Глава 6

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Основные методы вычисления неопределенного интеграла

1. Первообразная и неопределенный интеграл. Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$, заданной на некотором множестве X, если $F'(x)=f(x)$ для всех $x\in X$. Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, то $\Phi(x)$ является первообразной той же функции в том и только в том случае, когда $\Phi(x)=F(x)+C$, где C — некоторая постоянная. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от этой функции и обозначается символом $\int f(x)\,dx$. Таким образом, по определению

$$\int f(x)\,dx=\{F(x)+C\}, \tag{1}$$

где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$, а постоянная C принимает действительные значения.

В силу установившейся традиции равенство (1) записывается без явного обозначения множества справа, т. е. в виде

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C,$$

при этом C называют произвольной постоянной.

Свойства неопределенного интеграла.

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)'=f(x)$.

2. $\int f'(x)\,dx=f(x)+C$.

3. $\int af(x)\,dx=a\int f(x)\,dx, \quad a\neq 0$.

4. $\int (f_1(x)+f_2(x))\,dx=\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx$.

Таблица основных неопределенных интегралов.

1. $\int x^n\,dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad (n\neq -1)$.

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a>0,\ a\neq 1); \quad \int e^x\,dx = e^x + C.$

4. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

8. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C = \ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x| + C.$

9. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C = \ln|\operatorname{tg} x + \sec x| + C.$

10. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \quad (a\neq 0).$

11. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C \quad (a\neq 0).$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \quad |x|<|a|.$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C, \quad |x|>|a|>0.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C \quad (a\neq 0).$

15. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$

16. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$

17. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

18. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

Найти первообразные следующих функций:

6.1. $2x^7$. **6.2.** $4\sqrt[3]{x}$. **6.3.** $\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}$.

6.4. $\frac{x^3+5x^2-1}{x}$. **6.5.** $\frac{(\sqrt{x}+1)^3}{x\sqrt{x}}$. **6.6.** $1-2\sin^2\frac{x}{2}$.

6.7. $\frac{1}{\sqrt{a+bx}}$. **6.8.** e^{2-3x}. **6.9.** $\frac{1}{\sqrt[3]{5^x}}$.

6.10. $\frac{1}{\cos^2 4x}$. **6.11.** $\frac{x^3+1}{x-1}$. **6.12.** $1-8\sin^2 2x\cos^2 2x$.

6.13. $\left(\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)^2$.

6.14. $\cos(\alpha+x)\cos(\alpha-x)+\sin(\alpha+x)\sin(\alpha-x)$.

Отыскание неопределенного интеграла с помощью таблицы основных интегралов и тождественных преобразований называют непосредственным интегрированием.

Пример 1. Вычислить $\int\frac{dx}{x^2-x^4}$.

$$\lhd \int\frac{dx}{x^2-x^4}=\int\frac{dx}{x^2(1-x^2)}=\int\frac{1-x^2+x^2}{x^2(1-x^2)}dx=$$

$$=\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{1-x^2}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C. \rhd$$

Используя таблицу основных интегралов, найти следующие интегралы:

6.15. $\int\left(3x^2+2x+\frac{1}{x}\right)dx$. **6.16.** $\int\frac{2x+3}{x^4}dx$.

6.17. $\int\sqrt{mx}\,dx$. **6.18.** $\int\frac{dx}{\sqrt[n]{x}}$.

6.19. $\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{x+1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$.

6.20. $\int\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{x})^2}{\sqrt{ax}}dx$. **6.21.** $\int\frac{x^3+2}{x}dx$.

6.22. $\int 2^x e^x\,dx$. **6.23.** $\int 2^x(1+3x^2\cdot 2^{-x})\,dx$.

6.24. $\int (2x + 3\cos x)\,dx$.

6.25. $\int \frac{2 - \sin x}{\sin^2 x}\,dx$.

6.26. $\int \frac{3 - 2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x}\,dx$.

6.27. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}\,dx$.

6.28. $\int \sin^2 \frac{x}{2}\,dx$.

6.29*. а) $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$; б) $\int \operatorname{th}^2 x\,dx$.

6.30. $\int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x}$.

6.31. $\int (\arcsin x + \arccos x)\,dx$.

6.32. $\int \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$.

6.33. $\int \frac{dx}{x^2 + 4}$.

6.34. $\int \frac{dx}{5 - x^2}$.

6.35. $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - x^2}}$.

6.36. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 3} - \sqrt{x^2 + 3}}{\sqrt{x^4 - 9}}\,dx$.

6.37. $\int \frac{(1 + x)^2}{x(1 + x^2)}\,dx$.

6.38. $\int (x + a)(x + b)\,dx$.

6.39. $\int (a^{1/3} + x^{1/3})^3\,dx$

6.40. $\int \frac{\cos^2 x + 3\cos x - 2}{\cos^2 x}\,dx$.

6.41. а) $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$; б) $\int \operatorname{cth}^2 x\,dx$

6.42. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 7}}$.

6.43. $\int \frac{x^2 - 9}{x^2 - 8}\,dx$.

2. Метод замены переменной. Существуют следующие два варианта этого метода.

а) Метод подведения под знак дифференциала. Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)\,dx$. Предположим, что существуют дифференцируемая функция $u = \varphi(x)$ и функция $g(u)$ такие, что подынтегральное выражение $f(x)\,dx$ может быть записано в виде

$$f(x)\,dx = g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = g(u)\,du$$

(указанное преобразование называется подведением $u = \varphi(x)$ под знак дифференциала). Тогда

$$\int f(x)\,dx = \int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int g(u)\,du\Big|_{u=\varphi(x)},$$

т. е. вычисление интеграла $\int f(x)\,dx$ сводится к вычислению интеграла $\int g(u)\,du$ (который может оказаться проще исходного) и последующей подстановке $u=\varphi(x)$.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \sin^3 x \cos x\,dx$

◁ Имеем:

$$\int \sin^3 x \cos x\,dx=\int \sin^3 x\,d(\sin x)=\int u^3\,du=\left.\frac{u^4}{4}\right|_{u=\sin x}+C=\frac{\sin^4 x}{4}+C. \quad \triangleright$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx$.

◁ Имеем:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx=\int \frac{d(x^2+x-3)}{x^2+x-3}=\int \frac{du}{u}=$$

$$=\ln|u|\Big|_{u=x^2+x-3}+C=\ln|x^2+x-3|+C. \quad \triangleright$$

Операция подведения функции $\varphi(x)$ под знак дифференциала эквивалентна замене переменной x на новую переменную $u=\varphi(x)$.

Пример 4. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}}$.

◁ Произведем замену переменной по формуле

$$u=3x+1.$$

Тогда $du=3\,dx$, т. е.

$$dx=\frac{1}{3}\,du$$

и

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}}=\frac{1}{3}\int \frac{du}{u^{2/3}}=u^{1/3}\Big|_{u=3x+1}+C=\sqrt[3]{3x+1}+C.$$

Выполненное преобразование эквивалентно подведению под знак дифференциала функции $u=3x+1$. ▷

Вычислить интегралы с помощью подходящей замены:

6.44. $\int \sqrt{3+x}\,dx$. **6.45.** $\int (3-4\sin x)^{1/3}\cos x\,dx$.

6.46. $\int \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x\,dx$. **6.47.** $\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg}^4 x}\,dx$.

6.48. $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$. **6.49.** $\int \frac{dx}{a+bx}$.

6.50. $\int \frac{\sec^2 x}{a-b\operatorname{tg} x}dx.$

6.51. $\int \frac{\cos\frac{x}{\sqrt{2}}}{2-3\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}dx.$

6.52. $\int \operatorname{ctg} x\,dx.$

6.53. $\int 3^{4x}\,dx.$

6.54. $\int \cos(ax+b)\,dx.$

6.55. $\int \sin(\ln x)\frac{dx}{x}.$

6.56. $\int \sin\sqrt{x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}}.$

6.57. $\int \frac{dx}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}.$

6.58. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 3x}.$

6.59. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}dx.$

6.60. $\int x\cdot 5^{-x^2}\,dx.$

6.61. $\int \frac{dx}{1-4x^2}.$

6.62. $\int \frac{e^{-ax}}{1+e^{-2ax}}dx.$

6.63. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-3x^2}}.$

6.64. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-1}}.$

6.65. $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{\cos^2 x+4}}.$

6.66. $\int \frac{x^3\,dx}{x^8+1}.$

6.67. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+1}}.$

6.68. $\int \frac{dx}{a^2+b^2x}.$

6.69. $\int \frac{\sin ax}{\cos^3 ax}dx.$

6.70. $\int \operatorname{ch}^2 x\operatorname{sh} x\,dx.$

6.71. $\int \frac{e^x}{(7-e^x)^2}dx.$

6.72. $\int \operatorname{tg} x\,dx.$

6.73. $\int \operatorname{cth} 4x\,dx.$

6.74. $\int \frac{a^{1/x}}{x^2}dx.$

6.75. $\int \frac{x\,dx}{\operatorname{ch}^2(x^2+1)}.$

6.76. $\int \frac{dx}{(a-b)x^2-(a+b)}$ $(0<b<a).$

6.77. $\int \frac{dx}{4x^2+7}.$

6.78. $\int \frac{x\,dx}{4x^2+7}.$

6.79. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6+1}}$. **6.80.** $\int \frac{a^x}{\sqrt{a^{2x}-1}} dx$.

Применяя различные приемы, найти неопределенные интегралы.

6.81*. $\int \frac{x-1}{(x+2)^2} dx$. **6.82.** $\int \frac{x^2}{3+x^2} dx$.

6.83. $\int \frac{x^2-2x+3}{x^2-4} dx$. **6.84.** $\int \frac{x\,dx}{a^2x^4-b^2}$.

6.85. $\int \frac{x^3}{9-4x^8} dx$. **6.86.** $\int \frac{x^4+1}{x^5+5x-8} dx$.

6.87. $\int x^3 \sqrt[4]{5x^4-3}\, dx$. **6.88.** $\int \left(3-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

6.89. $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-4x^2}} dx$. **6.90.** $\int \frac{a^2+\sqrt{a^2+b^2x^2}}{a^2+b^2x^2} dx$.

6.91. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{a^x}}$. **6.92.** $\int e^x \sqrt[3]{4+e^x}\, dx$.

6.93. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+4}} dx$. **6.94*.** $\int \frac{dx}{2^x+1}$.

6.95. $\int \frac{e^{\arcsin x}+x+1}{\sqrt{1-x^2}} dx$. **6.96.** $\int \frac{xe^{\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-1}} dx$.

6.97. $\int \sqrt{3-\operatorname{ch} x}\, \operatorname{sh} x\, dx$.

6.98. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln x}}$. **6.99.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln^2 x}}$.

6.100*. $\int \sin^2 x\, dx$. **6.101*.** $\int \cos^2 x\, dx$.

6.102. $\int \frac{dx}{\sin \frac{x}{\sqrt{2}}}$. **6.103.** $\int (\sin ax+\cos ax)^2 dx$.

6.104. $\int \frac{x^2}{\cos(x^3)} dx$. **6.105.** $\int \frac{(1+\cos 2x)^3}{\cos 2x} dx$.

6.106. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3-\cos^2 x}} dx$. **6.107.** $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^4 x+3}} dx$.

6.108*. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$. **6.109.** $\int \frac{dx}{\operatorname{ctg}\sqrt{3}\,x}$.

6.110. $\int \operatorname{th} ax\,dx$. **6.111.** $\int \operatorname{tg}^2(ax+b)\,dx$.

6.112. $\int x^2 \operatorname{ctg}^2(x^3-3)\,dx$. **6.113.** $\int e^{\sec x} \operatorname{tg} x \sec x\,dx$.

б) Метод подстановки. Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)\,dx$, где функция $f(x)$ определена на некотором множестве X. Введем новую переменную u формулой

$$x=\varphi(u):\ U\to X,$$

где функция $\varphi(u)$ дифференцируема на некотором множестве U и осуществляет взаимно однозначное отображение U на X, т. е. имеет обратную

$$u=\varphi^{-1}(x):\ X\to U.$$

Подставив $x=\varphi(u)$ в исходное подынтегральное выражение, получаем

$$f(x)\,dx=f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du=g(u)\,du.$$

Далее, справедливо равенство

$$\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du\big|_{u=\varphi^{-1}(x)}=\int g(u)\,du\big|_{u=\varphi^{-1}(x)},$$

т. е. вычисление интеграла $\int f(x)\,dx$ сводится к вычислению интеграла $\int g(u)\,du$ (который может оказаться проще исходного) и последующей подстановке $u=\varphi^{-1}(x)$.

Пример 5. Вычислить интеграл $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

◁ В рассматриваемом случае область определения подынтегральной функции $X=[0,+\infty)$. Произведем подстановку

$$x=\varphi(u)=u^2,\quad u\in[0,+\infty).$$

Тогда $dx=2u\,du$, $u=\varphi^{-1}(x)=\sqrt{x}$, откуда

$$\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx=2\int \frac{u^3+u}{u+1}\,du=2\int (u^2-u+2)\,du-4\int \frac{du}{u+1}=$$

$$=2\left(\frac{1}{3}u^3-\frac{1}{2}u^2+2u\right)-4\ln(u+1)+C\big|_{u=\sqrt{x}}=2\left(\frac{1}{3}x^{3/2}-\frac{1}{2}x+2x^{1/2}\right)-$$

$$-4\ln(\sqrt{x}+1)+C. \ ▷$$

Применяя указанные подстановки, найти интегралы:

6.114. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}}$, $x=(1-t^2)^{1/3}$.

6.115. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$, $x=\frac{2}{t}$.

6.116. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$, $x=t^2$.

6.117. $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx,\ x=\ln t$.

Применяя подходящие подстановки, найти интегралы:

6.118. $\int x(5x-1)^{19}\,dx$. **6.119.** $\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^x}}dx$.

6.120. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}+1}dx$. **6.121.** $\int \frac{x}{(3-x)^7}dx$.

6.122. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+e^x}}$. **6.123.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

3. Метод интегрирования по частям. Если $u(x)$ и $v(x)$ — дифференцируемые функции, то справедлива следующая формула интегрирования по частям:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx,$$

или в краткой записи

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \qquad (2)$$

Эта формула используется в тех случаях, когда подынтегральное выражение $f(x)\,dx$ можно так представить в виде $u\,dv$, что стоящий в правой части (2) интеграл при надлежащем выборе выражений u и dv может оказаться проще исходного интеграла. При этом за u удобно принимать множитель, который упрощается при дифференцировании. Например, если под знаком интеграла стоит произведение многочлена на тригонометрическую или показательную функцию, то к u следует отнести многочлен, а оставшееся выражение к dv. При этом формула (2) может применяться неоднократно.

Пример 6. Найти $\int x^2\cos x\,dx$.

◅ Полагаем $u=x^2$ и $dv=\cos x\,dx$. Тогда $du=2x\,dx$ и $v=\int\cos x\,dx=\sin x$ (постоянную C здесь полагаем равной нулю, т. е. в качестве v берем одну из первообразных). По формуле (2) имеем

$$\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x - \int 2x\sin x\,dx.$$

К стоящему справа интегралу снова применяем формулу интегрирования по частям, причем к u снова относим многочлен (т. е. $2x$). Имеем: $u=2x$, $dv=\sin x\,dx$. Отсюда

$$du=2\,dx \quad \text{и} \quad v=\int\sin x\,dx=-\cos x.$$

Применяя формулу (2), получаем окончательно:

$$\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x - \left(-2x\cos x - \int(-\cos x)2\,dx\right) =$$

$$= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C. \ ▻$$

Если подынтегральная функция содержит сомножителем логарифмическую или обратную тригонометрическую функции, то их следует принимать за u, так как в результате дифференцирования эти функции упрощаются.

Пример 7. Найти $\int \ln x\,dx$.

◁ Полагаем $u=\ln x$, $dv=dx$. Тогда $du=\frac{dx}{x}$ и $v=\int dx=x$. Подставив в формулу (2), находим

$$\int \ln x\,dx=x\ln x-\int x\cdot\frac{dx}{x}=x\ln x-x+C. \ ▷$$

Иногда после двукратного применения формулы интегрирования по частям приходим в правой части к выражению, содержащему исходный интеграл, т. е. получаем уравнение с искомым интегралом в качестве неизвестного.

Пример 8. Найти $\int e^{ax}\sin bx\,dx$.

◁ Полагаем $u=e^{ax}$, $dv=\sin bx\,dx$. Тогда $du=ae^{ax}\,dx$, $v=-\frac{1}{b}\cos bx$. Подставив в (2), имеем

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

Теперь полагаем $u=e^{ax}$, $dv=\cos bx\,dx$. Тогда $du=ae^{ax}\,dx$, $v=\frac{1}{b}\sin bx$ и

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\left(\frac{e^{ax}}{b}\sin bx-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx\right).$$

В итоге получено уравнение относительно неизвестного интеграла $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ Решая это уравнение, находим

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\sin bx\,dx=e^{ax}\frac{a\sin bx-b\cos bx}{b^2}+C_1,$$

или

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+C. \ ▷$$

Применяя формулу интегрирования по частям, найти интегралы:

6.124. $\int \arccos x\,dx$. **6.125.** $\int x\cos x\,dx$.

6.126. $\int x\ln x\,dx$. **6.127.** $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx$.

6.128. $\int (x^2-x+1)\ln x\,dx$. **6.129.** $\int x^2\sin x\,dx$.

6.130. $\int x^2e^{-x}\,dx$. **6.131.** $\int x^3e^x\,dx$.

6.132*. $\int x^3e^{-x^2}\,dx$. **6.133.** $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$.

6.134. $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$. **6.135.** $\int \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$.

6.136. $\int e^{ax}\cos bx\,dx.$ **6.137.** $\int e^{\arccos x}\,dx.$

6.138. $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx.$ **6.139.** $\int x^3\ln x\,dx.$

6.140. $\int x3^x\,dx.$ **6.141.** $\int (x^2-2x+3)\cos x\,dx.$

6.142. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}.$ **6.143.** $\int \cos(\ln x)\,dx.$

Применяя различные методы, найти интегралы:

6.144*. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx.$ **6.145.** $\int x(\operatorname{arctg} x)^2\,dx.$

6.146. $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx.$ **6.147.** $\int x\operatorname{ctg}^2 x\,dx.$

6.148. $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{e^x}\,dx.$ **6.149*.** $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx.$

6.150.** Вывести рекуррентную формулу для интеграла $I_n=\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$. Найти I_2 и I_3.

Найти интегралы:

6.151.** $\int \sqrt{x^2+a}\,dx.$ **6.152**.** $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx.$

6.153. $\int x\arcsin x\,dx.$ **6.154.** $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx.$

6.155. $\int x^2\operatorname{arctg} x\,dx.$ **6.156.** $\displaystyle\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx.$

6.157*. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$

§ 2. Интегрирование основных классов элементарных функций

1. Интегрирование рациональных дробей. Интегрирование произвольной рациональной дроби $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\dfrac{b_mx^m+\ldots+b_1x+b_0}{a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0}$ с действительными коэффициентами в общем случае производится следующим образом.

Если $m\geqslant n$, т. е. исходная дробь $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ *неправильная*, то следует предварительно выделить в этой дроби *целую часть*, т. е. представить ее в виде

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=M_{m-n}(x)+\frac{R_r(x)}{Q_n(x)}, \tag{1}$$

где $M_{m-n}(x)$ и $R_r(x)$ — многочлены степеней $m-n\geqslant 0$ и r соответственно, причем $r<n$, т. е. дробь $\dfrac{R_r(x)}{Q_n(x)}$ *правильная.*

Выделение целой части в дроби $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ производится делением числителя на знаменатель «уголком».

Пример 1. Выделить целую часть дроби

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{(x^2+1)^3}{x(x^2-2x+1)}$$

◁ Дробь неправильная, так как $m=6>n=3$. Для выделения целой части записываем числитель и знаменатель в каноническом виде:

$$(x^2+1)^3=x^6+3x^4+3x^2+1,$$
$$x(x^2-2x+1)=x^3-2x^2+x,$$

и далее, выполняя деление «уголком» первого многочлена на второй, получаем в частном $x^3+2x^2+6x+10$, а в остатке $17x^2-10x+1$. Следовательно,

$$\frac{(x^2+1)^3}{x(x^2-2x+1)}=x^3+2x^2+6x+10+\frac{17x^2-10x+1}{x^3-2x^2+x},$$

и выделение целой части закончено. ▷

Как показывает формула (1), операция выделения целой части сводит интегрирование произвольной рациональной дроби к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.

Для того чтобы проинтегрировать правильную рациональную дробь $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, $m<n$, следует предварительно разложить ее в сумму так называемых простейших дробей. Это разложение осуществляется следующим образом. Пусть знаменатель $Q_n(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ имеет действительные корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ кратностей $s_1, \ldots, s_l$ и комплексно-сопряженные пары корней $\beta_1, \bar\beta_1, \ldots, \beta_k, \bar\beta_k$ кратностей $t_1, \ldots, t_k$ соответственно $(s_1+\ldots+s_l+2t_1+\ldots+2t_k=n)$, т. е. справедливо разложение

$$Q_n(x)=a_n(x-\alpha_1)^{s_1}\ldots(x-\alpha_l)^{s_l}(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}\ldots(x^2+p_kx+q_k)^{t_k},$$

где

$$x^2+p_\nu x+q_\nu=(x-\beta_\nu)(x-\bar\beta_\nu), \quad \nu=1, \ldots, k.$$

Тогда разложение дроби $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ в сумму простейших имеет вид

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1^{(1)}}{x-\alpha_1}+\ldots+\frac{A_{s_1}^{(1)}}{(x-\alpha_1)^{s_1}}+\ldots+\frac{A_1^{(l)}}{x-\alpha_l}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{A_{s_l}^{(l)}}{(x-\alpha_l)^{s_l}}+\frac{B_1^{(1)}x+C_1^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots+\frac{B_{t_1}^{(1)}x+C_{t_1}^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{B_1^{(k)}x+C_1^{(k)}}{x^2+p_kx+q_k}+\ldots+\frac{B_{t_k}^{(k)}x+C_{t_k}^{(k)}}{(x^2+p_kx+q_k)^{t_k}}. \qquad (2)$$

Коэффициенты $A_i^{(j)}$, $B_i^{(j)}$ и $C_i^{(j)}$ в этом разложении определяются путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x у многочлена $P_m(x)$ и многочлена, который получается в числителе правой части (2) после приведения ее к общему знаменателю (метод неопределенных коэффициентов). Можно также определять эти коэффициенты, полагая в равенстве (2) или ему эквивалентном x равным подходяще подобранным числам (в первую очередь значениям действительных корней знаменателя $Q_n(x)$).

Пример 2. Дробь $\dfrac{(x+2)^2}{x(x-1)^2}$ разложить в сумму простейших.

◁ Искомое разложение имеет вид

$$\frac{(x+2)^2}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю, получаем тождественное равенство

$$x^2+4x+4=A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx. \tag{3}$$

Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях x дает систему уравнений:

$$A+B=1, \quad -2A-B+C=4, \quad A=4,$$

откуда получаем $A=4$, $B=-3$, $C=9$. Следовательно, искомое разложение имеет вид:

$$\frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}=\frac{4}{x}-\frac{3}{x-1}+\frac{9}{(x-1)^2}.$$

Можно определить коэффициенты A, B, C другим способом, полагая последовательно в тождестве (3) $x=0$, $x=1$ и, например, $x=-1$: при $x=0$ находим $A=4$, при $x=1$ получаем $C=9$, а при $x=-1$ имеем $4A+2B-C=1$, т. е. $B=-3$.

При решении этого примера лучше всего было бы комбинировать оба способа, т. е. найти $A=4$ при $x=0$, $C=9$ при $x=1$, а B определить из равенства коэффициентов при x^2 в (3), т. е. из равенства $A+B=1$. ▷

Формула (2) показывает, что интегрирование произвольной рациональной дроби сводится к интегрированию простейших дробей следующих четырех типов:

1) $\dfrac{A}{x-\alpha}$. $\quad \displaystyle\int\frac{A}{x-\alpha}dx=A\ln|x-\alpha|+C.$

2) $\dfrac{A}{(x-\alpha)^k}$ $(k=2,\ 3,\ \ldots)$. $\quad \displaystyle\int\frac{A}{(x-\alpha)^k}dx=-\frac{A}{k-1}\,\frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}}+C.$

3) $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $\quad p^2-4q<0$.

Метод интегрирования дробей этого типа рассмотрим на примере.

Пример 3. Найти $\displaystyle\int\frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx$.

◁ В рассматриваемом случае дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе, отрицателен: $p^2-4q=1-4=-3<0$, т. е. имеем дробь третьего типа. Так как $(x^2+x+1)'=2x+1$, то числитель дроби преобразуем следующим образом:

$$x-1=\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}(x^2+x+1)'-\frac{3}{2}$$

(это преобразование называется выделением в числителе производной квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе). Поэтому

$$\int\frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}\,dx-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}$$

Оставшийся интеграл находится выделением полного квадрата в квадратном трехчлене:

$$\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{d\,\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right)^2}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

В результате заданный интеграл равен

$$\int\frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C \quad ▷$$

4) $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, $p^2-4q<0$, $k=2, 3, \ldots$

Метод интегрирования дробей этого типа рассмотрим также на примере.

Пример 4. Найти $\displaystyle\int\frac{x+2}{(x^2+2x+3)^2}\,dx$.

◁ Здесь $p^2-4q=4-12=-8<0$, т. е. имеем простейшую дробь четвертого типа. Сначала выделяем в числителе производную квадратного трехчлена:

$$\int\frac{x+2}{(x^2+2x+3)^2}\,dx=\int\frac{{}^1/_2(x^2+2x+3)'+1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx=$$

$$=-\frac{1}{2(x^2+2x+3)}+\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}.$$

Для вычисления оставшегося интеграла предварительно приведем его к стандартному виду, выделяя полный квадрат в квадратном трехчлене:

$$\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}=\int\frac{dx}{((x+1)^2+2)^2}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{d\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{du}{(1+u^2)^2}\Bigg|_{u=\frac{x+1}{\sqrt{2}}}.$$

Далее используем метод интегрирования по частям:

$$\int\frac{du}{(1+u^2)^2}=\int\frac{1+u^2-u^2}{(1+u^2)^2}du=\int\frac{du}{1+u^2}-\int\frac{u^2du}{(1+u^2)^2}=$$

$$=\operatorname{arctg}u+\frac{1}{2}\int u\,d\left(\frac{1}{1+u^2}\right)=\operatorname{arctg}u+\frac{1}{2}\frac{u}{1+u^2}-$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}u+C=\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}u+\frac{u}{1+u^2}\right)+C.$$

Окончательно получаем:

$$\int\frac{x+2}{(x^2+2x+3)^2}dx=-\frac{1}{2(x^2+2x+3)}+$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4}\frac{x+1}{x^2+2x+3}+C\quad\rhd$$

В общем случае $k>2$ рассмотренный в примере 4 прием позволяет свести вычисление интеграла $\int(1+u^2)^{-k}du$ к вычислению интеграла $\int(1+u^2)^{-k+1}du$, т. е. дает рекуррентный метод вычисления интегралов этого типа.

Проиллюстрируем метод интегрирования рациональных дробей в целом на следующем примере.

Пример 5. Найти $\int\frac{dx}{x(x^2+1)^2}$.

$\lhd$ Дробь $\frac{1}{x(x^2+1)^2}$ правильная, ее разложение в сумму простейших дробей имеет вид

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Имеем

$$1=A(x^2+1)^2+Bx^2(x^2+1)+Cx(x^2+1)+Dx^2+Ex.$$

Полагая $x=0$, находим $A=1$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем $0=A+B$, $0=C$, $0=2A+B+D$, $0=C+E$, т. е.

$$B=-1,\quad C=0,\quad D=-1\quad \text{и}\quad E=0.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2} \right) dx =$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + C.$$

Заметим, что разложение дроби $\frac{1}{x(x^2+1)^2}$ на простейшие можно получить и не применяя метода неопределенных коэффициентов, а именно

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{(1+x^2)-x^2}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x(x^2+1)} - \frac{x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{(1+x^2)-x^2}{x(x^2+1)} - \frac{x}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2}. \quad \triangleright$$

Найти интегралы:

6.158. $\int \frac{dx}{x^2+4x-5}$.

6.159. $\int \frac{dx}{2x^2-4x+5}$.

6.160. $\int \frac{x\,dx}{x^2-5x+4}$.

6.161. $\int \frac{x\,dx}{x^2-3x+3}$.

6.162. $\int \frac{dx}{x^2-6x}$.

6.163. $\int \frac{4x-3}{x^2-2x+6}\,dx$.

6.164. $\int \frac{x\,dx}{x^4+6x^2+13}$.

6.165. $\int \frac{3^x\,dx}{3^{2x}-4\cdot 3^x+3}$.

6.166. $\int \frac{dx}{(x-3)(x+4)}$.

6.167. $\int \frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x}\,dx$.

6.168. $\int \frac{x^3+2}{x^3-4x}\,dx$.

6.169. $\int \frac{x^4+3x^3+3x^2-5}{x^3+3x^2+3x+1}\,dx$.

6.170. $\int \frac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)}\,dx$.

6.171. $\int \frac{2x-5}{(x^2-5x+4)^3}\,dx$.

6.172. $\int \frac{dx}{x(x^2+2)}$.

6.173. $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

6.174*. $\int \frac{(x-1)\,dx}{(x^2+1)^3}$.

6.175*. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x^2+x+1)^2}$.

6.176. $\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)}$.

6.177. $\int \frac{x^2-x+4}{(x+1)(x-2)(x-3)}\,dx$.

6.178. $\int \frac{dx}{x^3+8}$.

6.179. $\int \frac{5x-13}{(x^2-5x+6)^2}\,dx$.

6.180. $\int \frac{x^4+1}{x^4-1}\,dx.$ **6.181.** $\int \frac{dx}{x^4+2x^2+1}.$

Найти интегралы, не применяя метода неопределенных коэффициентов:

6.182*. $\int \frac{dx}{x^4+a^2x^2}.$ **6.183*.** $\int \frac{dx}{x^4-a^4}.$

6.184. $\int \frac{dx}{x^4-4x^2+3}.$ **6.185*.** $\int \frac{dx}{x(x^6+1)^2}.$

6.186. $\int \frac{dx}{x^7+x^5}.$ **6.187*.** $\int \frac{x^7}{(x^4+1)(x^4-2)}\,dx.$

6.188. $\int \frac{x^2-x}{(x+1)^9}\,dx.$ **6.189.** $\int \frac{x^5+x^2}{x^9+x^3-2}\,dx.$

2. Интегрирование тригонометрических и гиперболических функций.
а) Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$.

Если хотя бы одно из чисел m или n — нечетное положительное целое число, то, отделяя от нечетной степени один сомножитель и выражая с помощью формулы $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ оставшуюся четную степень через дополнительную функцию, приходим к табличному интегралу.

Пример 6. Найти $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[4]{\cos x}}\,dx.$

◁ Имеем:

$$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[4]{\cos x}}\,dx=\int \frac{\sin^2 x}{\sqrt[4]{\cos x}}\sin x\,dx=-\int \frac{1-\cos^2 x}{\sqrt[4]{\cos x}}\,d\cos x=$$

$$=-\int \frac{d\cos x}{\sqrt[4]{\cos x}}+\int \frac{\cos^2 x}{\sqrt[4]{\cos x}}\,d\cos x=-\frac{4}{3}\sqrt[4]{\cos^3 x}+\frac{4}{11}\sqrt[4]{\cos^{11} x}+C. \ ▷$$

Если же m и n — четные неотрицательные числа, то степени понижаются посредством перехода к двойному аргументу с помощью тригонометрических формул:

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

Пример 7. Найти $\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx$.

◁ Имеем:

$$\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx=\int (\sin x\cos x)^2\cos^2 x\,dx=$$

$$=\int \frac{\sin^2 2x}{4}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx=\frac{1}{8}\int \sin^2 2x\,dx+\frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cdot\cos 2x\,dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2}\,dx+\frac{1}{16}\int \sin^2 2x\,d\sin 2x=\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}+C. \ ▷$$