6.180. $\int \frac{x^4+1}{x^4-1}dx.$ **6.181.** $\int \frac{dx}{x^4+2x^2+1}.$

Найти интегралы, не применяя метода неопределенных коэффициентов:

6.182*. $\int \frac{dx}{x^4+a^2x^2}.$ **6.183*.** $\int \frac{dx}{x^4-a^4}.$

6.184. $\int \frac{dx}{x^4-4x^2+3}.$ **6.185*.** $\int \frac{dx}{x(x^6+1)^2}.$

6.186. $\int \frac{dx}{x^7+x^5}.$ **6.187*.** $\int \frac{x^7}{(x^4+1)(x^4-2)}dx.$

6.188. $\int \frac{x^2-x}{(x+1)^9}dx.$ **6.189.** $\int \frac{x^5+x^2}{x^9+x^3-2}dx.$

2. Интегрирование тригонометрических и гиперболических функций. а) Интегралы вида $\int \sin^m x\cos^n x\,dx$

Если хотя бы одно из чисел m или n — нечетное положительное целое число, то, отделяя от нечетной степени один сомножитель и выражая с помощью формулы $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ оставшуюся четную степень через дополнительную функцию, приходим к табличному интегралу.

Пример 6. Найти $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[4]{\cos x}}dx.$

◁ Имеем:

$$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[4]{\cos x}}dx=\int \frac{\sin^2 x}{\sqrt[4]{\cos x}}\sin x\,dx=-\int \frac{1-\cos^2 x}{\sqrt[4]{\cos x}}d\cos x=$$

$$=-\int \frac{d\cos x}{\sqrt[4]{\cos x}}+\int \frac{\cos^2 x}{\sqrt[4]{\cos x}}d\cos x=-\frac{4}{3}\sqrt[4]{\cos^3 x}+\frac{4}{11}\sqrt[4]{\cos^{11} x}+C. \ ▷$$

Если же m и n — четные неотрицательные числа, то степени понижаются посредством перехода к двойному аргументу с помощью тригонометрических формул:

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

Пример 7. Найти $\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx$

◁ Имеем:

$$\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx=\int (\sin x\cos x)^2\cos^2 x\,dx=$$

$$=\int \frac{\sin^2 2x}{4}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{8}\int \sin^2 2x\,dx+\frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cdot\cos 2x\,dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx+\frac{1}{16}\int \sin^2 2x\,d\sin 2x=\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}+C. \ ▷$$

Если $m+n=-2k$, $k \in \mathbf{N}$, т. е. $m+n$ является целым четным отрицательным числом, то целесообразно использовать подстановки $\operatorname{tg} x=t$ и $\operatorname{ctg} x=t$.

Пример 8. Найти $\int \sin^{1/3} x \cos^{-13/3} x\, dx$.

◁ Так как $\frac{1}{3}-\frac{13}{3}=-4$, то вычисление интеграла сводится к интегрированию степеней тангенса:

$$\int \sin^{1/3} x \cos^{-13/3} x\, dx=\int \operatorname{tg}^{1/3} x \cdot \frac{dx}{\cos^4 x}=$$

$$=\int \operatorname{tg}^{1/3} x\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right) \frac{dx}{\cos^2 x}=\int \operatorname{tg}^{1/3} x\, d \operatorname{tg} x+$$

$$+\int \operatorname{tg}^{7/3} x\, d \operatorname{tg} x=\frac{3}{4} \operatorname{tg}^{4/3} x+\frac{3}{10} \operatorname{tg}^{10/3} x+C. \ ▷$$

Для вычисления интегралов вида $\int \operatorname{tg}^m x\, dx$, $\int \operatorname{ctg}^m x\, dx$, где $m=2, 3, \ldots$, используются тригонометрические формулы

$$\operatorname{tg}^2 x=\sec^2 x-1, \quad \operatorname{ctg}^2 x=\operatorname{cosec}^2 x-1.$$

Пример 9. Вычислить $\int \operatorname{ctg}^4 x\, dx$.

◁ Имеем:

$$\int \operatorname{ctg}^4 x\, dx=\int \operatorname{ctg}^2 x\left(\operatorname{cosec}^2 x-1\right) dx=$$

$$=-\int \operatorname{ctg}^2 x\, d \operatorname{ctg} x-\int\left(\operatorname{cosec}^2 x-1\right) dx=$$

$$=-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}+\operatorname{ctg} x+x+C. \ ▷$$

В общем случае интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$, где m и n — целые числа, вычисляются с помощью рекуррентных формул, которые выводятся путем интегрирования по частям.

Пример 10. Вывести рекуррентную формулу для $\int \frac{dx}{\cos^{2k+1} x}$ и с ее помощью найти $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$.

◁ Имеем:

$$I_{2k+1}=\int \frac{dx}{\cos^{2k+1} x}=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^{2k+1} x} dx=$$

$$=\int \frac{\sin^2 x}{\cos^{2k+1} x} dx+\int \frac{dx}{\cos^{2k-1} x}=\int \sin x \frac{\sin x}{\cos^{2k+1} x} dx+I_{2k-1}.$$

Полагаем $u=\sin x$, $dv=\frac{\sin x}{\cos^{2k+1} x} dx$. Тогда $du=\cos x\, dx$, $v=\frac{1}{2k \cos^{2k} x}$, и интегрированием по частям получаем

$$I_{2k+1}=\frac{\sin x}{2k \cos^{2k} x}-\frac{1}{2k} \int \frac{dx}{\cos^{2k-1} x}+I_{2k-1},$$

или

$$I_{2k+1}=\frac{\sin x}{2k\cos^{2k} x}+\left(1-\frac{1}{2k}\right)I_{2k-1}$$

(рекуррентная формула).

В частности, при $k=1$ имеем

$$I_3=\int\frac{dx}{\cos^3 x}=\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\cos x}=\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x+\sec x|+C. \ \rhd$$

Найти интегралы:

6.190. $\int\sin^3 x\,dx.$ **6.191.** $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^8 x}dx.$

6.192. $\int\cos^7 x\,dx$ **6.193.** $\int\cos^4\frac{x}{2}dx.$

6.194. $\int\sin^2 x\cos^2 x\,dx.$ **6.195.** $\int\cos^2 x\sin^4 x\,dx.$

6.196. $\int\frac{dx}{\sin^6 x}.$ **6.197.** $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx.$

6.198. $\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x}.$ **6.199.** $\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}.$

6.200. $\int\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x\cos x}dx.$ **6.201.** $\int\frac{dx}{\cos^5 x}.$

6.202. $\int\operatorname{tg}^3 x\,dx.$ **6.203.** $\int\left(\operatorname{ctg}^3\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}^4\frac{x}{2}\right)dx.$

6.204. $\int\frac{dx}{\sqrt{\cos x\sin^3 x}}.$ **6.205.** $\int\cos^5 x\,dx$

6.206. $\int\frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx$ **6.207.** $\int\sin^6 2x\,dx.$

6.208. $\int\frac{dx}{\cos^4 x}.$ **6.209.** $\int\frac{dx}{\cos\frac{x}{3}\sin^3\frac{x}{3}}.$

6.210. $\int\frac{dx}{\sin^3 x}.$ **6.211.** $\int\cos x\cos^2 2x\,dx.$

б) Для интегрирования произведений синусов и косинусов различных аргументов применяются следующие тригонометрические формулы:

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)).$$

Пример 11. Найти $\int\cos 9x\cos 5x\,dx$.

◁ Имеем

$$\int\cos 9x\cos 5x\,dx=\frac{1}{2}\int(\cos 4x+\cos 14x)\,dx=\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{28}\sin 14x+C. \ ▷$$

Найти интегралы:

6.212. $\int\sin 3x\cos 5x\,dx$. **6.213.** $\int\sin 10x\sin 15x\,dx$.

6.214. $\int\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\,dx$. **6.215.** $\int\sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3}\,dx$.

6.216. $\int\cos x\cos^2 3x\,dx$. **6.217.** $\int\sin x\sin 2x\sin 3x\,dx$.

в) Интегралы вида

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx,$$

где $R(u,\ v)$ — рациональная функция двух переменных, приводятся к интегралам от рациональной функции нового аргумента t подстановкой $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. При этом используются формулы

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример 12. Найти $\int\frac{dx}{4\cos x+3\sin x+5}$.

◁ Полагаем $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Тогда

$$\int\frac{dx}{4\cos x+3\sin x+5}=2\int\frac{dt}{\left(4\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+3\cdot\frac{2t}{1+t^2}+5\right)(1+t^2)}=$$

$$=2\int\frac{dt}{t^2+6t+9}=2\int\frac{dt}{(t+3)^2}=-\frac{2}{t+3}+C=-\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3}+C. \ ▷$$

Если под интегралом $\sin x$ и $\cos x$ содержатся только в четных степенях, то удобнее использовать подстановку $\operatorname{tg}x=t$.

Пример 13. Найти $\int\frac{dx}{1-5\sin^2 x}$.

◁ Разделив числитель и знаменатель на $\cos^2 x$ и используя подстановку $\operatorname{tg} x = t$, получим:

$$\int \frac{dx}{1-5\sin^2 x} = \int \frac{d\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg}^2 x} = \int \frac{dt}{1-4t^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+2t}{1-2t}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+2\operatorname{tg} x}{1-2\operatorname{tg} x}\right| + C. \ ▷$$

Найти интегралы:

6.218. $\int \frac{dx}{3\cos x + 2}$. **6.219.** $\int \frac{dx}{3-2\sin x+\cos x}$.

6.220*. $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx$. **6.221.** $\int \frac{dx}{4\sin^2 x - 7\cos^2 x}$.

6.222. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x - 2\cos x + 5}\,dx$. **6.223.** $\int \frac{\sin 2x}{1+4\cos^2 x}\,dx$.

6.224. $\int \frac{dx}{2-\sin x}$. **6.225*.** $\int \frac{dx}{(\sin x+4)(\sin x-1)}$.

6.226. $\int \frac{1+\operatorname{ctg} x}{1-\operatorname{ctg} x}\,dx$. **6.227.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 8\sin x\cos x + 12\cos^2 x}$.

г) Интегрирование гиперболических функций производится аналогично интегрированию тригонометрических функций, причем используются следующие формулы:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2x,$$

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1), \quad \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1),$$

$$1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad \operatorname{cth}^2 x - 1 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Найти интегралы:

6.228. $\int \operatorname{ch}^2 3x\,dx$. **6.229.** $\int \operatorname{sh}^3 2x\,dx$.

6.230. $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x\,dx$. **6.231.** $\int \operatorname{ch}^4 x\,dx$.

6.232. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x}$. **6.233*.** $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x - 4\operatorname{ch}^2 x}$.

6.234*. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x - 1}$. **6.235.** $\int \sqrt{\operatorname{ch} x + 1}\,dx$.

6.236. $\int \operatorname{cth}^3 x\,dx$. **6.237.** $\int \operatorname{th}^4 x\,dx$.

3. Интегрирование некоторых иррациональных функций. а) Интегралы вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\right) dx,$$

где $R(x, y, z, \ldots)$ — рациональная функция своих аргументов, m_1, n_1, m_2, n_2, ... — целые числа, вычисляются с помощью подстановки $\dfrac{ax+b}{cx+d}=t^s$, где s — общий знаменатель дробей $\dfrac{m_1}{n_1}$, $\dfrac{m_2}{n_2}$, ...

Пример 14. Найти $\displaystyle\int\frac{dx}{(\sqrt[4]{x+3}-1)\sqrt{x+3}}$.

◁ Производим подстановку $x+3=t^4$. Тогда $dx=4t^3\,dt$, и, следовательно,

$$\int\frac{dx}{(\sqrt[4]{x+3}-1)\sqrt{x+3}}=4\int\frac{t^3\,dt}{(t-1)t^2}=4\int\frac{t\,dt}{t-1}=4\int\frac{(t-1)+1}{t-1}\,dt=$$

$$=4(t+\ln|t-1|)+C=4(\sqrt[4]{x+3}+\ln|\sqrt[4]{x+3}-1|+C. \ \triangleright$$

Найти интегралы:

6.238. $\displaystyle\int\frac{dx}{(5+x)\sqrt{1+x}}$. **6.239.** $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{2x-3}}$.

6.240. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$. **6.241.** $\displaystyle\int\frac{\sqrt[6]{x+a}-1}{(x+a)(1+\sqrt[3]{x+a})}\,dx$.

6.242. $\displaystyle\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{dx}{(x-1)^3}$. **6.243.** $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt[4]{x^3}}$.

6.244. $\displaystyle\int\frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+4)\sqrt{x}}$. **6.245.** $\displaystyle\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$.

б) Вычисление интегралов вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx,$$

где R — рациональная функция двух аргументов, производится с помощью тригонометрических подстановок следующим образом. Выделением полного квадрата в квадратном трехчлене и последующей заменой переменной $u=x+\dfrac{b}{2a}$ исходный интеграл приводится к интегралу одного из следующих трех типов:

1) $\int R(u, \sqrt{l^2-u^2})\,du$,

2) $\int R(u, \sqrt{l^2+u^2})\,du$,

3) $\int R(u, \sqrt{u^2-l^2})\,du$.

Последние интегралы тригонометрической или гиперболической подстановкой соответственно

1) $u=l\sin t$ или $u=l\,\mathrm{th}\,t$,

2) $u=l\,\mathrm{tg}\,t$ или $u=l\,\mathrm{sh}\,t$,

3) $u=l\sec t$ или $u=l\,\mathrm{ch}\,t$

приводятся к интегралам вида $\int R(\sin t, \cos t)\,dt$ или $\int R(\mathrm{sh}\,t, \mathrm{ch}\,t)\,dt$.

Пример 15. Найти $\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$.

◅ Производим подстановку $x=a\,\mathrm{ch}\,t$. Тогда $dx=a\,\mathrm{sh}\,t\,dt$, $\sqrt{x^2-a^2}=a\,\mathrm{sh}\,t$, и далее

$$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=a^2\int\mathrm{sh}^2\,t\,dt=\frac{a^2}{2}\int(\mathrm{ch}\,2t-1)\,dt=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\mathrm{sh}\,2t}{2}-t\right)+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}(\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t-t)+C=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C. ▻$$

Пример 16. Найти $\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+7)^3}}$.

◅ Выделяя полный квадрат в квадратном трехчлене, имеем

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+7)^3}}=\int\frac{du}{\sqrt{(u^2+3)^3}},\quad \text{где}\quad u=x+2.$$

Производя теперь подстановку $u=\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,t$, $du=\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}dt$, $\sqrt{u^2+3}=$ $=\sqrt{3}\sec t$, получаем:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+3)^3}}=\int\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t\sqrt{3^3}\sec^3 t}\,dt=\frac{1}{3}\int\cos t\,dt=$$

$$=\frac{1}{3}\sin t+C=\frac{1}{3}\frac{u}{\sqrt{u^2+3}}=\frac{1}{3}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+7}}+C. ▻$$

При вычислении интегралов вида

$$\int\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

следует предварительно выделить в числителе производную квадратного трехчлена.

Пример 17. Найти $\int\frac{x-1}{\sqrt{1-4x-x^2}}\,dx$.

◁ Имеем

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{1-4x-x^2}}\,dx=\int \frac{-\frac{1}{2}(-2x-4)-3}{\sqrt{1-4x-x^2}}\,dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int \frac{(1-4x-x^2)'}{\sqrt{1-4x-x^2}}\,dx-3\int \frac{dx}{\sqrt{5-(x+2)^2}}=$$

$$=-\sqrt{1-4x-x^2}-3\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{5}}+C.$$

Заметим, что в этом примере нет необходимости производить тригонометрическую подстановку, так как выделение полного квадрата сразу приводит к табличному интегралу. ▷

Интегралы вида $\int \frac{dx}{(mx+n)^r\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(r=1, 2)$ сводятся к рассмотренным выше интегралам с помощью подстановки $mx+n=\frac{1}{t}$.

Пример 17. Найти $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-1}}$.

◁ Полагаем $x=\frac{1}{t}$. Тогда $dx=-\frac{dt}{t^2}$, $\sqrt{x^2-2x-1}=\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}-1}=$ $=\frac{\sqrt{1-2t-t^2}}{t}$ и

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-1}}=-\int \frac{dt}{t^2\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{\sqrt{1-2t-t^2}}{t}}=-\int \frac{dt}{\sqrt{2-(t+1)^2}}=$$

$$=-\arcsin\frac{t+1}{\sqrt{2}}+C=-\arcsin\frac{\frac{1}{x}+1}{\sqrt{2}}+C=-\arcsin\frac{x+1}{x\sqrt{2}}+C. \ ▷$$

Найти интегралы:

6.246. $\int \frac{dx}{(x^2-3)\sqrt{4-x^2}}$. **6.247.** $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x+\sqrt{x^2+1})}$.

6.248. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$. **6.249.** $\int \frac{x^3}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$.

6.250. $\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}}$. **6.251.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$.

6.252. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-6x-3x^2}}$. **6.253.** $\int \frac{x+4}{\sqrt{2-x-x^2}}\,dx$.

6.254. $\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+1}}\,dx.$

6.255. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx.$

6.256. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+8x+1}}.$

6.257. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{6x-x^2-5}}.$

6.258. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x+2x^2}}.$

6.259. $\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+5}}.$

6.260. $\int \sqrt{1-2x-x^2}\,dx.$

6.261. $\int \sqrt{(3-2x-x^2)^3}\,dx.$

6.262. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2+1)^5}}.$

6.263. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\,dx.$

6.264. $\int \sqrt{x^2-2x+10}\,dx.$

6.265. $\int \sqrt{4x-x^2}\,dx.$

6.266. $\int \frac{\sqrt{x^2+5}}{x^2}\,dx.$

6.267. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx.$

6.268. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+9)^3}}.$

6.269. $\int \sqrt{(x^2-1)^3}\,dx.$

§ 3. Смешанные задачи на интегрирование

Найти интегралы.

6.270. $\int \frac{x+3}{x^2+2x+4}\,dx.$

6.271. $\int \frac{x^3}{x^2-x-1}\,dx.$

6.272. $\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)}.$

6.273. $\int \frac{dx}{(x^3-1)^2}.$

6.274. $\int \frac{dx}{x^5(x^4+1)^2}.$

6.275. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+x+2}}.$

6.276. $\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{6+4\ln x-\ln^2 x}}.$

6.277. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+8x+4}}.$

6.278. $\int x\sqrt{x^2-4}\,dx.$

6.279. $\int x\sqrt{x^2+4x-5}\,dx.$

6.280. $\int \sqrt{x^2+4x+5}\,dx.$

6.281. $\int \frac{dx}{(x^2+9)\sqrt{16-x^2}}.$

6.282. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+16}}.$

6.283. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}.$

6.284. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+1}$.

6.285. $\int \frac{1}{(1+x)^2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$.

6.286. $\int \frac{\sin x}{1-\sin x}\,dx$.

6.287. $\int \frac{x\,dx}{1+\cos x}$.

6.288. $\int \frac{\cos x}{(1-\sin x)^4}\,dx$.

6.289. $\int \frac{dx}{2+\cos x}$.

6.290. $\int \frac{dx}{3-4\sin^2 x}$.

6.291. $\int \frac{2-\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$.

6.292. $\int \frac{\sec x \operatorname{tg} x}{\sqrt{5-\sec^2 x}}\,dx$.

6.293. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x+5}\,dx$.

6.294. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^5 x}$.

6.295. $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$.

6.296. $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$.

6.297. $\int x \sin x \cos 2x\,dx$.

6.298. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}$.

6.299. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x+\operatorname{ch}^2 x}$.

6.300. $\int \operatorname{th}^5 x\,dx$.

6.301. $\int \frac{\operatorname{ch}\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}\,dx$.

6.302. $\int \frac{x\,dx}{\operatorname{ch}^2 x}$.

6.303. $\int \sin^2(\ln x)\,dx$.

6.304. $\int xe^{2x}\,dx$.

6.305. $\int xe^{-x^2}\,dx$.

6.306. $\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+4e^x-5}$.

6.307. $\int \frac{(a^x-b^x)^2}{a^x b^x}\,dx$.

6.308. $\int e^{\arcsin x}\,dx$.

6.309. $\int \sqrt{e^x-1}\,dx$

6.310. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

6.311. $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}\,dx$.

6.312. $\int \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$.

6.313. $\int x(1+x^2)\operatorname{arctg} x\,dx$.

6.314. $\int \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2}\,dx$.

6.315. $\int x\ln(4+x^4)\,dx$.

6.316. $\int x\sqrt{x^2+1}\ln\sqrt{x^2-1}\,dx.$

6.317. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

6.318. $\int x^x(1+\ln x)\,dx.$ **6.319.** $\int \frac{\operatorname{arctg} e^{x/2}}{e^{x/2}(1+e^x)}\,dx.$

§ 4. Определенный интеграл и методы его вычисления

1. Определенный интеграл как предел интегральной суммы. Если функция $f(x)$ определена на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$ и $a=x_0<x_1<x_2<\ldots$ $\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ — произвольное разбиение этого отрезка на n частей (рис. 48), то *интегральной суммой* функции $f(x)$ на $[a, b]$ называется сумма вида

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k,$$

где $x_{k-1}\leqslant\xi_k\leqslant x_k$, $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, $k=1, 2, 3, \ldots, n$. Геометрически S_n есть алгебраическая сумма площадей прямоугольников, имеющих основания Δx_k и высоты $f(\xi_k)$.

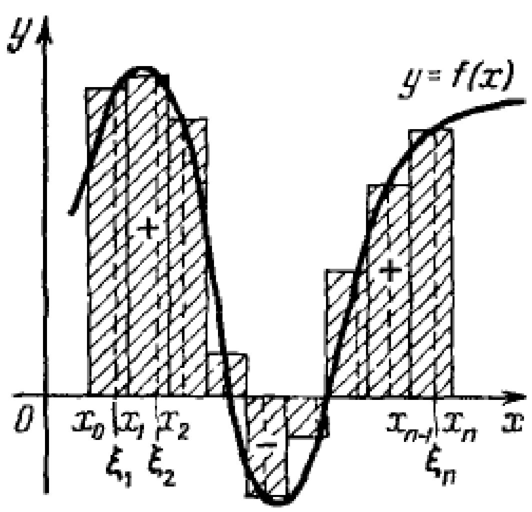

Рис. 48

Если определенная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ такова, что существует конечный предел последовательности интегральных сумм S_n при условии, что наибольшая из разностей Δx_k стремится к нулю, причем этот предел не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на отрезки $[x_{k-1}, x_k]$, ни от выбора точек ξ_k на этих отрезках, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на отрезке $[a, b]$, а сам предел называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ в пределах от a до b и обозначается символом $\int_a^b f(x)\,dx$. Таким образом,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\max\Delta x_k\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k. \qquad (1)$$

Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема на этом отрезке.

Геометрически определенный интеграл (1) представляет собой алгебраическую сумму площадей фигур, ограниченных графиком функции $y=f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$, причем площади, расположенные выше оси Ox, входят в эту сумму со знаком плюс, а площади, расположенные ниже оси Ox, — со знаком минус.

Пример 1. Вычислить $\int_1^2 x^2\,dx$, рассматривая определенный интеграл как предел интегральных сумм.