6.316. $\int x\sqrt{x^2+1}\ln\sqrt{x^2-1}\,dx.$

6.317. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

6.318. $\int x^x(1+\ln x)\,dx.$ **6.319.** $\int \frac{\operatorname{arctg} e^{x/2}}{e^{x/2}(1+e^x)}\,dx.$

§ 4. Определенный интеграл и методы его вычисления

1. Определенный интеграл как предел интегральной суммы. Если функция $f(x)$ определена на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ и $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$ $\ldots < x_{n-1} < x_n = b$ — произвольное разбиение этого отрезка на n частей (рис. 48), то *интегральной суммой* функции $f(x)$ на $[a, b]$ называется сумма вида

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k,$$

где $x_{k-1} \leqslant \xi_k \leqslant x_k$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. Геометрически S_n есть алгебраическая сумма площадей прямоугольников, имеющих основания Δx_k и высоты $f(\xi_k)$.

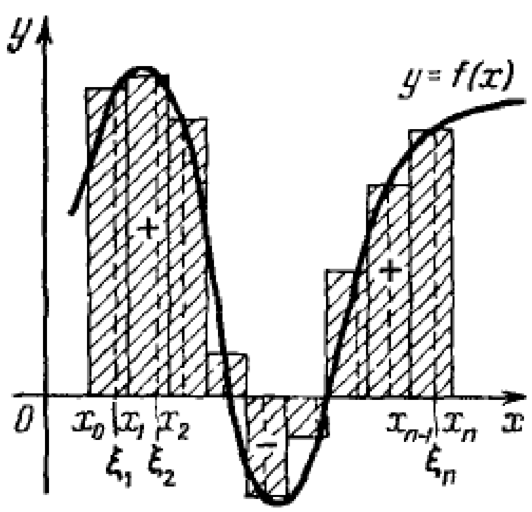

Рис. 48

Если определенная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ такова, что существует конечный предел последовательности интегральных сумм S_n при условии, что наибольшая из разностей Δx_k стремится к нулю, причем этот предел не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на отрезки $[x_{k-1}, x_k]$, ни от выбора точек ξ_k на этих отрезках, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на отрезке $[a, b]$, а сам предел называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ в пределах от a до b и обозначается символом $\int_a^b f(x)\,dx$. Таким образом,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k. \qquad (1)$$

Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема на этом отрезке.

Геометрически определенный интеграл (1) представляет собой алгебраическую сумму площадей фигур, ограниченных графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, причем площади, расположенные выше оси Ox, входят в эту сумму со знаком плюс, а площади, расположенные ниже оси Ox,— со знаком минус

Пример 1. Вычислить $\int_1^2 x^2\,dx$, рассматривая определенный интеграл как предел интегральных сумм.

◁ 1-й способ. Разделим отрезок интегрирования $[1, 2]$ на n равных частей длины $\Delta x = \frac{1}{n}$. Точки деления

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1 + \frac{1}{n}, \quad x_2 = 1 + \frac{2}{n}, \ldots, x_{n-1} = 1 + \frac{n-1}{n}, \quad x_n = 2.$$

В качестве точек ξ_k выберем, например, левые концы каждого частичного отрезка. Тогда

$$f(x_0) = 1, \quad f(x_1) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2, \quad f(x_2) = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2, \ldots, f(x_{n-1}) = \left(1 + \frac{n-1}{n}\right)^2.$$

Следовательно,

$$S_n = \frac{1}{n}\left(1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(1 + \frac{n-1}{n}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n^3}\left(n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + \ldots + (2n-1)^2\right) = \frac{1}{n^3}\left(\sum_{k=1}^{2n-1} k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k^2\right)$$

Применяя формулу суммы квадратов целых чисел

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

находим

$$S_n = \frac{1}{n^3}\left(\frac{(2n-1)2n(4n-1)}{6} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right) = \frac{14n^2 - 9n + 1}{6n^2},$$

откуда

$$\int_1^2 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{14n^2 - 9n + 1}{6n^2} = \frac{7}{3}.$$

2-й способ. Разобьем отрезок $[1, 2]$ на части так, чтобы абсциссы точек деления образовали геометрическую прогрессию.

$$x_0 = 1, \quad x_1 = q, \quad x^2 = q^2, \ldots, x_{n-1} = q^{n-1}, \quad x_n = q^n = 2,$$

где $q = 2^{1/n}$. Точку ξ_k выберем на левом конце k-го отрезка. Тогда

$$f(x_0) = 1, \quad f(x_1) = q^2, \quad f(x_2) = q^4, \ldots, f(x_{n-1}) = q^{2(n-1)},$$

$$\Delta x_1 = q - 1, \quad \Delta x_2 = q^2 - q = q(q-1), \quad \Delta x_3 = q^2(q-1), \ldots, \Delta x_n = q^{n-1}(q-1),$$

$$S_n = 1 \cdot (q-1) + q^3(q-1) + q^6(q-1) + \ldots + q^{3(n-1)}(q-1) =$$

$$= (q-1)(1 + q^3 + q^6 + \ldots + q^{3(n-1)}) = (q-1)\frac{q^{3n}-1}{q^3-1} = \frac{q^{3n}-1}{q^2+q+1} =$$

$$= \frac{2^3-1}{2^{2/n}+2^{1/n}+1} = \frac{7}{2^{2/n}+2^{1/n}+1}$$

Следовательно,

$$\int\limits_1^2 x^2 dx = \lim_{n \to \infty} \frac{7}{2^{2/n} + 2^{1/n} + 1} = \frac{7}{3}. \;\rhd$$

Вычислить определенные интегралы, рассматривая их как пределы соответствующих интегральных сумм:

6.320*. $\int\limits_0^5 (1+x)\,dx.$ **6.321*.** $\int\limits_0^{\pi/2} \cos x\,dx.$

6.322*. $\int\limits_0^{10} e^x\,dx.$ **6.323*.** $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x^2}.$

2. Вычисление простейших интегралов с помощью формулы Ньютона — Лейбница. Если $F'(x)$ — одна из первообразных непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$, то справедлива следующая *формула Ньютона — Лейбница:*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}.$

$\lhd$ Имеем

$$\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} = \int\limits_e^{e^2} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x|\Big|_e^{e^2} = \ln(\ln e^2) - \ln(\ln e) = \ln 2 \approx 0{,}69. \;\rhd$$

Используя формулу Ньютона — Лейбница, вычислить интегралы:

6.324. $\int\limits_{-1}^2 x^3\,dx.$ **6.325.** $\int\limits_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$

6.326. $\int\limits_1^2 (3x^2 - 2x + 1)\,dx.$ **6.327.** $\int\limits_0^1 (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})\,dx.$

6.328. $\int\limits_1^8 \frac{2 + 5\sqrt[3]{x}}{x^3}\,dx.$ **6.329.** $\int\limits_2^9 \sqrt[3]{x-1}\,dx.$

6.330. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \sin x\,dx.$ **6.331.** $\int\limits_{-\pi/4}^{0} \frac{dx}{\cos^2 x}.$

6.332. $\int\limits_1^2 e^x\,dx.$

6.333. $\int\limits_0^3 2^x\,dx.$

6.334. $\int\limits_2^5 \frac{dx}{x}.$

6.335. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{2x-1}.$

6.336. $\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{1+x^6}.$

6.337. $\int\limits_0^{\pi/4} \sin^2\varphi\,d\varphi.$

6.338. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{tg}^4 x\,dx.$

6.339. $\int\limits_0^2 \operatorname{sh}^3 x\,dx.$

6.340. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{4x^2+4x+5}.$

6.341. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$

6.342. $\int\limits_3^4 \frac{x^2+3}{x-2}\,dx.$

6.343. $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x^3-x^2}\,dx.$

6.344. $\int\limits_1^2 \frac{e^{1/x^2}}{x^3}\,dx.$

6.345. $\int\limits_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx.$

6.346. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}.$

6.347. $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^3\alpha\,d\alpha.$

6.348. $\int\limits_0^{1/3} \operatorname{ch}^2 3x\,dx.$

6.349. $\int\limits_2^3 \frac{dy}{y^2-2y-8}.$

6.350. $\int\limits_{3/4}^2 \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}.$

6.351. $\int\limits_0^2 \frac{2x-1}{2x+1}\,dx.$

6.352. $\int\limits_0^1 \frac{x^2+3x}{(x+1)(x^2+1)}\,dx.$

С помощью определенных интегралов найти пределы сумм:

6.353.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ \dots\ +\frac{n}{n^2+n^2}\right).$

6.354. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\left(1+\cos\frac{\pi}{2n}+\cos 2\frac{\pi}{2n}+\ldots+\cos(n-1)\frac{\pi}{2n}\right)$.

6.355. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$.

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

6.356. $y=\frac{1}{2}x^2,\ \ y=0,\ \ x=2,\ \ x=3.$

6.357. $y=\sqrt[3]{x},\ \ y=0,\ \ x=1,\ \ x=8.$

6.358. $y=6-x-2x^2,\ \ y=x+2.$

6.359. $y=\frac{x^2}{4},\ \ y=2\sqrt{x}.$

6.360. $y=\cos x,\ \ y=0,\ \ x=-\frac{\pi}{2},\ \ x=-\frac{\pi}{4}.$

6.361. $y=e^{-x},\ \ y=0,\ \ x=1,\ \ x=2.$

6.362. $y=\frac{2}{x},\ \ y=0,\ \ x=2,\ \ x=3.$

6.363. $y=\frac{3}{x},\ \ x+y=4.$

3. Свойства определенного интеграла. 1) Если $f(x)\geqslant 0$ на отрезке $[a, b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx\geqslant 0.$

2) Если $f(x)\leqslant g(x)$ на $[a, b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx\leqslant\int\limits_a^b g(x)\,dx.$

3) $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right|\leqslant\int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$

4) Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, m — наименьшее, M — наибольшее значения $f(x)$ на $[a, b]$, то

$$m(b-a)\leqslant\int\limits_a^b f(x)\,dx\leqslant M(b-a)$$

(*теорема об оценке определенного интеграла*).

Пример 3. Оценить интеграл

$$I=\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

◁ Имеем: $1\leqslant 1+x^4\leqslant 2$ при $0\leqslant x\leqslant 1$;

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\leqslant 1,$$

т. е. $m=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $M=1$, $b-a=1$. Следовательно, $\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant I\leqslant 1$. ▷

5) Если $f(x)$ непрерывна, а $g(x)$ интегрируема на $[a, b]$, $g(x) \geqslant 0$, m и M — наименьшее и наибольшее значения $f(x)$ на $[a, b]$, то

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx$$

(обобщенная теорема об оценке определенного интеграла)

6) Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то существует такая точка $c \in (a, b)$, что справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

(теорема о среднем значении).

Число

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

называется *средним значением* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

7) Если $f(x)$ непрерывна, а $g(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $g(x) \geqslant 0$, то существует такая точка $c \in (a, b)$, что справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

(обобщенная теорема о среднем).

8) Если $f^2(x)$ и $g^2(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, то

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx}$$

(неравенство Коши — Буняковского).

9) Интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах. Если функция $f(x)$ четная, то $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$. Если функция $f(x)$ нечетная, то $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

10) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то *интеграл с переменным верхним пределом*

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

является первообразной для функции $f(x)$, т. е.

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x), \quad x \in [a, b].$$

11) Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ дифференцируемы в точке $x \in (a, b)$ и $f(t)$ непрерывна при $\varphi(a) \leqslant t \leqslant \psi(b)$, то

$$\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt\right)'_x = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Пример 4. $I(x)=\int\limits_0^{x^2} e^{-t^2}dt$. Найти $I'(x)$

◁ Используя свойство 11) и учитывая, что $\varphi(x)=0$, т. е. $\varphi'(x)=0$, имеем

$$I'(x)=e^{-(x^2)^2}\cdot(x^2)'=2xe^{-x^4}\quad ▷$$

6.364. Определить знаки интегралов, не вычисляя их:

а)* $\int\limits_{-2}^{1}\sqrt[3]{x}\,dx$; б) $\int\limits_{-1}^{1}x^3e^x\,dx$; в) $\int\limits_{1/3}^{1}x\ln x\,dx$.

6.365. Не вычисляя интегралов, выяснить, какой из интегралов больше:

а) $\int\limits_1^2\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ или $\int\limits_1^2\frac{dx}{x}$; б) $\int\limits_1^2\frac{dx}{x^2}$ или $\int\limits_1^2\frac{dx}{x^3}$;

в) $\int\limits_0^1 e^{-x}\cos^2 x\,dx$ или $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\cos^2 x\,dx$.

6.366. Найти среднее значение функции на данном отрезке:

а) x^3, $0\leqslant x\leqslant 1$; в) $\cos x$, $0\leqslant x\leqslant\pi/2$;

б) $\sqrt[3]{x}$, $0\leqslant x\leqslant 1$; г) $\cos^3 x$, $0\leqslant x\leqslant\pi/2$.

6.367. Сила переменного тока меняется по закону $I=I_0\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)$, где T — период. Найти среднее значение силы тока за полупериод.

6.368. Оценить интеграл $\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{8+x^3}\,dx$.

6.369. Оценить интеграл $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{\sqrt{5+2\sin x}}$.

6.370. Оценить интеграл $\int\limits_0^1\sqrt{(1+x)(1+x^3)}\,dx$, пользуясь:

а) обобщенной теоремой об оценке интеграла;

б) неравенством Коши — Буняковского.

6.371. Оценить интеграл $\int\limits_0^1\sqrt{(4+x^3)\,x}\,dx$, пользуясь:

а) обобщенной теоремой об оценке интеграла;

б) неравенством Коши — Буняковского.

6.372. Найти: а) $\frac{dI}{d\beta}$, б) $\frac{dI}{d\alpha}$, если $I=\int\limits_\alpha^\beta\frac{e^x}{x}dx$ $(0<\alpha<\beta)$.

6.373. Найти точки экстремума функции

$$\Phi(x)=\int_a^x \frac{\cos t}{t}\,dt \quad \left(x>0,\ 0<a<\frac{\pi}{2}\right).$$

Найти производные следующих функций:

6.374. $\Phi(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt.$ **6.375.** $\Phi(x)=\int_{1/x}^{\sqrt{x}} \sin(t^2)\,dt.$

6.376. $\Phi(x)=\int_x^0 \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}.$ **6.377.** $\Phi(x)=\int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\ln t}$ $(x>0).$

6.378. Доказать, что $\int_{-3}^{3} \frac{x^2\sin x}{1+x^4}\,dx=0.$

4. Замена переменной в определенном интеграле. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция $x=\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[t_1, t_2]$, причем $a=\varphi(t_1)$, $b=\varphi(t_2)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Пример 5. Вычислить $\int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx.$

◁ Применим подстановку $x=\sin t$. Тогда $dx=\cos t\,dt$, $t=\arcsin x$, $t_1=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$ и $t_2=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$\int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx=\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t}\cos t\,dt=\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\,dt=\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}\,dt=$$

$$=(-\operatorname{ctg} t-t)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}=-\frac{\pi}{2}+1+\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}.\ ▷$$

6.379. Можно ли интеграл $\int_0^2 x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$ вычислить с помощью подстановки $x=\sin t$?

Вычислить интегралы с помощью указанных подстановок:

6.380. $\int_1^6 \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}},\quad 3x-2=t^2.$

6.381. $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}, \quad e^x+1=t^2.$

6.382. $\int\limits_{0}^{\operatorname{sh} 1} \sqrt{x^2+1}\, dx, \quad x=\operatorname{sh} t.$

6.383. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}, \quad \operatorname{tg}\frac{x}{2}=t.$

6.384. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}, \quad \operatorname{tg} x=t.$

6.385. $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{3-2x-x^2}\, dx, \quad x+1=2\sin t.$

Вычислить интегралы с помощью замены переменной:

6.386. $\int\limits_{2/\sqrt{3}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

6.387. $\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt{(x+3)^3}}.$

6.388. $\int\limits_{2}^{4/\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\, dx.$

6.389. $\int\limits_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$

6.390. $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{(4+x^2)^2}.$

6.391. $\int\limits_{1}^{5} \frac{dx}{x+\sqrt{2x-1}}.$

6.392. $\int\limits_{1/4}^{1} \frac{dx}{x\sqrt{1+4x^2}}.$

6.393. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x\, dx}{\sqrt{5-4x}}.$

6.394. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 6} \frac{e^x\sqrt{e^x-2}}{e^x+2}\, dx.$

6.395. $\int\limits_{0}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}\, dx.$

6.396. Показать, что $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{\ln x} = \int\limits_{1}^{2} \frac{e^x}{x}\, dx.$

6.397. Показать, что $\int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} \frac{dx}{\arcsin x} = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{x}\, dx.$

6.398. Убедиться в том, что $\displaystyle\int_{-2}^{2}\frac{3x^7-2x^5+x^3-x}{x^4+3x^2+1}\,dx=0.$

5. Интегрирование по частям. Если функции $u=u(x)$, $v=v(x)$ и их производные $u'(x)$ и $v'(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,du$$

(формула интегрирования по частям).

Пример 6. Вычислить $\int_1^e \ln x\,dx$.

◁ Положим $u=\ln x$, $dv=dx$, тогда $du=\frac{dx}{x}$, $v=x$. Имеем

$$\int_1^e \ln x\,dx=x\ln x\Big|_1^e-\int_1^e x\cdot\frac{dx}{x}=e-x\Big|_1^e=e-e+1=1.$$ ▷

Вычислить интегралы методом интегрирования по частям:

6.399. $\int_0^1 xe^x\,dx.$ **6.400.** $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\,dx.$

6.401. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{x\,dx}{\cos^2 x}.$ **6.402.** $\int_1^e \ln^2 x\,dx$

6.403. $\int_0^{\pi/4} e^{3x}\sin 4x\,dx.$ **6.404.** $\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}\,dx.$

6.405. $\int_1^e x\ln x\,dx.$ **6.406.** $\int_0^1 x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx.$

6.407. $\int_0^{\pi/4} x^2\cos 2x\,dx.$ **6.408.** $\int_0^{\pi/2} e^x\cos x\,dx.$

6.409. Показать, что для интеграла

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx=\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx,\quad n\in\mathbf{N},$$

верна рекуррентная формула $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$. Вычислить I_7 и I_8.

6.410. Показать, что для интеграла

$$I_n=\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx, \quad n\in\mathbf{N},$$

верна рекуррентная формула $I_n=-\frac{1}{e}+nI_{n-1}$. Вычислить I_4.

§ 5. Несобственные интегралы

1. Интегралы с бесконечными пределами. Если функция $f(x)$ непрерывна при $a\leqslant x<+\infty$, то по определению

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Если существует конечный предел в правой части формулы (1), то несобственный интеграл называется *сходящимся*, если этот предел не существует, то — *расходящимся*.

Геометрически несобственный интеграл (1) в случае $f(x)>0$ есть площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=f(x)$, прямой $x=a$ и осью Ox (асимптотой)

Аналогично определяется интеграл $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$. Далее, по определению

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx+\int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx, \tag{2}$$

где c, $-\infty<c<+\infty$, — произвольно, причем интеграл в левой части равенства (2) считается сходящимся, если сходятся оба интеграла в правой части.

Признаки сходимости и расходимости приведем только для интегралов вида (1).

1) Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=F(+\infty)$, то интеграл (1) сходится и равен

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=F(+\infty)-F(a);$$

если же $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ не существует, то интеграл (1) расходится.

2) Пусть при $a\leqslant x<+\infty$ $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$. Если $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится, то сходится и $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, причем $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx\leqslant\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$. Если $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, то расходится и $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ (признаки сравнения).

3) Если при $a\leqslant x<+\infty$ $f(x)>0$, $g(x)>0$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\neq 0$, то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходятся