Наличие в этой формуле произвольной постоянной величины C объясняет, почему интеграл $\int f(x)\,dx$ называется неопределенным.

Равенство (1,2) дает самый общий вид первообразной функции.

Вопрос о том, имеет ли заданная функция $f(x)$ первообразную, решается основной теоремой интегрального исчисления:

Теорема. *Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке отрезка $[a, b]$, то во всех точках этого отрезка она имеет первообразную, которая на этом отрезке также непрерывна.*

СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Если a — постоянная величина, то

$$\int a f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx, \tag{1,3}$$

т. е. постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

2. Интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен такой же алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций

$$\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx - \int f_3(x)\,dx. \tag{1,4}$$

3. $$d \int f(x)\,dx = f(x)\,dx, \tag{1,5}$$

т. е. знак дифференциала d и знак интеграла $\int$, когда первый помещен перед вторым, взаимно погашаются (иногда говорят взаимно сокращаются или взаимно уничтожаются).

4. $$\int dF(x) = F(x) + C, \tag{1,6}$$

т. е. знаки d и $\int$ взаимно погашаются также и тогда, когда знак интеграла стоит перед знаком дифференциала, но в этом случае к $F(x)$ нужно прибавить произвольную постоянную.

Формулу (1,6) можно переписать так: $\int F'(x)\,dx = F(x) + C$.

5. $$\left[\int f(x)\,dx\right]' = f(x). \tag{1,6a}$$

ОСНОВНАЯ ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

Во всех формулах под u понимается или независимая переменная, или произвольная функция любой независимой переменной, дифференцируемая в некотором промежутке.

Каждая из формул этой таблицы справедлива в любом промежутке, содержащемся в области определения соответствующей подынтегральной функции.

Интегралы, помещенные в таблице, называются табличными.

1. $\int 0 \cdot dx = C.$ (1,7)

2. $\int du = u + C.$ (1,8)

3. $\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$ (1,9)

   (n — постоянная величина).

Частными случаями этой формулы являются следующие две:

4. $\int \frac{du}{u^n} = -\frac{1}{n-1} \frac{1}{u^{n-1}} + C$ (1,10)

   (n — постоянная величина; $n \neq 1$).

5. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C.$ (1,11)

6. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$ (1,12)

7. $\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + C \, (a > 0, \ a \neq 1).$ (1,13)

8. $\int e^u \, du = e^u + C.$ (1,14)

9. $\int \sin u du = -\cos u + C.$ (1,15)

10. $\int \cos u du = \sin u + C.$ (1,16)

11. $\int \operatorname{tg} u du = -\ln|\cos u| + C.$ (1,17)

12. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln|\sin u| + C.$ (1,18)

13. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C.$ (1,19)

14. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$ (1,20)

15. $\int \frac{du}{1 + u^2} = \operatorname{arctg} u + C.$ (1,21)

16. $\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \arcsin u + C.$ (1,22)

17. $\int \frac{du}{1 - u^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + u}{1 - u} \right| + C.$ (1,23)

18. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C.$ (1,24)

19. $\int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C.$ (1,25)

20. $\int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C.$ (1,26)

21. $\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C.$ (1,27)

22. $\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C.$ (1,28)

Таблицу формул читатель должен выучить наизусть. Это и следующие два практические занятия отводятся для непосредственного интегрирования, под которым понимается вычисление интегралов с помощью таблицы основных интегралов. Навыки интегрирования приобретаются опытом, а потому рекомендуется решить как можно больше задач.

1. Упражнения в применении формул (1,9) — (1,12)

Перепишем формулу (1,9) в виде, который более удобен для ее практического применения.

Если u есть функция независимой переменной x, то $du = u'\,dx$, и формула (1,9) перепишется так:

$$\int u^n u'\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1). \tag{1,29}$$

Следует обратить внимание на подынтегральную функцию $u^n u'$. Здесь n-я степень функции u умножается на u' — на производную основания степени u. Эта формула верна только при наличии множителя u'. В правой части формулы функция u находится в степени $n+1$, т. е. в степени, на единицу большей, чем под знаком интеграла, и u^{n+1} делится на ее показатель степени $n+1$. Оговорка $n \neq -1$ существенна, так как если $n = -1$, то $n+1=0$, и тогда в правой части формулы знаменатель равен нулю. Когда $n=-1$, следует пользоваться формулой (1,12). В случае, когда u — независимая переменная (например, x), $u'=1$ и формула (1,29) переписывается в виде

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C. \tag{1,30}$$

Первые упражнения связаны именно с этой формулой.

Задача 1,1. Вычислить интегралы: 1) $\int x\,dx$; 2) $\int x^3\,dx$; 3) $\int x^5\,dx$; 4) $\int \sqrt{x}\,dx$; 5) $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$ и самостоятельно проверить дифференцированием полученные результаты.

Решение. По формуле (1,30) находим:

1) $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$; 2) $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$; 3) $\int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + C$;

4) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$; 5) $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx =$

$= \int x^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} = \frac{3x\sqrt[3]{x^2}}{5} + C$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$.

В пятом примере проверка дает

$$\left(\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right)' = \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}.$$

Как и следовало ожидать, мы получили подынтегральную функцию.

Задача 1,2. Вычислить интегралы: 1) $\int 7x^5dx$; 2) $\int 3\sqrt[4]{x^3}dx$; 3) $\int \frac{6}{x^2}dx$; 4) $\int \frac{4}{x^n}dx$; 5) $\int 5dx$, и проверить дифференцированием полученные результаты.

Решение. 1) Вынося за знак интеграла постоянный множитель 7, получаем: $\int 7x^5dx = 7\int x^5dx = 7\cdot\frac{x^6}{6} + C$;

$$2)\ \int 3\sqrt[4]{x^3}dx = 3\int x^{\frac{3}{4}}dx = 3\,\frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + C = \frac{12}{7}x\sqrt[4]{x^3} + C;$$

$$3)\ \int \frac{6}{x^2}dx = 6\int x^{-2}dx = 6\,\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{6}{x} + C.$$

Замечание. Можно было сразу применить формулу (1,10), положив в ней $u = x$, $du = dx$, $n = 2$.

$$4)\ \int \frac{4}{x^n}dx = 4\int x^{-n}dx = 4\,\frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{4}{1-n}x^{1-n} + C$$

(см. замечание к предыдущей задаче);

$$5)\ \int 5dx = 5\int dx = 5x + C$$

(применена формула (1,8), в которой взято $u = x$).

Задача 1,3. Вычислить интегралы: 1) $\int (x^3 - 3x^2 + 5x - 4)\,dx$; 2) $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x^3} - \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx$.

Указание. При решении этих примеров следует применить формулу (1,4), выражающую правило интегрирования алгебраической суммы, и формулу (1,30).

При вычислении интеграла от суммы нескольких функций сумму произвольных постоянных, которая при этом получается, заменяют одной произвольной постоянной, обозначаемой обычно буквой C.

Ответ: 1) $\frac{x^4}{4} - x^3 + 5\frac{x^2}{2} - 4x + C$;

2) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} - 8\sqrt{x} - \frac{15}{2}\sqrt[5]{x^2} + C$.

Замечание. В этом примере при вычислении каждого интеграла можно сразу воспользоваться формулой (1,10), заменив в ней u на x.

Задача 1,4 (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы: 1) $\int \sqrt[n]{x}\,dx$; 2) $\int \sqrt[n]{x^m}\,dx$; 3) $\int (ax^2+bx+c)\,dx$.

Ответ. 1) $\frac{n}{n+1} x \sqrt[n]{x} + C$; 2) $\frac{n}{m+n} x \sqrt[n]{x^m} + C$; 3) $\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx + C$.

Задача 1,5 (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы: 1) $\int \left(\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} - \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt[7]{x^5}}\right) dx$; 2) $\int \left(\frac{3}{x^5} - \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^3}\right) dx$.

Ответ. 1) $15\sqrt[3]{x} - \frac{2}{3} x\sqrt{x} + 14\sqrt[7]{x^2} + C$;

$$2)\ -\frac{3}{4}\frac{1}{x^4} + \frac{2}{3}\frac{1}{x^3} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + C.$$

Задача 1,6. Вычислить интеграл $I = \int \frac{x^4 - 3x^2 + 5\sqrt[3]{x} - 7x + 6}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

Решение. Для вычисления интеграла следует разделить многочлен, стоящий в числителе, на знаменатель. Если это выполнить, то получится, что

$$I_1 = \int \left(x^{\frac{11}{3}} - 3x^{\frac{5}{3}} + 5 - 7x^{\frac{2}{3}} + 6x^{-\frac{1}{3}}\right) dx = \frac{3}{14} x^{\frac{14}{3}} - \frac{9}{8} x^{\frac{8}{3}} + 5x - $$
$$- \frac{21}{5} x^{\frac{5}{3}} + 9x^{\frac{2}{3}} + C = \sqrt[3]{x^2}\left(\frac{3}{14}x^4 - \frac{9}{8}x^2 + 5\sqrt[3]{x} - \frac{21}{5}x + 9\right) + C.$$

Задача 1,7 (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы: 1) $\int (3x^2-5)^3\,dx$; 2) $\int \frac{x^6 + 3x^5 - 7x^4 + 5\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$.

Ответ. 1) $\frac{27}{7}x^7 - 27x^5 + 75x^3 - 125x + C$;

2) $4\sqrt[4]{x}\left(\frac{x^6}{25} + \frac{x^5}{7} - \frac{7}{17}x^4\right) + \frac{60}{7}\sqrt[12]{x^7} + C$.

Задача 1,8. Какая функция имеет производную $5x^2 - 7x + 4$ и принимает значение, равное 3, при $x = 1$?

Решение. В задаче требуется найти функцию, для которой известна ее производная, т. е. требуется найти первообразную функцию для функции $5x^2 - 7x + 4$.

Из бесчисленного множества первообразных, которые имеет эта функция, следует отобрать ту, которая равна 3 при $x = 1$.

Если $F(x)$ — какая-нибудь первообразная функция, то в самом общем виде она на основании формулы (1,2) запишется так:

$$F(x) + C = \int (5x^2 - 7x + 4)\, dx;$$

$$F(x) + C = \frac{5}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 4x.$$

В условии задачи дано, что $F(1) = 3$, для того чтобы определить произвольную постоянную. Полагая в последнем равенстве $x = 1$, а $F(1) = 3$, получаем

$$3 + C = \frac{5}{3} - \frac{7}{2} + 4,$$

отсюда $C = -\frac{5}{6}$. Тогда $F(x) - \frac{5}{6} = \frac{5}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 4x$, а искомая функция $F(x) = \frac{5}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 4x + \frac{5}{6}$.

Таким образом, мы нашли функцию $F(x)$, производная которой равна $5x^2 - 7x + 4$, и кроме того $F(1) = 3$.

Задача 1,9 (для самостоятельного решения). Какая функция имеет производную $3x^2 + 2x + 1$ и принимает значение, равное 2, при $x = 0$?

Ответ. Искомая функция $F(x) = x^3 + x^2 + x + 2$.

Задача 1,10 (для самостоятельного решения). Какая функция имеет производную $5 - 9x + 4x^2$, если известно, что при $x=2$ эта функция равна 50?

Ответ. Искомая функция $F(x) = 5x - \frac{9}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{142}{3}$.

Задача 1,11 (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы:

$$1)\ \int \frac{(1 + \sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}\, dx;\quad 2)\ \int \frac{(4 + 2\sqrt{x})(x^3 + 5)}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx.$$

Указание. В первом интеграле числитель сначала возвести в куб, полученный многочлен разделить на $\sqrt{x}$ и после этого проинтегрировать. Во втором интеграле в числителе перемножить многочлены, произведение разделить на $\sqrt[3]{x^2}$, после чего выполнить интегрирование.

Ответ. 1) $2\sqrt{x} + 3x + 2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} + C$;

2) $\frac{6}{5}x^3\sqrt[3]{x} + \frac{12}{23}x^3\sqrt[6]{x^5} + 60\sqrt[3]{x} + 12\sqrt[6]{x^5} + C$.

Задача 1,12. Вычислить интегралы: 1) $\int (x^2 + 5)^7\, 2x\, dx$;

2) $\int (3x^3 + 5x^2 - 8)(9x^2 + 10x)\, dx$; 3) $\int \sqrt{x^2 + 6} \cdot 2x\, dx$;

4) $\int (2x^2 + 7)^3 x\, dx$; 5) $\int \sqrt[3]{x^3 + 8}\, x^2\, dx$; 6) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, x\, dx$.

Решение. Все эти примеры решаются с помощью формулы (1,29). Прежде чем применять ее, надо выяснить: 1) какую из функций, стоящих под интегралом, следует принять равной u и 2) есть ли под интегралом множитель, равный u'.

1) В первом примере следует взять $u = x^2 + 5$. Множитель $2x$ является производной функции u, так как $(x^2 + 5)' = 2x$. Поэтому на основании (1,29) при $n = 7$ имеем

$$\int \underbrace{(x^2+5)^7}_{u^7} \cdot \underbrace{2x}_{u'}\, dx = \frac{(x^2+5)^8}{8} + C.$$

Если бы подынтегральная функция не содержала множитель $2x$, то применить формулу (1,29) было бы нельзя. В этом случае следовало бы вычислить по формуле Ньютона $(x^2 + 5)^7$ и интегрировать полученную сумму функций.

2) Пример второй решается аналогично. Считая, что $u = 3x^3 + 5x^2 - 8$, и замечая, что множитель $9x^2 + 10x$ есть производная функции u, а $n = 3$, по формуле (1,29) находим

$$\int \underbrace{(3x^3+5x^2-8)^3}_{u^3} \cdot \underbrace{(9x^2+10x)}_{u'}\, dx = \frac{(3x^3+5x^2-8)^4}{4} + C.$$

Здесь опять-таки отметим, что наличие множителя $9x^2 + 10x$, который на первый взгляд осложнил подынтегральную функцию, на самом деле облегчило интегрирование, так как если бы множитель $9x^2 + 10x$ отсутствовал, то для вычисления интеграла следовало бы возвести $3x^3 + 5x^2 - 8$ в куб, что потребовало бы значительно больших выкладок.

3) Этот пример также легко решается, так как подынтегральная функция имеет вид $u^n u'$. Действительно, полагая $u = x^2 + 6$, мы замечаем, что множитель $2x$ равен u', $n = \frac{1}{2}$, а потому

$$\int \sqrt{x^2+6} \cdot 2x\, dx = \int \underbrace{(x^2+6)^{\frac{1}{2}}}_{u^{\frac{1}{2}}} \cdot \underbrace{2x}_{u'}\, dx = \frac{(x^2+6)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C =$$

$$= \frac{(x^2+6)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(x^2+6)\sqrt{x^2+6} + C.$$

Если бы подынтегральная функция не содержала множитель $2x$, то вычисление интеграла $\int \sqrt{x^2+6}\, dx$ потребовало бы значительно большей работы. Еще раз напоминаем читателю, что формула (1,29) применима только тогда, когда подынтегральная функция имеет вид $u^n u'$ или может быть преобразована к этому виду.

4) В этом примере подынтегральная функция равна $(2x^2+7)^3 x$. Если принять, что $u = 2x^2 + 7$, то $u' = 4x$. Множитель $4x$ отсутствует под знаком интеграла, а потому подынтегральная функция не имеет вида $u^n u'$.

К такому виду мы легко придем, если запишем подынтегральную функцию в виде $\frac{1}{4}(2x^2+7)^3 4x$, т. е. если умножим и разделим подынтегральную функцию на 4, отчего ее значение не изменится. При интегрировании постоянный множитель $\frac{1}{4}$ вынесем за знак интеграла и применим формулу (1,29). Имеем

$$\int (2x^2+7)^3 x\,dx = \frac{1}{4}\int \underbrace{(2x^2+7)^3}_{u^3}\cdot \underbrace{4x}_{u'}\,dx = \frac{1}{4}\,\frac{(2x^2+7)^4}{4} + C =$$

$$= \frac{1}{16}(2x^2+7)^4 + C.$$

В этом примере подынтегральная функция не имела вид $u^n u'$, но умножением на постоянную величину легко была к нему приведена.

5) Подынтегральная функция в этом примере может быть записана так: $(x^3+8)^{\frac{1}{3}} x^2$. Если принять $u = x^2 + 8$, то $u' = 3x^2$. У нас же вместо множителя $3x^2$ есть множитель x^2.

Умножим на 3 подынтегральную функцию. Чтобы она не изменила своего значения, разделим ее на 3 и получим $\frac{1}{3}(x^3 + 8)^{\frac{1}{3}} 3x^2$. При интегрировании множитель $\frac{1}{3}$ вынесем за знак интеграла, а под интегралом окажется выражение вида $u^n u'$ $\left(n = \frac{1}{3}\right)$. Применяя формулу (1,29), получаем

$$\int \sqrt[3]{x^2+8}\,x^2\,dx = \frac{1}{3}\int \underbrace{(x^3+8)^{\frac{1}{3}}}_{u^{\frac{1}{3}}}\cdot \underbrace{3x^2}_{u'}\,dx = \frac{1}{3}\,\frac{(x^3+8)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C =$$

$$= \frac{(x^3+8)\sqrt[3]{x^3+8}}{4} + C.$$

6) В этом примере опять-таки придется преобразовать подынтегральную функцию так, чтобы она приобрела вид $u^n u'$. Представим ее в виде $(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} x$. Если принять, что $u = a^2 - x^2$, то $u' = -2x$. Значит, чтобы под знаком интеграла был множитель $-2x$, подынтегральную функцию надо умножить на -2.

Выполняя это умножение и деля одновременно на -2, получаем: $(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}x=-\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}(-2x)$. При интегрировании множитель $-\frac{1}{2}$ вынесем за знак интеграла, тогда под интегралом окажется выражение вида $u^n u'$ и формула (1,29) может быть применена. Записи расположатся так:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,x\cdot dx=-\frac{1}{2}\int \underbrace{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}_{u^{\frac{1}{2}}}\cdot\underbrace{(-2x)}_{u^1}dx=-\frac{1}{2}\frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=$$

$$=-\frac{1}{3}(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

Задача 1,13 (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы: 1) $\int(5x+4)^4dx$; 2) $\int(9+7x^2)^5x\,dx$; 3) $\int(8ax^2+9bx^2)^{\frac{4}{3}}\times$ $\times(16ax+27bx^2)\,dx$; 4) $\int\sqrt{4x^2+8x}\,(2x+2)\,dx$;
5) $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{7+x^3}}$; 6) $\int\sqrt{1-x}\,dx$.

Указания. В пятом интеграле: $\frac{x^2}{\sqrt{7+x^3}}=(7+x^3)^{-\frac{1}{2}}x^2=$ $=\frac{1}{3}\underbrace{(7+x^3)}_{u}^{-\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{3x^2}_{u'}$.

В шестом интеграле: $\sqrt{1-x}=(1-x)^{\frac{1}{2}}=-\underbrace{(1-x)}_{u}^{\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{(-1)}_{u'}$.

Ответ. 1) $\frac{1}{25}(5x+4)^5+C$; 2) $\frac{1}{84}(9+7x^2)^6+C$;
3) $\frac{3}{7}(8ax^2+9bx^3)^{\frac{7}{3}}+C$; 4) $\frac{1}{6}(4x^2+8x)\sqrt{4x^2+8x}+C$;
5) $\frac{2}{3}\sqrt{7+x^3}+C$; 6) $-\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}+C$.

Задача 1,14. Вычислить интегралы: 1) $\int\sin^3x\cos x\,dx$;
2) $\int\cos^5 4x\sin 4x\,dx$; 3) $\int\frac{x^2\,dx}{(4x^3+9)^4}$; 4) $\int\frac{\operatorname{arctg}^3x}{1+x^2}dx$; 5) $\int\frac{\cos x}{\sin^5x}dx$;
6) $\int\operatorname{tg}^2x\sec^2x\,dx$; 7) $\int\sqrt[3]{\cos^2x}\sin x\,dx$.

Решение. 1) Подынтегральная функция имеет вид $u^n u'$. Действительно, если $u=\sin x$, то $u'=\cos x$, $n=3$. Поэтому, применяя формулу (1,29), имеем

$$\int\underbrace{\sin^3x}_{u^3}\cdot\underbrace{\cos x}_{u'}dx=\frac{\sin^4x}{4}+C.$$

2) В этом примере подынтегральная функция $\cos^5 4x \sin 4x$ не имеет вид $u^n u'$, так как если $u = \cos 4x$, то $u' = -4 \sin 4x$ $(n=5)$. Значит, недостает множителя —4. Умножая и деля на —4 и вынося $-\frac{1}{4}$ за знак интеграла, получим:

$$\int \cos^5 4x \sin 4x \, dx = -\frac{1}{4} \int \underbrace{\cos^5 4x}_{u^5} \cdot \underbrace{(-4 \sin 4x)}_{u'} \, dx =$$

$$= -\frac{1}{4} \frac{\cos^6 4x}{6} + C = -\frac{1}{24} \cos^6 4x + C.$$

3) Представим подынтегральную функцию в виде $(4x^3 + 9)^{-4} x^2$. Возьмем $u = 4x^3 + 9$, тогда $u' = 12x^2$ $(n = -4)$. Чтобы подынтегральная функция приобрела вид $u^n u'$, её надо умножить на 12. Умножив и разделив полученное выражение на 12, вынесем множитель $\frac{1}{12}$ за знак интеграла. Тогда получим

$$\int \frac{x^2 \, dx}{(4x^3 + 9)^4} = \frac{1}{12} \int \underbrace{(4x^3 + 9)^{-4}}_{u^{-4}} \quad \underbrace{12x^2}_{u'} \, dx = \frac{1}{12} \frac{(4x^3 + 9)^{-4+1}}{-4 + 1} + C =$$

$$= -\frac{1}{36} \frac{1}{(4x^3 + 9)^3} + C.$$

4) Представим подынтегральную функцию в виде $\operatorname{arctg}^3 x \times \times \frac{1}{1 + x^2}$. Положив $u = \operatorname{arctg} x$, получим $u' = \frac{1}{1 + x^2}$, и подынтегральная функция будет иметь вид $u^n u'$ $(n = 3)$. Поэтому без дополнительных преобразований можем применить формулу (1,29). Найдем

$$\int \operatorname{arctg}^3 x \cdot \frac{1}{1 + x^2} \, dx = \frac{\operatorname{arctg}^4 x}{4} + C.$$

5) Запишем подынтегральную функцию в виде $\sin^{-5} x \cos x$. Возьмем $u = \sin x$, тогда, $u' = \cos x$. В таком случае без всяких преобразований подынтегральная функция имеет вид $u^n u'$, а потому на основании формулы (1,29) получаем

$$\int \underbrace{\sin^{-5} x}_{u^{-5}} \quad \underbrace{\cos x}_{u'} \, dx = \frac{\sin^{-4} x}{-4} + C = -\frac{1}{4} \frac{1}{\sin^4 x} + C.$$

6) Положим, что $u = \operatorname{tg} x$, тогда $u' = \sec^2 x$ и подынтегральная функция имеет вид $u^n u'$ $(n = 2)$, никаких дополнительных преобразований делать не требуется. На основании (1,29) сразу получаем

$$\int \underbrace{\operatorname{tg}^2 x}_{u^2} \cdot \underbrace{\sec^2 x}_{u'} \, dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.$$

7) Представим подынтегральную функцию в виде $\cos^{\frac{2}{3}} x \sin x$. Возьмем $u = \cos x$, тогда $u' = -\sin x$, $n = \frac{2}{3}$. Чтобы получить

под знаком интеграла выражение вида $u^n u'$, но не изменить величину подынтегральной функции, умножим и разделим ее на -1. По формуле (1,29) получаем

$$\int \sqrt[3]{\cos^2 x}\sin x\,dx = -\int \underbrace{\cos^{\frac{2}{3}} x}_{u^{\frac{2}{3}}} \cdot \underbrace{(-\sin x)}_{u'}\,dx = -\frac{\cos^{\frac{5}{3}} x}{\frac{5}{3}} + C =$$

$$= -\frac{3}{5}\cos x\sqrt[3]{\cos^2 x} + C.$$

Решим еще одну аналогичную задачу.

Задача 1,15. Вычислить интегралы: 1) $\int \frac{\ln x}{x}dx$;

2) $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,dx$; 3) $\int \frac{dx}{x\ln^4 x}$; 4) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$;

5) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{5+\cos x}}dx$; 6) $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{3-\sin^2 x}}dx$.

Решение. 1) Представим $\frac{\ln x}{x}$ в виде $(\ln x)\cdot\frac{1}{x}$. Полагая $u = \ln x$, получим $u' = \frac{1}{x}$. Подынтегральная функция $\frac{\ln x}{x}$ приобретает вид $u^n u'$ $(n = 1)$, и тогда $\int \frac{\ln x}{x}dx = \int \underbrace{\ln x}_{u} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'}dx = \frac{\ln^2 x}{2} + C$.

2) $\sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} = (\arcsin x)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Считая, что $u = \arcsin x$, имеем $u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, а потому по формуле (1,29)

$$\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,dx = \int (\arcsin x)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{(\arcsin x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{3}\arcsin x\sqrt{\arcsin x} + C.$$

3) Выражение $\frac{1}{x\ln^4 x} = (\ln x)^{-4}\cdot\frac{1}{x}$. Если положить $u = \ln x$, то $u' = \frac{1}{x}$, и подынтегральная функция $(\ln x)^{-4}\cdot\frac{1}{x}$ приобретет вид $u^n u'$ $(n = -4)$, а потому по формуле (1,29)

$$\int \frac{dx}{x\ln^4 x} = \int \underbrace{(\ln x)^{-4}}_{u^{-4}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'}dx = \frac{(\ln x)^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3\ln^3 x} + C.$$

4) Подынтегральную функцию можно преобразовать так: $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}2x$. Положим, что $u=1+x^2$, тогда $u'=2x$. Если $\frac{1}{2}$ вынести за знак интеграла, то подынтегральная функция примет вид $u^n u'$ и формулу (1,29) применить можно:

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}\int\underbrace{(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}_{u^{-\frac{1}{2}}}\cdot\underbrace{2x\,dx}_{u'}=\frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{1+x^2}+C.$$

При решении этого примера можно было сразу воспользоваться формулой (1,11), переписав подынтегральную функцию в виде $\frac{du}{\sqrt{u}}=\frac{u'\,dx}{\sqrt{u}}$.
Тогда

$$\int\frac{u'\,dx}{\sqrt{u}}=2\sqrt{u}+C. \tag{1,31}$$

Заметьте, что числитель дроби под знаком интеграла равен производной функции, стоящей в знаменателе под квадратным корнем. Если положить $u=1+x^2$, числитель дроби переписать в виде $x=\frac{1}{2}\cdot 2x$ и вынести $\frac{1}{2}$ за знак интеграла, то окажется, что числитель дроби равен производной функции, стоящей в знаменателе под квадратным корнем. На основании формулы (1,31)

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1+x^2}+C=\sqrt{1+x^2}+C.$$

5) Подынтегральную функцию перепишем так: $\frac{\sin x}{\sqrt{5+\cos x}}=-\frac{-\sin x}{\sqrt{5+\cos x}}$. Теперь числитель дроби равен производной функции, стоящей под корнем в знаменателе. Поэтому на основании формулы (1,31) имеем

$$\int\frac{\sin x}{\sqrt{5+\cos x}}dx=-\int\frac{-\sin x}{\sqrt{5+\cos x}}dx=-2\sqrt{5+\cos x}+C.$$

6) Принимая $u=3-\sin^2 x$, получаем, что $u'=-2\sin x\cos x$. Переписываем подынтегральную функцию в виде $\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{3-\sin^2 x}}=-\frac{1}{2}\frac{-2\sin x\cos x}{\sqrt{3-\sin^2 x}}$. Теперь мы можем применить формулу (1,31), так как числитель второй дроби является производной функции, стоящей в знаменателе под квадратным корнем:

$$\int\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{3-\sin^2 x}}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{-2\sin x\cos x}{\sqrt{3-\sin^2 x}}dx=-\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3-\sin^2 x}+$$
$$+C=-\sqrt{3-\sin^2 x}+C.$$

Ниже предлагаются для самостоятельного решения десять примеров на применение формул (1,29) и (1,31).

Задача 1,16 (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы: 1) $\int \frac{\cos x}{\sin^7 x} dx$; 2) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$; 3) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$; 4) $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

5) $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$; 6) $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} dx$; 7) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{7-\cos^2 x}} dx$; 8) $\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-3x^2}}$;

9) $\int \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch} x\,dx$; 10) $\int \frac{\operatorname{cosec}^2 x}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}} dx$.

Ответ. 1) $-\frac{1}{6}\operatorname{cosec}^6 x + C$; 2) $\frac{2}{3}\ln x\sqrt{\ln x} + C$;

3) $-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^4} + C$; 4) $\frac{1}{4}\arcsin^4 x + C$;

5) $\frac{3}{4}\operatorname{arctg} x\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x} + C$; 6) $2\sqrt{\operatorname{tg} x} + C$;

7) $2\sqrt{7-\cos^2 x} + C$; 8) $-\frac{2}{3}\sqrt{1-3x^2} + C$;

9) $\frac{1}{4}\operatorname{sh}^4 x + C$; 10) $-2\sqrt{\operatorname{ctg} x} + C$.

Чтобы закончить это практическое занятие, нам остается выполнить упражнения на применение формулы (1,12). Полагая, что u есть функция независимой переменной x: $u = u(x)$, а $du = u'\,dx$, эту формулу можно переписать в виде, более удобном для применения:

$$\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u| + C. \qquad (1,32)$$

Следует обратить внимание на подынтегральную функцию $\frac{u'}{u}$: числитель дроби является производной ее знаменателя, а первообразная функция равна натуральному логарифму абсолютной величины знаменателя. Если $u = x$, то $u' = 1$, и формула (1,32) запишется так:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C. \qquad (1,33)$$

Задача 1,17. Вычислить интегралы: 1) $\int \frac{dx}{x+a}$;

2) $\int \frac{2x}{x^2+5} dx$; 3) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx$; 4) $\int \frac{x}{1-x^2} dx$;

5) $\int \frac{dx}{a-x}$; 6) $\int \frac{dx}{x\ln x}$; 7) $\int \frac{x^2}{4+3x^3} dx$;

8) $\int \frac{x}{1+x} dx$; 9) $\int \frac{e^x}{5+e^x} dx$; 10) $\int \frac{x^3}{x+2} dx$.

Решение. 1) Подынтегральная функция $\frac{1}{x+a}$ — дробь, числитель которой является производной знаменателя $(x+a)$. Дробь имеет вид $\frac{u'}{u}$, а потому на основании формулы (1,32) интеграл равен натуральному логарифму абсолютной величины знаменателя

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C.$$

2) И в этом примере подынтегральная функция — дробь, числитель которой есть производная знаменателя: $u = x^2 + 5$, $u' = 2x$, дробь имеет вид $\frac{u'}{u}$, формула (1,32) может быть применена:

$$\int \frac{2x}{x^2+5} dx = \ln(x^2+5) + C.$$

Здесь $x^2 + 5$ не следует писать под знаком абсолютной величины, так как $x^2 + 5 > 0$ при любом действительном значении x.

3) Стоящую под знаком интеграла дробь $\frac{\sin x}{1+\cos x}$ можно преобразовать так, чтобы ее числитель стал равным производной знаменателя.

Действительно, $\frac{\sin x}{1+\cos x} = -\frac{-\sin x}{1+\cos x}$. Если $u = 1 + \cos x$, то $u' = -\sin x$, дробь имеет вид $\frac{u'}{u}$, формула (1,32) применима и

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x}{1+\cos x} dx = -\ln|1+\cos x| + C.$$

4) Дробь $\frac{x}{1-x^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{1-x^2}$. Если $u = 1 - x^2$, то $u' = -2x$, и числитель второй дроби равен производной знаменателя. Эта дробь имеет вид $\frac{u'}{u}$. Поэтому по формуле (1,32)

$$\int \frac{x}{1-x^2} dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{1-x^2} dx = -\frac{1}{2}\ln|1-x^2| + C.$$

5) Чтобы преобразовать дробь $\frac{1}{a-x}$ к виду $\frac{u'}{u}$, перепишем ее так: $\frac{1}{a-x} = -\frac{-1}{a-x}$. Если знаменатель дроби $a - x = u$, то $u' = -1$, числитель дроби равен производной знаменателя, и по формуле (1,32) получаем

$$\int \frac{dx}{a-x} = -\int \frac{-1}{a-x} dx = -\ln|a-x| + C.$$

6) Перепишем подынтегральную функцию в виде $\frac{1}{x\ln x}=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$. Если взять $u=\ln x$, то $u'=\frac{1}{x}$, и числитель дроби равен производной ее знаменателя. Поэтому на основании (1,32) имеем

$$\int\frac{dx}{x\ln x}=\int\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}dx=\ln|\ln x|+C.$$

7) Подынтегральную функцию можно преобразовать так, чтобы ее числитель был равен производной знаменателя: $\frac{x^2}{4+3x^3}=$ $=\frac{1}{9}\frac{9x^2}{4+3x^3}$. Принимаем, что $u=4+3x^3$, тогда $u'=9x^2$. Вторая дробь имеет вид $\frac{u'}{u}$, и по формуле (1,32) получаем

$$\int\frac{x^2}{4+3x^3}dx=\frac{1}{9}\int\frac{9x^2}{4+3x^3}dx=\frac{1}{9}\ln|4+3x^3|+C.$$

8) Дробь $\frac{x}{1+x}$ — рациональная, неправильная: степень ее числителя равна степени знаменателя. С помощью деления можно из этой дроби выделить целую часть. Действительно, если разделить x на $x+1$, то получится $1-\frac{1}{x+1}$. Таким образом,

$$\int\frac{x}{x+1}dx=\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=\int dx-\int\frac{1}{x+1}dx=x-\ln|x+1|+C$$

(применены формулы (1,8) и (1,32), при вычислении второго интеграла учтено, что числитель дроби 1 равен производной знаменателя дроби).

9) Если $u=5+e^x$, то $u'=e^x$. Дробь имеет вид $\frac{u'}{u}$, и по формуле (1,32) получаем

$$\int\frac{e^x}{5+e^x}dx=\ln(5+e^x)+C$$

(так как при любом значении x имеет место неравенство: $5+$ $+e^x>0$, то выражение $5+e^x$ мы не поставили под знак абсолютной величины).

10) Дробь $\frac{x^3}{x+2}$ — неправильная, так как степень числителя больше степени знаменателя. Чтобы выделить целую часть, разделим x^3 на $x+2$ и получим $\frac{x^3}{x+2}=x^2-2x+4-\frac{8}{x+2}$, а потому

$$\int\frac{x^3}{x+2}dx=\int\left(x^2-2x+4-\frac{8}{x+2}\right)dx=\int x^2\,dx-2\int x\,dx+$$
$$+4\int dx-8\int\frac{dx}{x+2}=\frac{x^3}{3}-x^2+4x-8\ln|x+2|+C.$$

В этом примере вместо деления x^3 на $x+2$ можно было представить дробь в таком виде:

$$\frac{x^3}{x+2}=\frac{x^3+8-8}{x+2}=\frac{x^3+8}{x+2}-\frac{8}{x+2}=\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}-\frac{8}{x+2}=$$
$$=x^2-2x+4-\frac{8}{x+2}.$$

Аналогично в восьмом примере дробь $\frac{x}{1+x}=\frac{x+1-1}{1+x}=1-$ $-\frac{1}{1+x}$.

Задача 1,18 (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы: 1) $\int\frac{dx}{a+bx}$; 2) $\int\frac{x\,dx}{a^2-b^2x^2}$; 3) $\int\frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg}x}$;

4) $\int\frac{dx}{\cos^2 x\operatorname{tg}x}$; 5) $\int\frac{\sin x}{5+7\cos x}dx$; 6) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$;

7) $\int\frac{dx}{x(1-\ln x)}$; 8) $\int\frac{\sin 2x}{b^2\cos^2 x+a^2}dx$; 9) $\int\frac{x^4}{x-1}dx$;

10) $\int\frac{3x-2}{2x+3}dx$; 11) $\int\operatorname{tg}x\,dx$; 12) $\int\operatorname{ctg}x\,dx$.

Ответ. 1) $\frac{1}{b}\ln|a+bx|+C$ $\left(x\neq-\frac{a}{b}\right)$;

2) $-\frac{1}{2b^2}\ln|a^2-b^2x^2|+C$; 3) $\ln|\operatorname{arctg}x|+C$;

4) $\ln|\operatorname{tg}x|+C$; 5) $-\frac{1}{7}\ln|5+7\cos x|+C$;

6) $\ln|\arcsin x|+C$ $(x\neq 0)$; 7) $-\ln|1-\ln x|+\ln C=\ln\left|\frac{C}{1-\ln x}\right|$;

8) $-\frac{1}{b^2}\ln|b^2\cos^2 x+a^2|+C$; 9) $\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|+C$;

10) $\frac{3}{2}x-\frac{13}{4}\ln|2x+3|+C$; 11) $-\ln|\cos x|+C$;

12) $\ln|\sin x|+C$.

ВТОРОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Интегрирование показательной и тригонометрических функций.

На этом практическом занятии мы проведем упражнения в непосредственном интегрировании по формулам (1,13) — (1,20).

1. Интегрирование показательной функции (упражнения в применении формул (1,13) и (1,14)).

Придадим этим формулам вид, который более удобен для применения их на практике: считая u функцией независимой переменной x: $u = u(x)$, запишем, что $du = u'\,dx$, а потому формулы (1,13) и (1,14) перепишутся в виде:

$$\int a^u u'\,dx = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1); \tag{2,1}$$

$$\int e^u u'\,dx = e^u + C. \tag{2,2}$$

Здесь следует обратить внимание на то, что подынтегральная функция в этих формулах содержит множитель u', являющийся производной функции u, стоящей в показателе степени. Без этого множителя формулы (2,1) и (2,2) не верны. Если x — независимая переменная, т. е. $u = x$, то $u' = 1$, формулы (2,1) и (2,2) перепишутся так:

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1); \tag{2,3}$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C. \tag{2,4}$$

Задача 2,1. Вычислить интегралы: 1) $\int 3^x\,dx$; 2) $\int (\sqrt{2})^x\,dx$; 3) $\int 4^{-x}\,dx$; 4) $\int e^{-x}\,dx$; 5) $\int 2^{3x}\,dx$; 6) $\int e^{5x}\,dx$.

Решение. 1) Этот пример не требует пояснений. Он решается непосредственным применением формулы (2,3). Полагая в ней $a = 3$, получаем $\int 3^x\,dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C$.

2) Точно так же полагая в (2,3) $a = \sqrt{2}$, получаем, что

$$\int (\sqrt{2})^x\,dx = \frac{(\sqrt{2})^x}{\ln \sqrt{2}} + C = \frac{2(\sqrt{2})^x}{\ln 2} + C.$$

3) Этот интеграл не может быть вычислен по формуле (2,3), так как в показателе степени стоит не x, а $-x$. Поэтому обратимся к формуле (2,1). Перепишем подынтегральную функцию в виде $4^{-x} = -4^{-x}\cdot(-1)$. Такое преобразование нам понадобилось для того, чтобы ввести множитель -1, который является производной от показателя степени $-x$. Теперь уже подынтегральная функция содержит производную от показателя степени, и мы получаем при $a = 4$, полагая, что $u = -x$:

$$\int 4^{-x}\,dx = \int -4^{-x}(-1)\,dx = -\int \underbrace{4^{-x}}_{4^u}\cdot\underbrace{(-1)}_{u'}\,dx = -\frac{4^{-x}}{\ln 4} + C.$$

4) Запишем, что $e^{-x} = -e^{-x}(-1)$ и применим формулу (2,2). Полагая в ней $u = -x$, имеем

$$\int e^{-x}\,dx = -\int \underbrace{e^{-x}}_{e^u}\cdot\underbrace{(-1)}_{u'}\,dx = -e^{-x} + C.$$

5) При решении этого примера формула (2,1) не может быть применена, так как подынтегральная функция не содержит множителя u', являющегося производной от показателя степени $u = 3x$. Но так как $u' = 3$, введем такой множитель, умножив и разделив подынтегральную функцию на 3. Тогда можно будет применить формулу (2,1): $2^{3x} = \frac{1}{3} \cdot 2^{3x} \cdot 3$. Поэтому

$$\int 2^{3x}\,dx = \int \frac{1}{3} \cdot 2^{3x} \cdot 3\,dx = \frac{1}{3}\int \underbrace{2^{3x}}_{2^u} \cdot \underbrace{3}_{u'}\,dx = \frac{1}{3}\frac{2^{3x}}{\ln 2} + C.$$

6) Поступая так же, как в предыдущем примере, получаем по формуле (2,2)

$$\int e^{5x}\,dx = \int \frac{1}{5} e^{5x} 5\,dx = \frac{1}{5}\int \underbrace{e^{5x}}_{e^u} \cdot \underbrace{5}_{u'}\,dx = \frac{1}{5} e^{5x} + C.$$

Задача 2,2. Вычислить интегралы: 1) $\int a^{kx}\,dx$; 2) $\int e^{kx}\,dx$;

3) $\int 5^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$; 4) $\int e^{\cos x} \sin x\,dx$; 5) $\int 7^{x^2} x\,dx$; 6) $\int e^{x^3} x^2\,dx$;

7) $\int 2^{\operatorname{tg} x} \sec^2 x\,dx$; 8) $\int e^{-(x^3+x+3)}(3x^2+1)\,dx$; 9) $\int e^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2}\,dx$;

10) $\int (e^x + e^{-x})^2\,dx$.

Решение. 1) При вычислении этого интеграла следует иметь в виду, что k — любое действительное число. Подынтегральная функция a^{kx} не содержит множителя u'. Если $u = kx$, то $u' = k$. Чтобы ввести этот множитель, перепишем подынтегральную функцию так: $a^{kx} = \frac{1}{k} a^{kx} k$. Поэтому

$$\int a^{kx}\,dx = \frac{1}{k}\int \underbrace{a^{kx}}_{a^u} \cdot \underbrace{k}_{u'}\,dx = \frac{1}{k}\frac{a^{kx}}{\ln a} + C.$$

2) Применим рассуждения, проведенные в предыдущем примере: $e^{kx} = \frac{1}{k} e^{kx} k$, а потому

$$\int e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}\int \underbrace{e^{kx}}_{e^u} \cdot \underbrace{k}_{u'}\,dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C.$$

Этот результат полезно запомнить. Зная его, сразу получаем, что например, $\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3} e^{3x} + C$; $\int e^{\frac{x}{2}}\,dx = 2e^{\frac{x}{2}} + C$ $\left(\text{здесь } k = \frac{1}{2},\ \frac{1}{k} = 2\right)$; $\int e^{-\frac{x}{3}}\,dx = -3e^{-\frac{x}{3}} + C$ $\left(\text{здесь } k = -\frac{1}{3},\ \frac{1}{k} = -3\right)$, и т. д.

3) Здесь показатель степени $u=\sqrt{x}$, $u'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Подынтегральная функция вместо этого множителя содержит множитель $\frac{1}{\sqrt{x}}$. Умножая и деля на $\frac{1}{2}$, получим $5^{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}}=2\ \ 5^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$, а потому по формуле (2,1) при $a=5$

$$\int 5^{\sqrt{x}}\ \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=2\int \underbrace{5^{\sqrt{x}}}_{5^u}\cdot\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{u'}\,dx=2\cdot\frac{5^{\sqrt{x}}}{\ln 5}+C.$$

4) В примере $u=\cos x$; $u'=-\sin x$. Значит, недостает множителя -1. Подынтегральную функцию представим в виде $e^{\cos x}\sin x=-e^{\cos x}(-\sin x)$, поэтому по формуле (2,2)

$$\int e^{\cos x}\sin x\,dx=-\int \underbrace{e^{\cos x}}_{e^u}\underbrace{(-\sin x)}_{u'}\,dx=-e^{\cos x}+C.$$

5) Здесь $u=x^2$; $u'=2x$.

Подынтегральная же функция содержит множитель x. Умножая и деля ее на 2, запишем, что $7^{x^2}x=\frac{1}{2}\cdot 7^{x^2}\ \ 2x$, а $\int 7^{x^2}x\,dx=$
$=\frac{1}{2}\int \underbrace{7^{x^2}}_{7^u}\ \ \underbrace{2x}_{u'}\,dx=\frac{1}{2}\frac{7^{x^2}}{\ln 7}+C.$

6) В этом примере функция $u=x^3$, ее производная $u'=3x^2$. Подынтегральная же функция содержит множитель x^2. Умножая и деля ее на три, получим $e^{x^3}x^2=\frac{1}{3}e^{x^3}3x^2$. По формуле (2,2) находим

$$\int e^{x^3}x^2\,dx=\frac{1}{3}\int \underbrace{e^{x^3}}_{e^u}\ \ \underbrace{3x^2}_{u'}\,dx=\frac{1}{3}e^{x^3}+C.$$

7) Этот пример решается без предварительных преобразований, так как множитель $\sec^2 x$ — производная от функции $u=\operatorname{tg}x$ — входит в подынтегральную функцию. По формуле (2,1) при $a=2$ получаем

$$\int \underbrace{2^{\operatorname{tg}x}}_{2^u}\ \ \underbrace{\sec^2 x}_{u'}\,dx=\frac{2^{\operatorname{tg}x}}{\ln 2}+C.$$

8) Полагая здесь $u=-(x^3+x+3)$, имеем $u'=-(3x^2+1)$. Вместо этого множителя подынтегральная функция содержит множитель $3x^2+1$. Чтобы получить требуемый множитель u', подынтегральную функцию представим в виде $e^{-(x^3+x+3)}(3x^2+1)=-e^{-(x^3+x+3)}[-(3x^2+1)]$ и на основании (2,2) получим

$$\int e^{-(x^3+x+1)}(3x^2+1)\,dx=-\int \underbrace{e^{-(x^3+x+1)}}_{e^u}\underbrace{[-(3x^2+1)]}_{u'}\,dx=$$
$$=-e^{-(x^3+x+1)}+C.$$

9) Здесь функция $u=\frac{1}{x}$, ее производная $u'=-\frac{1}{x^2}$. Подынтегральную функцию перепишем в виде $e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}=-e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$, и по формуле (2,2) найдем

$$\int e^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}dx=-\int \underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{e^u}\cdot\underbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}_{u'}dx=-e^{\frac{1}{x}}+C.$$

10) $(e^x+e^{-x})^2=e^{2x}+2+e^{-2x}$. Учитывая решение второго примера, получаем

$$\int(e^x+e^{-x})^2\,dx=\int(e^{2x}+2+e^{-2x})\,dx=\int e^{2x}\,dx+\int 2\,dx+$$
$$+\int e^{-2x}\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}+2x-\frac{1}{2}e^{-2x}+C.$$

Задача 2,3 (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы: 1) $\int(e^{ks}-e^{-ks})\,ds$; 2) $\int\frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

3) $\int e^{\sin x}\cos x dx$; 4) $\int(e^{\frac{x}{3}}+2)^3e^{-\frac{x}{4}}\,dx$; 5) $\int 9^{x^3+6x^2+3x}(x^2+4x+1)\,dx$;

6) $\int\frac{(a^x-b^x)^2}{a^xb^x}dx$; 7) $\int(e^{ay}+e^{-ay})^3\,dy$; 8) $\int\frac{e^{\operatorname{arctg}2x}}{1+4x^2}dx$;

9) $\int e^{5+\sin^2 2x}\sin 4x dx$.

Ответ. 1) $\frac{1}{k}(e^{ks}+e^{-ks})+C$; 2) $e^{\arcsin x}+C$; 3) $e^{\sin x}+C$;

4) $\frac{4}{3}e^{\frac{3}{4}x}+\frac{72}{5}e^{\frac{5}{12}x}+144e^{\frac{1}{12}x}-32e^{-\frac{x}{4}}+C$; 5) $\frac{1}{3\ln 9}\cdot 9^{x^3+6x^2+3x}+C$;

6) $\frac{1}{\ln a-\ln b}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^x-\left(\frac{b}{a}\right)^x\right]-2x+C$; 7) $\frac{1}{3a}(e^{3ay}-e^{-3ay})+\frac{3}{a}(e^{ay}-$

$-e^{-ay})+C$; 8) $\frac{1}{2}e^{\operatorname{arctg}2x}+C$; 9) $\frac{1}{2}e^{5+\sin^2 2x}+C$.

2. Интегрирование тригонометрических функций (упражнения в применении формул (1,15) — (1,20).

Полагая, что функция u, входящая в эти формулы, есть функция независимой переменной x: $u=u(x)$, и заменяя дифференциал этой функции du по формуле $du = u'\,dx$, формулы (1,15) — (1,20) можно переписать в виде более удобном для практики:

$$\int \sin u \cdot u'\,dx = -\cos u + C; \tag{2,5}$$

$$\int \cos u \cdot u'\,dx = \sin u + C; \tag{2,6}$$

$$\int \operatorname{tg} u \cdot u'\,dx = -\ln|\cos u| + C; \tag{2,7}$$

$$\int \operatorname{ctg} u \cdot u'\,dx = \ln|\sin u| + C; \tag{2,8}$$

$$\int \frac{u'}{\cos^2 u}\,dx = \operatorname{tg} u + C; \tag{2,9}$$

$$\int \frac{u'}{\sin^2 u}\,dx = -\operatorname{ctg} u + C. \tag{2,10}$$

Следует обратить внимание на то, что множитель u', входящий в подынтегральную функцию во всех этих формулах, есть производная от той функции u, которая находится под знаком тригонометрической функции. Если u — независимая переменная, $u = x$, то $u' = 1$, и эти формулы перепишутся так:

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C; \tag{2,11}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C; \tag{2,12}$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C; \tag{2,13}$$

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C; \tag{2,14}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C; \tag{2,15}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C. \tag{2,16}$$

Задача 2,4. Вычислить интегралы: 1) $\int \sin mx\,dx$; 2) $\int \cos nx\,dx$; 3) $\int \operatorname{tg} kx\,dx$; 4) $\int \operatorname{ctg} lx\,dx$; 5) $\int \frac{1}{\cos^2 px}\,dx$; 6) $\int \frac{1}{\sin^2 qx}\,dx$.

Во всех примерах буквы m, n, p, q, k и l — величины постоянные, не равные нулю.

Решение. 1) Формулу (2,5) можно применить в том случае, если подынтегральная функция имеет множитель u', являющийся производной от функции, стоящей под знаком синуса.

В нашем случае функция $u = mx$, а ее производная $u' = m$. Множитель m в подынтегральной функции не содержится. Умножим и разделим подынтегральную функцию на m, т. е. представим ее в виде $\sin mx = \frac{1}{m}\sin mx \cdot m$; тогда, вынося постоянный множитель $\frac{1}{m}$ за знак интеграла, по формуле (2,5) получим

$$\int \sin mx\,dx = \frac{1}{m}\int \sin \underbrace{mx}_{u} \cdot \underbrace{m}_{u'}\,dx = -\frac{1}{m}\cos mx + C.$$

2) Повторяя те же рассуждения, что и при решении первого примера, получим по формуле (2,6)

$$\int \cos nx\,dx = \frac{1}{n}\int \cos \underbrace{nx}_{u} \cdot \underbrace{n}_{u'}\,dx = \frac{1}{n}\sin nx + C.$$

На основании этих результатов легко вычисляются, например, такие интегралы: $\int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$; $\int \sin\frac{x}{3}\,dx = -\frac{1}{\frac{1}{3}}\cos\frac{x}{3} + C = -3\cos\frac{x}{3} + C$ $\left(\text{здесь } u = \frac{x}{3};\quad u' = \frac{1}{3}\right)$;

$\int \cos\sqrt{2}x\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}x + C$; $\int \cos 4x\,dx = \frac{1}{4}\sin 4x + C$;

$\int \cos\frac{x}{m}\,dx = m\sin\frac{x}{m} + C$ $\left(\text{здесь } u = \frac{x}{m};\ u' = \frac{1}{m}\right)$.

3) Здесь $u = kx$; $u' = k$. Подынтегральная функция не содержит множителя k. Чтобы можно было применить формулу (2,7), преобразуем подынтегральное выражение так, чтобы оно содержало множитель k: умножим и разделим его на k и представим в виде $\operatorname{tg} kx = \frac{1}{k}\operatorname{tg} kx \cdot k$. Теперь на основании (2,7) получаем

$$\int \operatorname{tg} kx\,dx = \frac{1}{k}\int \operatorname{tg}\underbrace{kx}_{u}\ \underbrace{k}_{u'}\,dx = -\frac{1}{k}\ln|\cos kx| + C.$$

4) Повторяя рассуждения, проведенные в предыдущем примере, получаем по формуле (2,8)

$$\int \operatorname{ctg} lx\,dx = \frac{1}{l}\int \operatorname{ctg} lx \cdot dx = \frac{1}{l}\ln|\sin lx| + C.$$

Используя результаты, полученные при решении этого и предыдущего примера, легко вычислим такие интегралы:

$$\int \operatorname{tg} 2x\,dx = -\frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + C;\quad \int \operatorname{tg}\frac{x}{5}\,dx = -5\ln\left|\cos\frac{x}{5}\right| + C;$$

$$\int \operatorname{ctg} 3x\,dx = \frac{1}{3}\ln|\sin 3x| + C;\quad \int \operatorname{ctg}\frac{x}{a}\,dx = a\ln\left|\sin\frac{x}{a}\right| + C;$$

$$\int \operatorname{ctg}\frac{x}{7}\,dx = 7\ln\left|\sin\frac{x}{7}\right| + C.$$

5) По формуле (2,9) получаем

$$\int \frac{1}{\cos^2 px}\,dx = \frac{1}{p}\int \frac{1}{\cos^2 \underbrace{px}_{u}}\underbrace{p}_{u'}\,dx = \frac{1}{p}\operatorname{tg} px + C$$

(подынтегральную функцию мы умножили и разделили на p, а постоянный множитель $\frac{1}{p}$ вынесли за знак интеграла), поэтому, например, $\int \frac{dx}{\cos^2 3x} = \frac{1}{3} \operatorname{tg} 3x + C$; $\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{6}} = 6 \operatorname{tg} \frac{x}{6} + C$; $\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C$.

6) На основании формулы (2,10), повторяя рассуждения, проведенные при решении предыдущих примеров, получаем

$$\int \frac{1}{\sin^2 qx} dx = \frac{1}{q} \int \frac{1}{\sin^2 \underbrace{qx}_{u}} \underbrace{q dx}_{u'} = -\frac{1}{q} \operatorname{ctg} qx + C$$

(подынтегральную функцию мы умножили и разделили на q, а постоянный множитель $\frac{1}{q}$ вынесли за знак интеграла). Полученный результат позволяет легко вычислить, например, такие интегралы: $\int \frac{1}{\sin^2 5x} dx = -\frac{1}{5} \operatorname{ctg} 5x + C$; $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{4}} = -4 \operatorname{ctg} \frac{x}{4} + C$; $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{b}} = -b \operatorname{ctg} \frac{x}{b} + C$.

Задача 2,5 (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы: 1) $\int \frac{dx}{1 - \cos x}$; 2) $\int \frac{dx}{1 + \cos x}$.

Указания. 1) $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$; 2) $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$.

Ответ. 1) $-\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + C$; 2) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} + C$.

Задача 2,6 (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы: 1) $\int \sin(x^2)\, x dx$; 2) $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$; 3) $\int \operatorname{tg}(2x - 3)\, dx$; 4) $\int \sin(\ln x) \frac{1}{x} dx$; 5) $\int \frac{dx}{\cos^2(ax + b)}$; 6) $\int \cos(e^x)\, e^x\, dx$; 7) $\int \cos(\ln x) \frac{1}{x} dx$; 8) $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$; 9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$; 10) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$.

Указания. В восьмом примере: $\frac{1}{1 + \sin x} = \frac{1 - \sin x}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} = \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

В девятом примере: $\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}$.

Ответ.

1) $-\frac{1}{2}\cos x^2 + C$; 2) $2\sin\sqrt{x} + C$; 3) $-\frac{1}{2}\ln|\cos(2x-3)| + C$;

4) $-\cos\ln|x| + C$; 5) $\frac{1}{a}\operatorname{tg}(ax+b) + C$; 6) $\sin(e^x) + C$;

7) $\sin\ln|x| + C$; 8) $\operatorname{tg}x - \sec x + C$; 9) $\operatorname{tg}x - \operatorname{ctg}x + C$;

10) $-\operatorname{cosec}x + C$.

Задача 2,7 (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы:

1) $\int \sin(2x+5)\,dx$; 2) $\int \frac{dx}{\left(x\cos\frac{1}{x}\right)^2}$; 3) $\int \frac{\operatorname{tg}(\ln x)}{x}dx$; 4) $\int \frac{\operatorname{tg}x}{\sin 2x}dx$;

5) $\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x}dx$; 6) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x}dx$; 7) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x}dx$; 8) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}dx$;

9) $\int \cos(ax+b)\,dx$; 10) $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$; 11) $\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$;

12) $\int \operatorname{ctg}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}dx$.

Указания. В седьмом примере: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, после деления на $\sin^2 x$ заменить $\operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1$. В восьмом примере: после деления на $\cos^2 x$ заменить $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$. В примере 10 заменить $\operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1$. В примере 11 числитель и знаменатель дроби разделить на $\cos^2 x$. Подынтегральная функция примет вид $\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg}x}$.

Ответ.

1) $-\frac{1}{2}\cos(2x+5)\,C$; 2) $-\operatorname{tg}\frac{1}{x} + C$; 3) $-\ln|\cos(\ln x)| + C$;

4) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}x + C$; 5) $2\ln|\sin x| + C$; 6) $-2\ln|\cos x| + C$;

7) $-\operatorname{ctg}x - 2x + C$; 8) $2x - \operatorname{tg}x + C$; 9) $\frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$;

10) $-\operatorname{ctg}x - x + C$; 11) $\ln|\operatorname{tg}x| + C$; 12) $-\ln\left|\sin\frac{1}{x}\right| + C$.

Задача 2,8 (для повторения материала первого практического занятия). Вычислить интегралы: 1) $\int \sqrt[3]{\operatorname{tg}2x}\sec^2 2x\,dx$ (воспользоваться формулой (1,29)); 2) $\int \frac{x^2}{7+3x^3}dx$ (воспользоваться формулой (1,32)); 3) $\int \frac{\operatorname{ctg}ax}{\sin^2 ax}dx$ (формула (1,29)); 4) $\int (ax^2+b)^n x\,dx$ $(n \neq -1)$ (формула (1,29)); 5) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$ (формула (1,29)); 6) $\int \frac{e^{ax}}{e^{ax}+5}dx$ (формула (1,32)); 7) $\int \frac{\sin 2x}{\sin^n x}dx$ $(n \neq -2)$ $(\sin 2x = 2\sin x\cos x,$

сократить дробь и воспользоваться формулой (1,29)); 8) $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{7+\ln^2 x}}dx$ (воспользоваться формулой (1,31)); 9) $\int \frac{dx}{(1+4x^2)\sqrt{5+\operatorname{arctg} 2x}}$; 10) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{a^2+b^2\sin^2 x}}\,dx$; 11) $\int \frac{\sin x\cos x}{a\cos^2 x+b\sin^2 x}dx$ (воспользоваться формулой (1,32)); 12) $\int \frac{b\cos x-c\sin x}{\sqrt{a+b\sin x+c\cos x}}dx$; 13) $\int \frac{x\,dx}{a^2-x^2}$; 14) $\int\frac{3x\,dx}{4+7x^2}$; 15) $\int\frac{x^3}{\sqrt{5+4x^4}}\,dx$; 16) $\int\frac{e^{3x}}{e^x+2}\,dx$; 17) $\int\frac{dx}{a+bx}$; 18) $\int\frac{1}{x\ln^4 x}\,dx$; 19) $\int\frac{\operatorname{arctg} x+x}{1+x^2}\,dx$; 20) $\int\frac{3x\,dx}{\sqrt{9-7x^2}}$.

Указание. В примере 16 разделить e^{3x} на e^x+2, получится $e^{2x}-2e^x+\frac{4e^x}{e^x+2}$.

Ответ.

1) $\frac{3}{8}\operatorname{tg}2x\sqrt[3]{\operatorname{tg}2x}+C$; 2) $\frac{1}{9}\ln|7+3x^3|+C$;

3) $-\frac{1}{2a}\operatorname{ctg}^2 ax+C$; 4) $\frac{1}{2a(n+1)}(ax^2+b)^{n+1}$;

5) $-\frac{1}{\ln x}+C$; 6) $\frac{1}{a}\ln(e^{ax}+5)+C$;

7) $-\frac{2}{(n-2)\sin^{n-2}x}+C$; 8) $\sqrt{7+\ln^2 x}+C$;

9) $\sqrt{5+\operatorname{arctg}2x}+C$; 10) $\frac{1}{b^2}\sqrt{a^2+b^2\sin^2 x}+C$;

11) $\frac{1}{2(b-a)}\ln(a\cos^2 x+b\sin^2 x)+C$; 12) $2\sqrt{a+b\sin x+c\cos x}+C$;

13) $-\frac{1}{2}\ln(a^2-x^2)+C$; 14) $\frac{3}{14}\ln(4+7x^2)+C$;

15) $\frac{1}{8}\sqrt{5+4x^4}+C$; 16) $\frac{1}{2}e^{2x}-2e^x+4\ln(e^x+2)+C$;

17) $\frac{1}{b}\ln|a+bx|+C$; 18) $-\frac{1}{3\ln^3 x}+C$;

19) $\frac{1}{2}[\operatorname{arctg}^2 x+\ln(1+x^2)]+C$; 20) $-\frac{3}{7}\sqrt{9-7x^2}+C$.

ТРЕТЬЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: *Продолжение упражнений в непосредственном интегрировании.*

1. Упражнения в применении формул (1,21) и (1,22)

Эти формулы перепишем в виде, более удобном для практики. Полагая, как и раньше, что функция u, входящая в эти формулы, есть функция независимой переменной x: $u=u(x)$, заменим ее дифференциал du по формуле $du = u'\,dx$ и перепишем эти формулы так:

$$\int \frac{u'}{1+u^2}\,dx = \operatorname{arctg} u + C; \tag{3,1}$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\,dx = \arcsin u + C. \tag{3,2}$$

Следует обратить внимание на то, что в этих формулах числитель дроби u' есть производная *первой степени* функции u, которая в (3,1) находится в квадрате в знаменателе, а в (3,2) — в знаменателе под квадратным корнем.

Прежде чем начать упражнения, выведем более общие формулы, чем (3,1) и (3,2), а именно: вычислим интегралы

$$\int \frac{u'}{a^2+u^2}\,dx \text{ и } \int \frac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}}\,dx. \tag{3,3}$$

В первом интеграле преобразуем подынтегральную функцию так, чтобы можно было применить формулу (3,1):

$$\frac{u'}{a^2+u^2} = \frac{u'}{a^2\left(1+\frac{u^2}{a^2}\right)} = \frac{u'}{a^2\left[1+\left(\frac{u}{a}\right)^2\right]} = \underbrace{\frac{\frac{1}{a}u'}{a^2\,\frac{1}{a}\left[1+\left(\frac{u}{a}\right)^2\right]}}_{\substack{\text{Числитель и знаменатель дроби} \\ \text{умножен на } \frac{1}{a}}} = \frac{\left(\frac{u}{a}\right)'}{a\left[1+\left(\frac{u}{a}\right)^2\right]}.$$

Теперь числитель дроби $\left(\frac{u}{a}\right)'$ есть производная от первой степени функции $\left(\frac{u}{a}\right)^2$, которая находится в знаменателе, и формулу (3,1) можно применить.

Поэтому, вынося за знак интеграла постоянный множитель $\frac{1}{a}$, получаем

$$\int \frac{u'}{a^2+u^2}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{\left(\frac{u}{a}\right)'}{1+\left(\frac{u}{a}\right)^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C.$$

Итак,

$$\int \frac{u'}{a^2+u^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C. \tag{3,4}$$

Если $u = x$, то $u' = 1$, и эта формула запишется так:

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C. \tag{3,5}$$

Подынтегральную функцию второго интеграла (3,3) преобразуем так, чтобы можно было воспользоваться формулой (3,2).

$$\frac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}}=\frac{u'}{\sqrt{a^2\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)}}=\underbrace{\frac{\frac{u'}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{a}\right)^2}}}_{\substack{\text{Из-под корня}\\ \text{вынесен мно-}\\ \text{житель } a}}=\frac{\left(\frac{u}{a}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{a}\right)^2}}.$$

Теперь числитель дроби $\left(\frac{u}{a}\right)'$ есть производная от первой степени функции $\left(\frac{u}{a}\right)^2$, которая находится под корнем в знаменателе.

На основании формулы (3,2)

$$\int\frac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}}dx=\int\frac{\left(\frac{u}{a}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{a}\right)^2}}dx=\arcsin\frac{u}{a}+C.$$

Итак,

$$\int\frac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}}dx=\arcsin\frac{u}{a}+C. \tag{3,6}$$

Если $u=x$, то $u'=1$, и эта формула запишется так:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C. \tag{3,7}$$

Задача 3,1. Вычислить интегралы:

1) $I=\int\frac{dx}{7+x^2}$; 2) $I=\int\frac{dx}{10+x^2}$; 3) $I=\int\frac{dx}{8+5x^2}$;

4) $I=\int\frac{dx}{11+9x^2}$; 5) $I=\int\frac{3dx}{6+13x^2}$.

Решение. 1) Здесь $a^2=7$; $a=\sqrt{7}$, по формуле (3,5) получаем $I=\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{7}}+C$.

2) В этом примере $a^2=10$; $a=\sqrt{10}$, по формуле (3,5) получаем $I=\frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{10}}+C$.

3) В знаменателе дроби находится не x^2, а $5x^2$. Поэтому формула (3,5) непригодна. Здесь должна быть применена формула (3,4). Для этого надо в числителе иметь производную функции u, квадрат которой $u^2=5x^2$; $u=\sqrt{5}x$. Производная $u'=\sqrt{5}$.

Формулу (3,4) можно применить в том случае, если числитель подынтегральной функции будет равен u'. Мы этого достигнем, умножив его на $\sqrt{5}$, а чтобы не изменилась величина подынтегральной функции, разделим ее на $\sqrt{5}$ и представим в виде

$$\frac{1}{8+5x^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{8+(\sqrt{5}x)^2}.$$

Учитывая, что $a^2=8$, $a=2\sqrt{2}$, по формуле (3,4) получаем

$$I=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{\sqrt{5}}{8+(\underbrace{\sqrt{5}x}_{u})^2}dx=\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}x}{2\sqrt{2}}+C=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{10}x}{4}+C.$$

4) Этот пример ничем не отличается от предыдущего. Здесь $u^2=9x^2$; $u=3x$; $u'=3$. Чтобы можно было применить формулу (3,4), надо образовать в числителе u'. Умножим подынтегральную функцию на 3, а чтобы не изменилась ее величина, разделим ее на 3 и представим в виде $\frac{1}{11+9x^2}=\frac{1}{3}\frac{3}{11+(3x)^2}$. Теперь формулу (3,4) можно применить с учетом, что $a^2=11$; $a=\sqrt{11}$; $I=$ $=\frac{1}{3}\int\frac{3}{11+(\underbrace{3x}_{u})^2}dx=\frac{1}{3\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{3x}{\sqrt{11}}+C.$

5) Этот пример решим без подробных объяснений: $a^2=6$; $u^2=13x^2$; $u=\sqrt{13}x$; $a^2=6$; $a=\sqrt{6}$; $u'=\sqrt{13}$.

Подынтегральную функцию запишем в виде

$$\frac{3}{6+13x^2}=\frac{3}{\sqrt{13}}\frac{\sqrt{13}}{6+(\sqrt{13}x)^2},$$

а

$$I=\frac{3}{\sqrt{13}}\int\frac{\sqrt{13}}{6+(\sqrt{13}x)^2}dx=\frac{3}{\sqrt{13}}\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{13}x}{\sqrt{6}}+C.$$

Задача 3,2 (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы: 1) $\int\frac{dx}{5+16x^2}$; 2) $\int\frac{dx}{12+7x^2}$; 3) $\int\frac{dx}{14+15x^2}$; 4) $\int\frac{7dx}{15+19x^2}$; 5) $\int\frac{9dx}{5+21x^2}$.

Ответ.

1) $\frac{1}{4\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{4x}{\sqrt{5}}+C$; 2) $\frac{1}{2\sqrt{21}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}x}{2\sqrt{3}}+C$; 3) $\frac{1}{\sqrt{210}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{14}}x+C$,

4) $\frac{7}{\sqrt{285}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{15}}x+C$; 5) $\frac{9}{\sqrt{105}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{21}x}{\sqrt{5}}+C$.

Задача 3,3. Вычислить интегралы: 1) $I=\int\frac{x+3}{x^2+2}dx$; 2) $I=\int\frac{(3x+2)\,dx}{5x^2+7}$; 3) $I=\int\frac{9t+5}{8t^2+9}dt$.

Решение. 1) Подынтегральную функцию запишем в виде

$$\frac{x+3}{x^2+2}=\frac{x}{x^2+2}+\frac{3}{x^2+2};$$

каждую из этих дробей проинтегрируем и интеграл представим в виде суммы двух интегралов:

$$I=\underbrace{\int\frac{x}{x^2+2}dx}_{\substack{\text{Умножая числитель на 2,}\\ \text{получим в нем производ-}\\ \text{ную знаменателя}}}+3\underbrace{\int\frac{dx}{x^2+2}}_{\substack{\text{Применить фор-}\\ \text{мулу (3,5)}\\ a=\sqrt{2}}}=\frac{1}{2}\ln(x^2+2)+\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

2) Подынтегральную функцию представим как сумму двух дробей:

$$\frac{3x+2}{5x^2+7}=\frac{3x}{5x^2+7}+\frac{2}{5x^2+7}.$$

Каждую из этих дробей мы умеем интегрировать. Интеграл представим как сумму двух интегралов (постоянные множители вынесены за знак интеграла):

$$I=3\underbrace{\int\frac{x}{5x^2+7}dx}_{\substack{\text{Здесь в числителе}\\ \text{получится произ-}\\ \text{водная знаменате-}\\ \text{ля, если числитель}\\ \text{умножить на 10}}}+2\underbrace{\int\frac{dx}{5x^2+7}}_{\substack{\text{Применить (3,4) при}\\ u^2=(\sqrt{5}x)^2;\ u=\sqrt{5}x;\\ u'=\sqrt{5};\ a=\sqrt{7}}}=\frac{3}{10}\ln(5x^2+7)+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{5}\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{7}}+C.$$ Окончательно $$I=\frac{3}{10}\ln(5x^2+7)+\frac{2}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{7}}+C.$$

3) Этот пример следует решить самостоятельно.

Ответ. $\frac{9}{16}\ln(8t^2+9)+\frac{5}{6\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{2}t}{3}+C.$

Задача 3,4 (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы: 1) $\int\frac{7x+3}{10x^2+11}dx$; 2) $\int\frac{3x+8}{12x^2+23}dx$; 3) $\int\frac{dx}{a^2+b^2x^2}$ и проверить вычисления, проведенные в примерах 1 и 2, по формуле, полученной при решении примера 3.

Ответ. 1) $\frac{7}{20}\ln(10x^2+11)+\frac{3}{\sqrt{110}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{10}x}{\sqrt{11}}+C$;

2) $\frac{1}{8}\ln(12x^2+23)+\frac{4}{\sqrt{69}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{23}}x+C$;

3) $\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{bx}{a}+C$.

Задача 3,5. Вычислить интегралы: 1) $\int\frac{\cos x}{5+\sin^2 x}dx$; 2) $I=\int\frac{x\,dx}{7+x^4}$;
3) $I=\int\frac{e^{2x}\,dx}{4+e^{4x}}$; 4) $I=\int\frac{dx}{x(5+\ln^2 x)}$; 5) $I=\int\frac{\sec^2 x}{9+\operatorname{tg}^2 x}dx$;
6) $I=\int\frac{dx}{1+\cos^2 x}$.

Решение. 1) Если $u^2=\sin^2 x$, то $u=\sin x$; $u'=\cos x$; $a^2=5$, $a=\sqrt{5}$, а потому сразу без дополнительных преобразований получаем по формуле (3,4)

$$I=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\sin x}{\sqrt{5}}+C.$$

2) Возьмем $u^2=x^4$, тогда $u=x^2$, а $u'=2x$.

Чтобы получить в числителе $2x$, умножим его на 2, а чтобы величина подынтегральной функции не изменилась, разделим ее на 2 и запишем в виде $\frac{x}{7+x^4}=\frac{1}{2}\frac{2x}{7+(x^2)^2}$;

$$I=\frac{1}{2}\underbrace{\int\frac{2x}{7+(x^2)^2}dx}_{\text{Применяем формулу (3,4)}}=\frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{\sqrt{7}}+C.$$

3) Примем $u^2=e^{4x}$; $u=e^{2x}$. Тогда $u'=2e^{2x}$. Формулу (3,4) можно применить, если в числителе находится функция u' — производная функции u. Чтобы этого достигнуть, умножим и разделим подынтегральную функцию на 2, тогда она запишется так:
$\frac{e^{2x}}{4+e^{4x}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2e^{2x}}{4+(e^{2x})^2}$; $\quad I=\frac{1}{2}\underbrace{\int\frac{2e^{2x}}{4+(e^{2x})^2}dx}_{a^2=4;\ a=2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{e^{2x}}{2}+C=$

$$=\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{e^{2x}}{2}+C.$$

4) Полагаем, что $u^2=\ln^2 x=(\ln x)^2$; $u=\ln x$; $u'=\frac{1}{x}$.

Если мы представим подынтегральную функцию в виде $\frac{1}{x(5+\ln^2 x)}=\frac{\frac{1}{x}}{5+(\ln x)^2}$, то заметим, что в числителе имеется u', а потому формулу (3,4) применить можно ($a^2=5$; $a=\sqrt{5}$):

$$I=\int\frac{\frac{1}{x}}{5+(\ln x)^2}dx=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\ln x}{\sqrt{5}}+C.$$

5) Здесь $u^2 = \operatorname{tg}^2 x$; $u = \operatorname{tg} x$; $u' = \sec^2 x$, поэтому без дополнительных преобразований получаем ($a^2 = 9$; $a = 3$):

$$I = \int \frac{\sec^2 x}{9 + (\operatorname{tg} x)^2} dx = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{3} + C.$$

6) Вычисление этого интеграла связано с некоторыми трудностями.

Здесь надо догадаться, что интеграл может быть приведен к виду (3,4), если числитель и знаменатель дроби умножить на $\sec^2 x$. Выполняя это, получим

$$\frac{1}{1+\cos^2 x} = \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x + 1} = \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 1 + 1} = \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 2}.$$

Если теперь положить $u^2 = \operatorname{tg}^2 x$; $u = \operatorname{tg} x$; $u' = \sec^2 x$, формулу (3,4) можно применить, так как числитель содержит производную функции u. Тогда

$$I = \int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C.$$

Задача 3, 6 (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы: 1) $\int \frac{dx}{(5x+7)\sqrt{x}}$.

Указание. Представить $x = (\sqrt{x})^2$, взять $u = \sqrt{x}$; $u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2) $\int \frac{\cos x\, dx}{a^2 + b^2 \sin^2 x}$. Указание: $u^2 = b^2 \sin^2 x$; $u = b \sin x$; $u' = b \cos x$. Умножить и разделить подынтегральную функцию на b.

3) $\int \frac{dx}{4 + \cos^2 x}$. Указание: числитель и знаменатель дроби умножить на $\sec^2 x$. Подынтегральная функция примет вид $\frac{\sec^2 x}{4 \operatorname{tg}^2 x + 5}$ (учтено, что $\sec^2 x = \operatorname{tg}^2 x + 1$).

4) $\int \frac{dx}{5 + \sin^2 x}$. Указание: числитель и знаменатель умножить на $\operatorname{cosec}^2 x$. В знаменателе заменить $\operatorname{cosec}^2 x = \operatorname{ctg}^2 x + 1$.

Ответ. 1) $\frac{2}{\sqrt{35}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{5x}{7}} + C$; 2) $\frac{1}{ab} \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a} \sin x\right) + C$; 3) $\frac{1}{2\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2 \operatorname{tg} x}{\sqrt{5}}\right) + C$; 4) $-\frac{1}{\sqrt{30}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{5} \operatorname{ctg} x}{\sqrt{6}}\right) + C$.

Теперь выполним упражнения, связанные с формулами (3, 6) и (3, 7).

Напомним еще раз построение этих формул: числитель дроби есть производная от первой степени той функции, которая в квадрате стоит под корнем в знаменателе.

Задача 3, 7. Вычислить интегралы: 1) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$;

2) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{10-x^2}}$; 3) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}$; 4) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{7-8x^2}}$.

Решение. 1) Здесь сразу можно применить формулу (3, 7), полагая, что $a^2=5$; $a=\sqrt{5}$. Получаем $I=\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}+C$.

2) Здесь также формула (3,7) может быть применена сразу: $a^2=10$; $a=\sqrt{10}$, а $I=\arcsin\frac{x}{\sqrt{10}}+C$.

3) Применить формулу (3, 7) здесь нельзя, так как u^2 равно не x^2, как в двух предыдущих примерах, а $2x^2$. Поэтому надо применить формулу (3, 6), полагая $u^2=2x^2=(\sqrt{2}x)^2$; $u=\sqrt{2}x$. Числитель дроби подынтегральной функции должен быть равен $u'=\sqrt{2}$. Но так как $\sqrt{2}$ в числителе не содержится, то мы умножим числитель на $\sqrt{2}$, а чтобы выражение не изменило своей величины, и разделим его на $\sqrt{2}$. Подынтегральная функция перепишется в виде

$$\frac{1}{\sqrt{3-2x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3-(\sqrt{2}x)^2}},\ \text{а}\quad I=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}x+C.$$

4) Здесь $u^2=8x^2$; $u^2=(2\sqrt{2}x)^2$; $u=2\sqrt{2}x$; $u'=2\sqrt{2}$. Для того чтобы можно было применить формулу (3, 6), надо, чтобы числитель дроби в этой формуле был равен производной функции u, т. е. $2\sqrt{2}$. Умножим и разделим подынтегральную функцию на это число и получим

$$\frac{1}{\sqrt{7-8x^2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7-(2\sqrt{2}x)^2}}.$$

Теперь уже формулу (3, 6) можно применить. Постоянный множитель $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ вынесем за знак интеграла, получим

$$I=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7-(2\sqrt{2}x)^2}}dx=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\frac{2\sqrt{2}x}{\sqrt{7}}+C.$$

$$\left|\ a^2=7;\quad a=\sqrt{7};\quad u=2\sqrt{2}x\ \right|$$

Задача 3, 8. (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы: 1) $\int\frac{dx}{\sqrt{80-11x^2}}$; 2) $\int\frac{dx}{\sqrt{36-49x^2}}$;

3) $\int\frac{dx}{\sqrt{19-17x^2}}$.

Ответ: 1) $\frac{1}{\sqrt{11}} \arcsin \frac{\sqrt{11}x}{4\sqrt{5}} + C$; 2) $\frac{1}{7} \arcsin \frac{7}{6} x + C$;
3) $\frac{1}{\sqrt{17}} \arcsin \frac{\sqrt{17}x}{\sqrt{19}} + C$.

Задача 3, 9. Вычислить интегралы:

1) $I = \int \frac{\cos x}{\sqrt{7 - 3\sin^2 x}} dx$; 2) $I = \int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{11 - 5\operatorname{tg}^2 x}} dx$;

3) $I = \int \frac{dx}{(1 + x^2)\sqrt{6 - 5\operatorname{arctg}^2 x}}$; 4) $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{15 - 7\ln^2 x}}$;

5) $I = \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$.

Решение. 1) Здесь функция $u^2 = 3\sin^2 x$, $u = \sqrt{3}\sin x$, ее производная $u' = \sqrt{3}\cos x$.

Для того, чтобы числитель дроби в подынтегральной функции был равен u', умножим его на $\sqrt{3}$, а чтобы дробь не изменила своей величины, ее надо и разделить на $\sqrt{3}$. Представим подынтегральную функцию в виде $\frac{\cos x}{\sqrt{7 - 3\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}\cos x}{\sqrt{7 - 3\sin^2 x}}$. Теперь числитель второй дроби содержит производную функции $u = \sqrt{3}\sin x$, и формула (3,6) может быть применена

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\sqrt{3}\cos x}{\sqrt{7 - (\sqrt{3}\sin x)^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}\sin x}{\sqrt{7}}\right) + C.$$

$$\left| a^2 = 7; \quad a = \sqrt{7}; \quad u = \sqrt{3}\sin x \right|$$

2) Этот пример решается так же, как и предыдущий:

$$u^2 = 5\operatorname{tg}^2 x; \quad u = \sqrt{5}\operatorname{tg} x; \quad u' = \sqrt{5}\sec^2 x.$$

Числитель подынтегральной функции надо умножить на $\sqrt{5}$, чтобы он стал равен u'. Деля одновременно на $\sqrt{5}$, для того, чтобы не изменить величину подынтегральной функции, преобразуем ее к виду

$$\frac{\sec^2 x}{\sqrt{11 - 5\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{5}\sec^2 x}{\sqrt{11 - (\sqrt{5}\operatorname{tg} x)^2}}.$$

Применяя теперь формулу (3,6), получим

$$I = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{\sqrt{5}\sec^2 x}{\sqrt{11 - (\sqrt{5}\operatorname{tg} x)^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin \frac{\sqrt{5}\operatorname{tg} x}{\sqrt{11}} + C.$$

$$\left| a^2 = 11; \quad a = \sqrt{11}; \quad u = \sqrt{5}\operatorname{tg} x \right|$$

3) Представим подынтегральную функцию в виде

$$\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{6-5\,\mathrm{arctg}^2 x}}=\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\sqrt{6-(\sqrt{5}\,\mathrm{arctg}\,x)^2}}.$$

Здесь $u^2=5\,\mathrm{arctg}^2 x$; $u=\sqrt{5}\,\mathrm{arctg}\,x$; $u'=\frac{\sqrt{5}}{1+x^2}$.

Для того, чтобы числитель подынтегральной функции стал равен u', его надо домножить на $\sqrt{5}$. Если это сделать и одновременно разделить на $\sqrt{5}$, то подынтегральная функция не изменит своего значения и запишется так:

$$\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{6-5\,\mathrm{arctg}^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\frac{\sqrt{5}}{1+x^2}}{\sqrt{6-(\sqrt{5}\,\mathrm{arctg}\,x)^2}}.$$

Теперь на основании (3,6)

$$I=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{\frac{\sqrt{5}}{1+x^2}dx}{\sqrt{\underbrace{6}_{a^2}-(\underbrace{\sqrt{5}\,\mathrm{arctg}\,x}_{u})^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt{6}}\right)+C.$$

4) Перепишем подынтегральную функцию в виде $\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{15-7\ln^2 x}}$.

Полагаем $u^2=7\ln^2 x$, тогда $u=\sqrt{7}\ln x$, $u'=\sqrt{7}\cdot\frac{1}{x}$. Чтобы получить в числителе u', умножим его на $\sqrt{7}$, одновременно разделим на $\sqrt{7}$, и подынтегральную функцию представим в виде

$$\frac{1}{x\sqrt{15-7\ln^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{7}}\frac{\sqrt{7}\cdot\frac{1}{x}}{\sqrt{15-(\sqrt{7}\ln x)^2}}.$$

Теперь по формуле (3,6) находим

$$I=\frac{1}{\sqrt{7}}\int\frac{\sqrt{7}\cdot\frac{1}{x}}{\sqrt{15-(\sqrt{7}\ln x)^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{7}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{7}\ln x}{\sqrt{15}}\right)+C.$$

$$\left|a^2=15;\ a=\sqrt{15};\ u=\sqrt{7}\ln x\right|$$

5) Умножим и разделим на $1-x$ числитель и знаменатель дроби, стоящей под корнем в подынтегральной функции, и получим

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=\sqrt{\frac{(1-x)(1-x)}{(1+x)(1-x)}}=\sqrt{\frac{(1-x)^2}{1-x^2}}=\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

($\sqrt{(1-x)^2}=1-x$, так как предполагается, что $-1<x<1$).

Теперь $I=\int\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=$

$=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$ $\left|\begin{array}{c}\text{Применяем}\\ \text{формулу (1,31)}\end{array}\right|$

Задача 3,10 (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы: 1) $\int \frac{5x-3}{\sqrt{7-2x^2}}dx$; 2) $\int \frac{9-3x}{\sqrt{6-5x^2}}dx$ (см. указание к предыдущему примеру);

3) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{8-5\cos^2 x}}dx$; 4) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{5-3e^{4x}}}dx$; 5) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-11x^6}}dx$;

6) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{5-3\sin^4 x}}dx$; 7) $\int \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{1-15\operatorname{ch}^2 x}}dx$.

Указания. В первом примере: $\frac{5x-3}{\sqrt{7-2x^2}} = \frac{5x}{\sqrt{7-2x^2}} - \frac{3}{\sqrt{7-2x^2}}$.

Каждая из этих дробей может быть легко проинтегрирована: первая — по формуле (1,31), вторая — по формуле (3,6).

В шестом примере: $u^2 = 3\sin^4 x$; $u = \sqrt{3}\sin^2 x$; $u' = \sqrt{3}\sin 2x$.

Ответ: 1) $-\frac{5}{2}\sqrt{7-2x^2} - \frac{3}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{7}} + C$;

2) $\frac{9}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{6}} + \frac{3}{5}\sqrt{6-5x^2} + C$;

3) $-\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{\sqrt{5}\cos x}{2\sqrt{2}} + C$; 4) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}e^{2x}}{\sqrt{5}} + C$;

5) $\frac{1}{3\sqrt{11}}\arcsin\frac{\sqrt{11}x^3}{2} + C$; 6) $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}\sin^2 x}{\sqrt{5}} + C$;

7) $\frac{1}{\sqrt{15}}\arcsin\sqrt{15}\operatorname{ch} x$.

2. Упражнения в применении формул (1,23) и (1,24)

Как и раньше, преобразуем эти формулы к виду, который более удобен для их применения в практике. Получим формулу (1,23) в более общем виде. Если функция u есть функция независимой переменной x: $u = u(x)$, то $du = u'dx$. Тогда вместо формулы (1,23) получим

$$\int \frac{u'}{1-u^2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C, \tag{3,8}$$

а формулу (1,24) преобразуем к виду

$$\int \frac{u'}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}dx = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C. \tag{3,9}$$

Отметим построение этих формул: числитель подынтегральной функции есть производная функции u, квадрат которой находится в (3,8) в знаменателе, а в (3,9) — в знаменателе под квадратным корнем.

Обобщение формулы (1,23) состоит в том, что знаменатель дроби $1-u^2$ заменен на a^2-u^2.

$$\int \frac{u'}{a^2-u^2}dx=\int \frac{u'}{a^2\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)}dx=\frac{1}{a^2}\int \frac{u'}{1-\left(\frac{u}{a}\right)^2}dx=$$

$$=\frac{1}{a^2}\int \frac{\frac{1}{a}u'}{\frac{1}{a}\left[1-\left(\frac{u}{a}\right)^2\right]}dx=\frac{1}{a}\int \frac{\left(\frac{u}{a}\right)'}{1-\left(\frac{u}{a}\right)^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{1+\frac{u}{a}}{1-\frac{u}{a}}\right|+C$$

Теперь можно применить формулу (1,23), так как числитель содержит производную функции, квадрат которой находится в знаменателе

и окончательно

$$\int \frac{u'}{a^2-u^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right|+C. \qquad (3,10)$$

Так как под знаком логарифма стоит абсолютная величина дроби $\left|\frac{a+u}{a-u}\right|$, то, не изменяя величины этого выражения, его можно записать и в таком виде: $\left|\frac{u+a}{u-a}\right|$, и тогда формула (3,10) перепишется в виде

$$\int \frac{u'}{a^2-u^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right|+C. \qquad (3,11)$$

Укажем также формулу для вычисления интеграла $\int \frac{u'}{u^2-a^2}dx$:

$$\int \frac{u'}{u^2-a^2}dx=-\int \frac{u'}{a^2-u^2}dx=-\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right|^{-1}+C=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C.$$

Итак, окончательно

$$\int \frac{u'}{u^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C. \qquad (3,12)$$

Теперь приступим к упражнениям.

Задача 3,11. Вычислить интегралы: 1) $I_1=\int \frac{dx}{5-x^2}$; 2) $I_2=\int \frac{dx}{7-9x^2}$; 3) $I_3=\int \frac{dx}{5x^2-7}$; 4) $I_4=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+17}}$; 5) $I_5=\int \frac{dx}{\sqrt{19x^2-14}}$.

Решение. 1) Здесь $u^2 = x^2$, $u = x$, $u' = 1$. Числитель содержит u' — производную функции u, значит, формула (3,10) может быть применена. Учитывая, что $a^2 = 5$, $a = \sqrt{5}$, получаем

$$I_1 = \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5} + x}{\sqrt{5} - x} \right| + C.$$

2) При решении этого примера следует учесть, что $u^2 = 9x^2$; $u = 3x$; $u' = 3$.

Числитель подынтегральной функции не содержит u'. Умножим и разделим подынтегральную функцию на 3 и запишем, что $I_2 = \frac{1}{3} \int \frac{3}{7 - (3x)^2} dx$, $u = 3x$. Теперь применим формулу (3,10) и, учитывая, что $a^2 = 7$, $a = \sqrt{7}$, найдем

$$I_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{7}} \ln \left| \frac{\sqrt{7} + 3x}{\sqrt{7} - 3x} \right| + C = \frac{1}{6\sqrt{7}} \ln \left| \frac{\sqrt{7} + 3x}{\sqrt{7} - 3x} \right| + C.$$

3) Этот пример отличается от предыдущего тем, что здесь на первом месте стоит в знаменателе не квадрат постоянной величины, а квадрат функции u. Поэтому должна быть применена формула (3,12): $u^2 = 5x^2$; $u = \sqrt{5}x$. Ее можно применить в том случае, если числитель будет содержать множитель $u' = \sqrt{5}$. Этот множитель получим, умножив подынтегральную функцию на $\sqrt{5}$ и одновременно, чтобы не изменилась ее величина, разделив на $\sqrt{5}$. Делая это и применяя формулу (3,12) с учетом, что $a^2 = 7$; $a = \sqrt{7}$, найдем

$$I_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{5}x)^2 - 7} dx = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{7}} \ln \left| \frac{\sqrt{5}x - \sqrt{7}}{\sqrt{5}x + \sqrt{7}} \right| + C =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{35}} \ln \left| \frac{\sqrt{5}x - \sqrt{7}}{\sqrt{5}x + \sqrt{7}} \right| + C.$$

4) Этот пример решается сразу по формуле (3,9): $u = x$, а множитель $u' = 1$ в числителе есть.

Поэтому $I_4 = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 17} \right| + C$.

5) Здесь $u^2 = 19x^2$; $u = \sqrt{19}x$, $u' = \sqrt{19}$.

Для применения формулы (3,9), надо, чтобы в числителе был множитель $u' = \sqrt{19}$.

Умножим и разделим подынтегральную функцию на $\sqrt{19}$.

Тогда $I_5 = \frac{1}{\sqrt{19}} \int \frac{\sqrt{19}}{(\sqrt{19}x)^2 - 14} dx$. По формуле (3,9), учитывая, что $u' = \sqrt{19}$, найдем

$$I_5 = \frac{1}{\sqrt{19}} \ln \left| \sqrt{19}x + \sqrt{19x^2 - 14} \right| + C.$$

Задача 3,12 (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы: 1) $\int \frac{5\,dx}{8-3x^2}$; 2) $\int \frac{dx}{11-6x^2}$; 3) $\int \frac{dx}{10x^2-7}$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-11}}$; 5) $\int \frac{9\,dx}{\sqrt{7+5x^2}}$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2-12}}$.

Ответ. 1) $\frac{5}{4\sqrt{6}} \ln\left|\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}x}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}x}\right| + C$;

Применена формула (3,10): $u=\sqrt{3}\,x$; $a^2=8$; $a=2\sqrt{2}$

2) $\frac{1}{2\sqrt{66}} \ln\left|\frac{\sqrt{11}+\sqrt{6}\,x}{\sqrt{11}-\sqrt{6}\,x}\right| + C$; 3) $\frac{1}{2\sqrt{70}} \ln\left|\frac{\sqrt{10}\,x-\sqrt{7}}{\sqrt{10}\,x+\sqrt{7}}\right| + C$;

Применена формула (3,12): $u=\sqrt{10}x$; $u'=\sqrt{10}$; $a=\sqrt{7}$.

4) $\frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2-11}\right| + C$; 5) $\frac{9}{\sqrt{5}}\ln\left|\sqrt{5}x+\sqrt{7+5x^2}\right| + C$;

Применена формула (3,9)

6) $\frac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|\sqrt{7}x+\sqrt{7x^2-12}\right| + C$.

Задача 3,13 (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы: 1) $\int \frac{dx}{a^2x^2-c^2}$; 2) $\int \frac{x^2\,dx}{12-3x^6}$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{10+7x^2}}$;

4) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{5+3\,\mathrm{arctg}^2\,x}}$.

Ответ. 1) $\frac{1}{2ac}\ln\left|\frac{ax-c}{ax+c}\right| + C$; 2) $\frac{1}{36}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x^3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}x^3-2\sqrt{3}}\right| + C$;

3) $\frac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|\sqrt{7}x+\sqrt{10+7x^2}\right| + C$; 4) $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,x + \sqrt{5+3\mathrm{arctg}^2 x}\right| + C$.

Проведенные упражнения позволяют предложить для самостоятельного решения задачи на применение формул (1,25) — (1,28). Перепишем эти формулы в виде, который более удобен для их практического применения. Полагая в них, что $u=u(x)$, $du=u'\,dx$, получим вместо формул (1,25) — (1,28) соответственно:

$$\int \mathrm{sh}\,u\cdot u'\,dx = \mathrm{ch}\,u + C; \qquad (3,13)$$

$$\int \mathrm{ch}\,u\cdot u'\,dx = \mathrm{sh}\,u + C; \qquad (3,14)$$

$$\int \frac{u'}{\mathrm{ch}^2\,u}\,dx = \mathrm{th}\,u + C; \qquad (3,15)$$

$$\int \frac{u'}{\mathrm{sh}^2\,u}\,dx = -\mathrm{cth}\,u + C. \qquad (3,16)$$

Задача 3,14 (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы: 1) $\int \operatorname{sh} 2x\,dx$; 2) $\int \operatorname{ch}\frac{x}{3}\,dx$; 3) $\int (10x + 7)\operatorname{sh}(5x^2 + 7x + 9)\,dx$; 4) $\int \operatorname{ch}(8x+7)\,dx$; 5) $\int \frac{\operatorname{sh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$; 6) $\int \frac{x\,dx}{\operatorname{sh}^2(3x^2+5)}$; 7) $\int \operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch} x\,dx$; 8) $\int \operatorname{cth} x\,dx$; 9) $\int \operatorname{th} x\,dx$; 10) $\int x \operatorname{th} x^2\,dx$.

Ответ. 1) $\frac{1}{2}\operatorname{ch}2x + C$; 2) $3\operatorname{sh}\frac{x}{3} + C$; 3) $\operatorname{ch}(5x^2 + 7x + 9) + C$; 4) $\frac{1}{8}\operatorname{sh}(8x+7) + C$; 5) $2\operatorname{ch}\sqrt{x} + C$; 6) $-\frac{1}{6}\operatorname{cth}(3x^2 + 5) + C$; 7) $\frac{1}{5}\operatorname{sh}^5 x + C$; 8) $\ln|\operatorname{sh} x| + C$; 9) $\ln|\operatorname{ch} x| + C$; 10) $\frac{1}{2}\ln|\operatorname{ch} x^2| + C$.

Этим заканчиваются упражнения, связанные с непосредственным применением таблицы основных интегралов.

ЧЕТВЕРТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Замена переменной в неопределенном интеграле (метод подстановки). Интегрирование по частям.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Метод подстановки. Два правила

Если интеграл $I = \int f(x)\,dx$ не может быть вычислен непосредственно по основным формулам (1,7) — (1,28), то введением новой независимой переменной во многих случаях удается преобразовать подынтегральное выражение $f(x)\,dx$. При этом интеграл приводится к табличному или к такому, прием вычисления которого уже известен. Замена переменной интегрирования и составляет существо метода, называемого методом подстановки. Укажем два правила подстановки.

1) Независимую переменную заменяют по формуле.

$$x = \varphi(z), \tag{4,1}$$

где $\varphi(z)$ — дифференцируемая функция.

После этого определяют $dx = \varphi'(z)\,dz$, а интеграл $\int f(x)\,dx$ приводят к виду $I = \int f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz$. Цель подстановки будет достигнута, если окажется, что вычисление этого интеграла проще, чем исходного. В результате интегрирования получится функция независимой переменной z. Чтобы возвратиться к переменной x,