)$ и имеет отрицательную вторую производную на промежутке $x \in (a-\delta;\ a)$. Достаточно ли этих условий для того, чтобы в точке $M(a;\ f(a))$ график функции имел точку перегиба?

11. Что можно сказать о пределе ограниченной последовательности, имеющей ровно одну предельную точку? Приведите пример такой последовательности.

12. Напишите формулу Тейлора с многочленом n-й степени с центром $x_0 = 0$ с остаточным членом в форме Пеано для функции $f(x) = \ln(1-x)$.

13. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для функции $\cos x$ с центром в точке $x_0 = 0$ для $n = 6$ (n – степень многочлена Тейлора).

14. Пусть значение параметра p таково, что уравнение $x^{10} + \frac{250}{x} = p$ имеет ровно два различных корня. Найдите больший корень.

15. Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, то $\exists \lim_{x\to a}\big(f(x) + g(x)\big) = A + B$.

16. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a;\ b]$, то $\exists c \in [a;\ b] : \forall x \in [a;\ b] \Rightarrow f(x) \leqslant f(c)$.

17. Сформулируйте достаточные условия локального минимума, в которых используется вторая производная. Докажите соответствующую теорему.

18. Докажите, что если $f''(x_0) = 0$, $f^{(4)}(x_0) = 0$, $f^{(5)}(x_0) \neq 0$, то в точке x_0 функция $y = f(x)$ не имеет локального экстремума.

19. Пусть $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Докажите, что $\exists f'(x)$ при $x \neq 0$, $\exists f'(0)$, $\nexists \lim_{x\to 0} f'(x)$.

20. Предположим, что $\mathcal{X}$ – непустое множество вещественных чисел и $\exists M \in R : \forall y < M\ \exists x \in X : x > y$. Какое еще условие нужно наложить на упомянутые величины, чтобы из всего этого вместе вытекало, что M – точная верхняя грань множества $\mathcal{X}$?

T571(2003-2004) Анализ, модули 1 и 2, теоретическая часть Анализ k1m1&2-734

1. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = \operatorname{tg} x$ в точке $x = \pi/4$.

2. Используя логические формулы (т.е. символы $\forall, \exists, \epsilon, \delta$), сформулируйте определение функции, ограниченной сверху на множестве X.

3. Сформулируйте "по Коши" определение предела функции $f(x)$ при $x \to -\infty$.

4. Пусть существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и бесконечный предел $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$. Что можно сказать о существовании и величине $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \cdot g(x))$?

5. Докажите, что если $\exists \lim_{x\to a} f(x)$ и $\nexists \lim_{x\to a}(f(x) + g(x))$, то $\nexists \lim_{x\to a} g(x)$.

6. Пусть $f(x) = o(x)$ при $x \to 0$. Укажите все верные утверждения:
$\boxed{1}$ $\exists \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = 0$. $\boxed{2}$ $\exists \lim_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$. $\boxed{3}$ $\exists \lim_{x\to 0} f(x) = 0$. $\boxed{4}$ $\exists \lim_{x\to 0} x f(x) = 0$.
$\boxed{5}$ $\exists \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$. $\boxed{6}$ $\exists \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$.

7. Сформулируйте теорему о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение.

8. Докажите, что если существует число A такое, что $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$, то $\exists f'(x_0)$.

9. Предположим, что $u(t)$ – дифференцируемая функция независимой переменной t. Вычислите первый дифференциал сложной функции $y = \operatorname{arctg} u$. Поясните на этом примере, что означает "инвариантность формы первого дифференциала"

10. Сформулируйте достаточные условия перегиба графика функции, использующие только первую производную.

11. Что можно сказать о пределе ограниченной последовательности, имеющей ровно две различных предельных точки? Приведите пример такой последовательности.

12. Напишите формулу Тейлора с многочленом n-й степени с центром $x_0 = 0$ с остаточным членом в форме Пеано для функции $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

13. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для функции $\sin x$ с центром в точке $x_0 = 0$ для $n = 5$ (n – степень многочлена Тейлора).

14. Пусть значение параметра p таково, что уравнение $x^4 - p = \frac{28}{x}$ имеет ровно два различных корня. Найдите меньший корень.

15. Докажите, что если $\exists \lim_{x\to a} f(x) = A$, $\exists \lim_{x\to a} g(x) = B$, то $\exists \lim_{x\to a}\big(f(x) - g(x)\big) = A - B$.

16. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a;\ b]$, то
$\exists c \in [a;\ b] : \forall x \in [a;\ b] \quad f(x) \geqslant f(c)$.

17. Сформулируйте достаточные условия локального минимума, в которых используется только первая производная. Докажите соответствующую теорему.

18. Докажите, что если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) < 0$, то в точке x_0 функция $y = f(x)$ не имеет локального экстремума.

19. Пусть $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Докажите, что $\exists f'(x)$ при $x \neq 0$, $\exists f'(0)$, $\nexists \lim_{x\to 0} f'(x)$.

20. Предположим, что $\mathcal{X}$ – непустое множество вещественных чисел и
$\exists m \in R : \forall x \in X \Rightarrow x \geqslant m$. Какое еще условие нужно наложить на упомянутые величины, чтобы из всего этого вместе вытекало, что m – точная нижнняя грань множества $\mathcal{X}$?

Т571(2003-2004) Анализ, модули 1 и 2, теоретическая часть Анализ k1m1&2-735

1. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = \operatorname{arctg} x$ в точке $x = 1$.

2. Используя логические формулы (т.е. символы $\forall, \exists, \epsilon, \delta$), сформулируйте определение функции, неограниченной сверху на множестве X.

3. Сформулируйте "по Коши" определение предела функции $f(x)$ при $x \to +\infty$.

4. Пусть существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и бесконечный предел $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$. Что можно сказать о существовании и величине $\lim\limits_{x\to a} (f(x) - g(x))$?

5. Докажите, что если $\exists \lim_{x\to a}(f(x) + g(x))$ и $\nexists \lim_{x\to a} f(x)$, то $\nexists \lim_{x\to a} g(x)$.

6. Пусть $f(x) = o(x^{-2})$ при $x \to +\infty$. Укажите все верные утверждения.
$\boxed{1}$ $\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ $\boxed{2}$ $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x^{-2}) = 0$ $\boxed{3}$ $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ $\boxed{4}$ $\exists \lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = 0$
$\boxed{5}$ $\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$ $\boxed{6}$ $\exists \lim_{x\to+\infty} x f(x) = 0$

7. Сформулируйте теорему о свойстве непрерывной функции, принимающей значения противоположных знаков на концах сегмента $[a,\ b]$.

8. Докажите, что если существует дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0, то $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$ при $\Delta x \neq 0$, где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

9. Предположим, что $u(t)$ – дифференцируемая функция независимой переменной t. Вычислите первый дифференциал сложной функции $y = e^{-u}$. Поясните на этом примере, что означает "инвариантность формы первого дифференциала"

10. Известно, что непрерывная функция $y = f(x)$ имеет положительную вторую производную на промежутке $x \in (a;\ a + \delta)$ и имеет отрицательную вторую производную на промежутке $x \in (a - \delta;\ a)$. Достаточно ли этих условий для того, чтобы в точке $M(a;\ f(a))$ график функции имел точку перегиба?

11. Что можно сказать о пределе ограниченной последовательности, имеющей ровно одну предельную точку? Приведите пример такой последовательности.

12. Напишите формулу Тейлора с многочленом n-й степени с центром $x_0 = 0$ с остаточным членом в форме Пеано для функции $f(x) = \ln(1 - x)$.

13. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для функции $\cos x$ с центром в точке $x_0 = 0$ для $n = 6$ (n – степень многочлена Тейлора).

14. Пусть значение параметра p таково, что уравнение $x^{10} + \frac{250}{x} = p$ имеет ровно два различных корня. Найдите больший корень.

15. Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, то $\exists \lim_{x\to a}\big(f(x) + g(x)\big) = A + B$.

16. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a;\ b]$, то $\exists c \in [a;\ b] : \forall x \in [a;\ b] \Rightarrow f(x) \leqslant f(c)$.

17. Сформулируйте достаточные условия локального максимума, в которых используется только первая производная. Докажите соответствующую теорему.

18. Докажите, что если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) > 0$, то в точке x_0 функция $y = f(x)$ не имеет локального экстремума.

19. Пусть $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\frac{1}{x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Докажите, что $\exists f'(x)$ при $x \neq 0$, $\exists f'(0)$, $\nexists \lim_{x\to 0} f'(x)$.

20. Предположим, что $\mathcal{X}$ – непустое множество вещественных чисел и $\exists M \in R : \forall x \in X$ верно $x \leqslant M$. Какое еще условие нужно наложить на упомянутые величины, чтобы из всего этого вместе вытекало, что M – точная верхняя грань множества $\mathcal{X}$?

Т571(2003-2004) Анализ, модули 1 и 2, теоретическая часть Анализ k1m1&2-736

1. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = \operatorname{tg} x$ в точке $x = \pi/4$.

2. Используя логические формулы (т.е. символы $\forall, \exists, \epsilon, \delta$), сформулируйте определение функции, ограниченной сверху на множестве X.

3. Сформулируйте "по Коши" определение предела функции $f(x)$ при $x \to -\infty$.

4. Пусть существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и бесконечный предел $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$. Что можно сказать о существовании и величине $\lim\limits_{x\to a} (f(x)\cdot g(x))$?

5. Докажите, что если $\exists \lim_{x\to a} f(x)$ и $\nexists \lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$, то $\nexists \lim_{x\to a} g(x)$.

6. Пусть $f(x) = o(x)$ при $x \to 0$. Укажите все верные утверждения:
$\boxed{1}$ $\exists \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = 0$. $\boxed{2}$ $\exists \lim_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$. $\boxed{3}$ $\exists \lim_{x\to 0} f(x) = 0$. $\boxed{4}$ $\exists \lim_{x\to 0} x f(x) = 0$.
$\boxed{5}$ $\exists \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$. $\boxed{6}$ $\exists \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$.

7. Сформулируйте теорему о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение.

8. Докажите, что если существует число A такое, что $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + A\cdot\Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$, то $\exists f'(x_0)$.

9. Предположим, что $u(t)$ – дифференцируемая функция независимой переменной t. Вычислите первый дифференциал сложной функции $y = \operatorname{arctg} u$. Поясните на этом примере, что означает "инвариантность формы первого дифференциала"

10. Сформулируйте достаточные условия перегиба графика функции, использующие только первую производную.

11. Что можно сказать о пределе ограниченной последовательности, имеющей ровно две различных предельных точки? Приведите пример такой последовательности.

12. Напишите формулу Тейлора с многочленом n-й степени с центром $x_0 = 0$ с остаточным членом в форме Пеано для функции $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

13. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для функции $\sin x$ с центром в точке $x_0 = 0$ для $n = 5$ (n – степень многочлена Тейлора).

14. Пусть значение параметра p таково, что уравнение $x^4 - p = \frac{28}{x}$ имеет ровно два различных корня. Найдите меньший корень.

15. Докажите, что если $\exists \lim_{x\to a} f(x) = A$, $\exists \lim_{x\to a} g(x) = B$, то $\exists \lim_{x\to a}\big(f(x) - g(x)\big) = A - B$.

16. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a;\ b]$, то
$\exists c \in [a;\ b] : \forall x \in [a;\ b] \quad f(x) \geqslant f(c)$.

17. Сформулируйте достаточные условия локального минимума, в которых используется вторая производная. Докажите соответствующую теорему.

18. Докажите, что если $f''(x_0) = 0$, $f^{(4)}(x_0) = 0$, $f^{(5)}(x_0) \neq 0$, то в точке x_0 функция $y = f(x)$ не имеет локального экстремума.

19. Пусть $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Докажите, что $\exists f'(x)$ при $x \neq 0$, $\exists f'(0)$, $\nexists \lim_{x\to 0} f'(x)$.

20. Предположим, что $\mathcal{X}$ – непустое множество вещественных чисел и
$\exists M \in R : \forall y < M\ \exists x \in X : x > y$. Какое еще условие нужно наложить на упомянутые величины, чтобы из всего этого вместе вытекало, что M – точная верхняя грань множества $\mathcal{X}$?