Задача 3,14 (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы: 1) $\int \operatorname{sh} 2x\,dx$; 2) $\int \operatorname{ch} \frac{x}{3}\,dx$; 3) $\int (10x + 7) \operatorname{sh}(5x^2 + 7x + 9)\,dx$; 4) $\int \operatorname{ch}(8x + 7)\,dx$; 5) $\int \frac{\operatorname{sh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$; 6) $\int \frac{x\,dx}{\operatorname{sh}^2(3x^2 + 5)}$; 7) $\int \operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch} x\,dx$; 8) $\int \operatorname{cth} x\,dx$; 9) $\int \operatorname{th} x\,dx$; 10) $\int x \operatorname{th} x^2\,dx$.

Ответ. 1) $\frac{1}{2}\operatorname{ch} 2x + C$; 2) $3\operatorname{sh}\frac{x}{3} + C$; 3) $\operatorname{ch}(5x^2 + 7x + 9) + C$; 4) $\frac{1}{8}\operatorname{sh}(8x + 7) + C$; 5) $2\operatorname{ch}\sqrt{x} + C$; 6) $-\frac{1}{6}\operatorname{cth}(3x^2 + 5) + C$; 7) $\frac{1}{5}\operatorname{sh}^5 x + C$; 8) $\ln|\operatorname{sh} x| + C$; 9) $\ln|\operatorname{ch} x| + C$; 10) $\frac{1}{2}\ln|\operatorname{ch} x^2| + C$.

Этим заканчиваются упражнения, связанные с непосредственным применением таблицы основных интегралов.

ЧЕТВЕРТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Замена переменной в неопределенном интеграле (метод подстановки). Интегрирование по частям.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Метод подстановки. Два правила

Если интеграл $I = \int f(x)\,dx$ не может быть вычислен непосредственно по основным формулам (1,7) — (1,28), то введением новой независимой переменной во многих случаях удается преобразовать подынтегральное выражение $f(x)\,dx$. При этом интеграл приводится к табличному или к такому, прием вычисления которого уже известен. Замена переменной интегрирования и составляет существо метода, называемого методом подстановки. Укажем два правила подстановки.

1) Независимую переменную заменяют по формуле.

$$x = \varphi(z), \tag{4,1}$$

где $\varphi(z)$ — дифференцируемая функция.

После этого определяют $dx = \varphi'(z)\,dz$, а интеграл $\int f(x)\,dx$ приводят к виду $I = \int f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz$. Цель подстановки будет достигнута, если окажется, что вычисление этого интеграла проще, чем исходного. В результате интегрирования получится функция независимой переменной z. Чтобы возвратиться к переменной x, надо из уравнения (4,1) определить z через x и подставить это значение вместо z в найденную функцию.

Общего правила, которое указывало бы, как выбрать функцию $\varphi(z)$ в (4,1), не существует. Умение выбрать эту функцию достигается опытом. Однако для многих типов интегралов подстановка (4,1) известна и нами будет в соответствующих местах указана. Обратим внимание читателя на то, что, пользуясь подстановкой (4,1), надо найти множитель dx.

Заметим также, что функция $\varphi(z)$ в (4,1) должна иметь обратную. Это необходимо для того, чтобы из подстановки (4,1) можно было определить z как функцию x.

2) Полагают, что

$$\psi(x) = z. \tag{4,2}$$

Эта подстановка отличается от предыдущей тем, что в (4,1) сама независимая переменная x заменялась новой функцией $\varphi(z)$, а здесь не независимая переменная x, а ее функция $\psi(x)$ заменяется новой переменной z. Из уравнения (4,2) находят dx. В результате этой подстановки подынтегральное выражение заменится другой:

$$f(x)\,dx = \omega(z)\,dz.$$

Подстановка (4,2) достигнет цели, если вычисление интеграла $I = \int \omega(z)\,dz$ может быть выполнено проще, чем исходного. После интегрирования получится функция переменной z. Для того, чтобы возвратиться к переменной x, надо подставить в полученную функцию из (4,2) $\psi(x)$ вместо z.

И здесь умение выбрать функцию $\psi(x)$ так, чтобы вычисление интеграла упростилось, достигается большим числом упражнений. Для определенного класса интегралов целесообразные подстановки вида (4,2) будут указаны.

Упражнения этого практического занятия не имеют целью указать подстановки для вычисления определенного класса интегралов, а предназначены только для приобретения навыков в применении указанных двух правил подстановки.

Упражнения в применении первого правила подстановки

Задача 4,1. Вычислить интеграл $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}}$ при помощи подстановки $x = \frac{a}{t}$.

Решение. Здесь применяется правило первое. Подстановка имеет вид (4,1). Сразу находим, что $dx = -\frac{a}{t^2}\,dt$ и преобразуем подынтегральную функцию

$$\frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{\frac{a}{t}\sqrt{\frac{a^2}{t^2} - a^2}} = \frac{t^2}{a^2\sqrt{1-t^2}}.$$

Поэтому

$$I=\int\frac{t^2}{a^2\sqrt{1-t^2}}\left(-\frac{a}{t^2}\,dt\right)=-\frac{1}{a}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=-\frac{1}{a}\arcsin t+C.$$

Чтобы перейти к переменной x, надо из подстановки $x=\frac{a}{t}$ выразить t через $x: t=\frac{a}{x}$, и тогда

$$I=-\frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{x}+C=\frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}+C.$$

Мы здесь заменили $-\arcsin\frac{a}{x}$ на $\arccos\frac{a}{x}$ не потому, что они равны между собой, а на основании следующих соображений: из тригонометрии известно, что

$$\arcsin\alpha+\arccos\alpha=\frac{\pi}{2};\qquad \frac{\pi}{2}-\arcsin\alpha=\arccos\alpha. \tag{4,3}$$

Считая, что $C=\frac{1}{a}\frac{\pi}{2}+C_1$, получим

$$-\frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{x}+C=\frac{1}{a}\frac{\pi}{2}-\frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{x}+C_1=$$
$$=\frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{a}{x}\right)+C_1=\frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}+C,$$

а C_1 мы снова обозначим через C, отбросив у C_1 индекс.

Ответ был преобразован путем выделения слагаемого $\frac{1}{a}\cdot\frac{\pi}{2}$ из произвольной постоянной. Следует иметь в виду, что за счет тождественного преобразования ответа, а также в связи с возможностью представить произвольную постоянную интегрирования в разных видах ответы при вычислении неопределенных интегралов могут получаться различные.

Замечание. Следует иметь в виду, что можно было сразу написать: $-\frac{1}{a}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{a}\arccos t+C$, так как $(\arccos t)'=$ $=-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

Задача 4,2. Вычислить интеграл $I=\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$ при помощи подстановки $x=a(1-t)$.

Решение. Здесь опять-таки применяется правило первое. Подстановка имеет вид (4,1).

Находим, что $dx=-a\,dt$; подставляя под корень $x=a(1-t)$, имеем

$$\sqrt{2ax-x^2}=\sqrt{2a\cdot a(1-t)-a^2(1-t)^2}=$$
$$=\sqrt{a^2(1-t^2)}=|a|\sqrt{1-t^2},$$

и тогда

$$I=\int\frac{-adt}{|a|\sqrt{1-t^2}}=-\frac{a}{|a|}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{a}{|a|}\arccos t+C=$$
$$=\pm\arccos t+C.$$

Верхний знак надо взять при $a>0$, а нижний — при $a<0$, так как $|a|=a$, если $a>0$, и $|a|=-a$, если $a<0$.

Чтобы возвратиться к старой переменной, надо выразить t через x. Из $x=a(1-t)$ следует, что $t=1-\frac{x}{a}=\frac{a-x}{a}$, а потому $I=\pm\arccos\frac{a-x}{a}+C$.

Вычислим два интеграла, которые нам часто будут встречаться в дальнейшем: 1) $\int\sin^2 u\,du$ и 2) $\int\cos^2 u\,du$.

Из тригонометрии известно, что $\sin^2 u=\frac{1-\cos 2u}{2}$, $\cos^2 u=$ $=\frac{1+\cos 2u}{2}$, поэтому

1) $$\int\sin^2 u\,du=\int\frac{1-\cos 2u}{2}du=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2u)\,du=$$
$$=\frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{2}\sin 2u\right)+C=\frac{1}{2}(u-\sin u\cos u)+C;$$

2) $$\int\cos^2 u\,du=\int\frac{1+\cos 2u}{2}du=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2u)\,du=$$
$$=\frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{2}\sin 2u\right)=\frac{1}{2}(u+\sin u\cos u)+C.$$

Выпишем для ссылок полученные результаты:

$$\int\sin^2 u\,du=\frac{1}{2}(u-\sin u\cos u)+C;\qquad(4,4)$$

$$\int\cos^2 u\,du=\frac{1}{2}(u+\sin u\cos u)+C.\qquad(4,5)$$

Задача 4,3. С помощью подстановки $x=a\sin t$ (так называемая тригонометрическая подстановка) вычислить интегралы:

$$I_1=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx;\quad I_2=\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx.$$

Решение. 1) Из подстановки

$$x=a\sin t\qquad(4,6)$$

следует, что $dx=a\cos t\,dt$; $\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=$ $=\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}=\sqrt{a^2\cos^2 t}=a\cos t$, а потому

$$I_1=\int a\cos t\,(a\cos t\,dt)=a^2\int\cos^2 t\,dt=a^2\frac{1}{2}(t+\sin t\cos t)+C.$$

| Применить формулу (4,5) |

Чтобы возвратиться к переменной x, надо из (4,6) определить t, $\sin t$, $\cos t$: $\sin t = \frac{x}{a}$; $t = \arcsin\frac{x}{a}$; $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$; $I_1 = a^2\frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right) + C$.

Окончательно

$$I_1 = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C. \tag{4,7}$$

2) Из (4,6) следует, что в I_2 подынтегральная функция $\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2\sin^2 t}{a\cos t}$ (выше было вычислено, что $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$), а потому

$$I_2 = \int\frac{a^2\sin^2 t}{a\cos t}a\cos t\,dt = a^2\int\sin^2 t\,dt = a^2\frac{1}{2}(t-\sin t\cos t) + C.$$

| Применить формулу (4,4) |

Возвратимся теперь к переменной x.

Подставляя значения t, $\sin t$ и $\cos t$, найденные при вычислении I_1, получим

$$I_2 = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x}{a}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right) + C,$$

или

$$I_2 = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

Задача 4,4 (для самостоятельного решения).

При помощи подстановки $x=\sin t$ вычислить $I = \int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$.

Ответ. $I = \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

Задача 4,5 (для самостоятельного решения).

Вычислить интеграл $I = \int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ при помощи подстановки $x = \operatorname{ctg} t$.

Указание. $dx = -\frac{1}{\sin^2 t}dt$; $\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\sin t}$;

$$I = -\int\frac{dt}{\sin t} = -\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2} + C = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)^{-1} + C = \ln\operatorname{ctg}\frac{t}{2} + C,$$

Но

$$\operatorname{ctg}\frac{t}{2} = \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} = \frac{2\cos^2\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} = \frac{1+\cos t}{\sin t} = \frac{1}{\sin t} + \operatorname{ctg} t;$$

$$\frac{1}{\sin t} = \sqrt{1+x^2}, \quad \operatorname{ctg} t = x,$$

значит,

$$I=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C.$$

Задача 4,6 (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы: 1) $I_1=\int\frac{dx}{(5x+7)\sqrt{x}}$ (подстановка $x=z^2$); 2) $I_2=\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$ $\left(\text{подстановка } x=\frac{1}{z}\right)$.

Ответ. 1) $\frac{2}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{5x}{7}}+C$; 2) $-\frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}+C$.

Указание. Во втором примере после подстановки

$$I_2=-\int\frac{dz}{\sqrt{a^2z^2-1}}=-\int\frac{dz}{\sqrt{(az)^2-1}}=-\frac{1}{a}\ln\left(az+\sqrt{a^2z^2-1}\right)+C.$$

Задача 4,7 (для самостоятельного решения).

Вычислить интеграл $\int\frac{e^{\frac{x}{2}}\,dx}{\sqrt{e^x-1}}$ с помощью подстановки $x=2\ln z$.

Указание. $e^x=e^{2\ln z}=e^{\ln z^2}=z^2$; $dx=\frac{2dz}{z}$.

Ответ. $2\ln\left(e^{\frac{x}{2}}+\sqrt{e^x-1}\right)+C$.

Упражнения в применении второго правила подстановки.

Задача 4,8. Интеграл $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$ вычислить подстановкой

$$\sqrt{x^2-a^2}=z. \qquad (4,8)$$

Решение. Этот интеграл был уже вычислен нами в задаче 4,1. Указанная новая подстановка имеет вид (4,2): $\psi(x)=z$. Подынтегральное выражение $\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$ должно быть выражено через новую переменную z. Из (4,8) следует, что

$$x^2-a^2=z^2;\quad x^2=a^2+z^2;\quad 2x\,dx=2z\,dz;\quad xdx=zdz.$$

Деля обе части этого равенства на x^2 и заменяя в правой части равенства x^2 на a^2+z^2, получим

$$\frac{dx}{x}=\frac{z\,dz}{a^2+z^2};\quad \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{z\,dz}{(a^2+z^2)\,z}=\frac{dz}{a^2+z^2}.$$

Теперь

$$I=\int\frac{dz}{a^2+z^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{z}{a}+C,$$

Переходим к переменной x: с помощью (4,8) получим окончательно

$$I = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} + C.$$

Этот ответ отличается от полученного в задаче 4,1. Однако это только кажущееся различие. Фактически же ответы тождественны: легко показать, что $\arccos \frac{a}{x} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}$. Здесь мы еще раз обращаем внимание читателя на возможность различных ответов при вычислении одного и того же интеграла.

Задача 4,9 (для самостоятельного решения).

Вычислить интеграл $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x+2}+3}$ подстановкой $\sqrt{x+2} = t$.

Решение. Из подстановки $\sqrt{x+2} = t$ следует, что $x + 2 = t^2$; $x = t^2 - 2$; $dx = 2t\,dt$, а потому подынтегральное выражение

$$\frac{dx}{\sqrt{x+2}+3} = \frac{2t\,dt}{t+3};$$

$$I = \int \frac{2t\,dt}{t+3} = 2\int \frac{t+3-3}{t+3}\,dt = 2\int \left(1 - \frac{3}{t+3}\right) dt =$$
$$= 2\,[t - 3\ln(t+3)] + C.$$

Подставляя сюда $t = \sqrt{x+2}$, окончательно получим

$$I = 2\,[\sqrt{x+2} - 3\ln|\sqrt{x+2}+3|] + C.$$

Задача 4,10 (для самостоятельного решения).

Вычислить интеграл $I = \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ подстановкой $1 + \sqrt{x} = v$.

Указание. $\sqrt{x} = v - 1$; $x = (v-1)^2$; $dx = 2(v-1)\,dv$; $I = 2\int \frac{v-1}{v}\,dv$.

Ответ. $I = 2\,[1 + \sqrt{x} - \ln|1+\sqrt{x}|] + C = 2 + 2(\sqrt{x} - \ln|1+\sqrt{x}|) + C = 2(\sqrt{x} - \ln|1+\sqrt{x}|) + C_1$, где $C_1 = 2 + C$.

Задача 4,11. Вычислить интеграл $I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ при помощи подстановки

$$\sqrt{a^2 - x^2} = t\,(a - x). \qquad (4,9)$$

Решение. Этот интеграл нам уже хорошо известен: $I = \arcsin \frac{x}{a} + C$. Мы предложили этот пример для упражнения, а также для того, чтобы показать еще раз, что вычисление интеграла может приводить к различным по форме ответам, в зависимости от того, какой метод применен при его вычислении. Из указанной подстановки получаем $a^2 - x^2 = t^2(a-x)^2$. Сокращая теперь на $a-x$, имеем $a+x=t^2(a-x)$, отсюда

$$x = a\frac{t^2-1}{t^2+1}; \quad dx = \frac{4at\,dt}{(t^2+1)^2}; \ \sqrt{a^2-x^2} = \frac{2at}{t^2+1}$$

$$I = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C.$$

Так как $\arcsin\frac{x}{a} + \frac{\pi}{2} = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$, то следует считать, что полученный ответ только формой отличается от уже известного, указанного выше.

Задача 4,12. Вычислить интеграл $I = \int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{6-\sin^2 x}}$ (подстановка $\sin x = z$).

Ответ. $I = \arcsin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{6}}\right) + C.$

Задача 4,13 (для самостоятельного решения).

Вычислить интеграл $I = \int\frac{dx}{3+4\sin^2 x}$ (подстановка $\operatorname{ctg} x = u$).

Указание. $-\operatorname{cosec}^2 x\,dx = du$; $\operatorname{cosec}^2 x = 1+u^2$; $\sin^2 x = \frac{1}{1+u^2}$. Подынтегральное выражение

$$\frac{dx}{3+4\sin^2 x} = -\frac{du}{7+3u^2}.$$

Ответ. $I = \frac{1}{\sqrt{21}}\operatorname{arcctg}\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\operatorname{ctg} x\right) + C.$

Задача 4,14 (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы: 1) $I_1 = \int\frac{dx}{1+\cos^2 x}$ (подстановка $\operatorname{tg} x = z$);

2) $I_2 = \int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}$ (подстановка $\operatorname{tg} x = z$);

3) $I_3 = \int\frac{dx}{\sin x\sqrt{4\sin^2 x - 9\cos^2 x}}$ (подстановка $\operatorname{ctg} x = z$).

Указания. Во втором примере: $\frac{dx}{\cos^2 x} = dz$; $\frac{1}{\sin^4 x} = \frac{1}{(1-\cos^2 x)^2}$; $\cos^2 x = \frac{1}{1+z^2}$; $\frac{1}{\sin^4 x} = \frac{(1+z^2)^2}{z^4} = \frac{1}{z^4} + \frac{2}{z^2} + 1.$

Подынтегральное выражение

$$\frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x} = \left(\frac{1}{z^4} + \frac{2}{z^2} + 1\right)dz.$$

В третьем примере: $\frac{dx}{\sin x\sqrt{4\sin^2 x - 9\cos^2 x}} = \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{4-9\operatorname{ctg}^2 x}} = -\frac{dz}{\sqrt{4-9z^2}}.$

Ответ. 1) $I_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C$;

2) $I_2 = \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + C$;

3) $I_3 = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3}{2} \operatorname{ctg} x\right) + C$.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Этот метод, так же как и метод подстановки, который мы только что разобрали, принадлежит к числу основных методов интегрирования.

Формула интегрирования по частям записывается так:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{4,10}$$

Применение этой формулы предполагает, что в правой части интеграл $\int v\,du$ может быть вычислен легче, чем исходный интеграл.

Задача 4,15. Вычислить интегралы: 1) $I_1 = \int xe^x\,dx$; 2) $I_2 = \int x \sin x\,dx$; 3) $I_3 = \int \ln x\,dx$; 4) $I_4 = \int \operatorname{arctg} x\,dx$; 5) $I_5 = \int \arcsin x\,dx$.

Решение. Для вычисления всех предложенных интегралов применим формулу (4,10) интегрирования по частям. При использовании этой формулы надо прежде всего установить, какая функция принимается равной u и что относится к dv. Затем по установленному выражению u надо дифференцированием найти du, а по известному dv определить интегрированием функцию v. Таким образом, для применения формулы (4,10) потребуется выполнить одно дифференцирование для определения du и одно интегрирование для определения v. Следует помнить, что в состав dv должен обязательно входить дифференциал независимой переменной.

После этих общих указаний приступим к вычислению предложенных интегралов:

$$1)\ I_1 = \int \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^x\,dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{e^x}_{v}\underbrace{dx}_{du} = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

$$\left|\begin{array}{c|c} u = x & du = dx \\ dv = e^x\,dx & v = e^x \end{array}\right|$$

Замечание. При вычислении этого интеграла нецелесообразно брать $u = e^x$; $dv = x\,dx$, так как в этом случае было бы $du = e^x\,dx$; $v = \frac{x^2}{2}$. Применяя формулу (4,10), мы получили бы

$$I_1 = \int xe^x\,dx = \frac{x^2}{2}e^x - \int \frac{x^2}{2}e^x\,dx.$$

Совершенно очевидно, что интеграл в правой части сложнее исходного. Из этого читатель должен сделать вывод, что выбор u и dv не может быть произвольным. Он определяется требованием, чтобы интеграл, к которому приводит формула (4,10), был проще заданного.

2) $$I_2 = \int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\sin x\, dx}_{dv} = -\underbrace{x \cos x}_{uv} + \int \underbrace{\cos x}_{v} \underbrace{dx}_{du} = -x\cos x + \sin x + C.$$

$$\left| \begin{array}{l|l} u = x & du = dx \\ dv = \sin x\, dx & v = -\cos x \end{array} \right|.$$

Здесь также надо иметь в виду, что если взять $u = \sin x$; $dv = x\,dx$, то мы придем к интегралу более сложному, чем данный.

3) $$I_3 = \int \underbrace{\ln x}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x -$$

$$\left| \begin{array}{l|l} u = \ln x & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right|$$

$$- x + C = x(\ln x - 1) + C.$$

4) $$\int \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = \underbrace{x \operatorname{arctg} x}_{uv} - \int \frac{x}{1+x^2} dx =$$

$$\left| \begin{array}{l|l} u = \operatorname{arctg} x & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right|$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C.$$

5) $$\int \underbrace{\arcsin x}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = \underbrace{x \arcsin x}_{uv} - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$\left| \begin{array}{l|l} u = \arcsin x & du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right|$$

$$= x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}.$$

Задача 4,16 (для самостоятельного решения).
Вычислить интегрированием по частям интегралы:

1) $I_1 = \int x \cos x\, dx$; 2) $I_2 = \int x^3 \ln x\, dx$;

3) $I_3 = \int \dfrac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$; 4) $I_4 = \int \dfrac{\ln x}{x^2} dx$.

Указание. В третьем примере взять $u = \arcsin x$; $dv = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Ответ. 1) $I_1 = x\sin x + \cos x + C$; 2) $I_2 = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{x^4}{16} + C$; 3) $I_3 = -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + x + C$; 4) $I_4 = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$.

Задача 4,17. Вычислить интегралы: 1) $I_1 = \int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$;

2) $I_2 = \int \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x}\,dx$; 3) $I_3 = \int \sin x \ln \cos x\,dx$;

4) $I_4 = \int \frac{\ln(\operatorname{arctg} x)\,dx}{1+x^2}$; 5) $I_5 = \int e^x \ln(e^x+1)\,dx$.

Решение. 1) $I_1 = \int \frac{x\,dx}{\cos^2 x} = \underbrace{x \operatorname{tg} x}_{uv} - \int \underbrace{\operatorname{tg} x}_{v}\, \underbrace{dx}_{du} = x\operatorname{tg} x +$

$$\left|\begin{array}{c|c} u = x & du = dx \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} & v = \operatorname{tg} x \end{array}\right|$$

| Применить формулу (1,17) |

$+ \ln|\cos x| + C.$

2) $I_2 = \int \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x \cdot \ln \sin x - \int \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x\,dx =$

$$\left|\begin{array}{c|c} u = \ln \sin x & du = \operatorname{ctg} x\,dx \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} & v = \operatorname{tg} x \end{array}\right|$$

$= \operatorname{tg} x \cdot \ln \sin x - \int dx = \operatorname{tg} x \ln \sin x - x + C.$

3) $I_3 = \int \sin x \cdot \ln \cos x\,dx = -\cos x \ln \cos x -$

$$\left|\begin{array}{c|c} u = \ln \cos x & du = -\operatorname{tg} x dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{array}\right|$$

$- \int \underbrace{(-\cos x)}_{v} \underbrace{(-\operatorname{tg} x\,dx)}_{du} = -\cos x \ln \cos x - \int \sin x\,dx =$

$= -\cos x \ln \cos x + \cos x + C = \cos x(1 - \ln|\cos x|) + C.$

4) $I_4 = \int \frac{\ln(\operatorname{arctg} x)}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x \cdot \ln \operatorname{arctg} x -$

$- \int \operatorname{arctg} x \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x \ln \operatorname{arctg} x - \int \frac{dx}{1+x^2} =$

$$\left|\begin{array}{c|c} u = \ln \operatorname{arctg} x & du = \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ dv = \frac{dx}{1+x^2} & v = \operatorname{arctg} x \end{array}\right|$$

$= \operatorname{arctg} x \cdot \ln \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x(\ln \operatorname{arctg} x - 1) + C.$

5) $I_5 = \int e^x \ln(e^x+1)\,dx = e^x \ln(e^x+1) - \int e^x \frac{e^x}{e^x+1}\,dx =$

$$\left|\begin{array}{l|l} u = \ln(e^x+1) & du = \dfrac{e^x}{e^x+1}\,dx \\ dv = e^x\,dx & v = e^x \end{array}\right|$$

$= e^x \ln(e^x+1) - \int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx = e^x \ln(e^x+1) - \int \left(e^x - \frac{e^x}{e^x+1}\right) dx =$
$= e^x \ln(e^x+1) - e^x + \ln(e^x+1) + C = (e^x+1)\ln(e^x+1) - e^x + C.$

Задача 4, 18 (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы: 1) $I_1 = \int \cos x \cdot \ln\sin x\,dx$;
2) $I_2 = \int \frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}\,dx$; 3) $I_3 = \int \sec^2 x \cdot \ln \operatorname{tg} x\,dx$; 4) $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin^2 x}\,dx$;
5) $\int x e^{nx}\,dx$.

Ответ. 1) $\sin x(\ln\sin x - 1) + C$; 2) $-x - \operatorname{ctg} x \ln\cos x + C$;
3) $\operatorname{tg} x(\ln \operatorname{tg} x - 1) + C$; 4) $-\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} x \ln \operatorname{tg} x + C$;
5) $\frac{1}{n} e^{nx}\left(x - \frac{1}{n}\right) + C$.

Интегралы, для вычисления которых интегрирование по частям применяется несколько раз

Задача 4, 19. Вычислить интеграл $\int (\ln x)^2\,dx$.

Решение. Интегрирование по частям применим дважды:

$\int (\ln x)^2\,dx = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x\,dx = x(\ln x)^2 - 2\left(x\ln x - \int dx\right) =$

$$\left|\begin{array}{l|l} u = (\ln x)^2 & du = 2\ln x \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = dx & v = x \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{l|l} u = \ln x & du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = dx & v = x \end{array}\right|$$

$= x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C = x\ln x(\ln x - 2) + 2x + C.$

Задача 4, 20 (для самостоятельного решения).

Вычислить $\int \sqrt[3]{x}\,(\ln x)^2\,dx$.

Указание. $u = (\ln x)^2$; $dv = \sqrt[3]{x}\,dx$; $du = \frac{2\ln x}{x}\,dx$;
$v = \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x}$.

Интегрирование по частям и здесь придется применить дважды.

Ответ. $\frac{3}{4} x \sqrt[3]{x}\left[(\ln x)^2 - \frac{3}{2}\ln x + \frac{9}{8}\right] + C.$

Задача 4, 21. Вычислить интеграл $\int (\arcsin x)^2\,dx$.

Ответ. $x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C.$

Упражнения, в которых двукратное интегрирование по частям приводит к исходному интегралу

Задача 4, 22. Вычислить интеграл $I=\int e^{ax}\cos bx\,dx$.

Решение. В этом примере двукратное применение интегрирования по частям приведет к исходному интегралу.

$$I=\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx=$$

$u=e^{ax}$	$du=ae^{ax}\,dx$
$dv=\cos bx\,dx$	$v=\frac{1}{b}\sin bx$

Вторично применяем интегрирование по частям:

$u=e^{ax}$	$du=ae^{ax}\,dx$
$dv=\sin bx\,dx$	$v=-\frac{1}{b}\cos bx$

$$=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}\left[-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx\right].$$

Таким образом, двукратное применение формулы интегрирования по частям привело нас к исходному интегралу, который нами вычисляется.

Раскроем скобки в правой части:

$$I=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx-\frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

Это вычисляемый интеграл, который мы обозначили буквой I

Таким образом,

$$I=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx-\frac{a^2}{b^2}I.$$

Мы получили уравнение с неизвестной величиной I.

Перенося последнее слагаемое в левую часть уравнения, найдем

$$I+\frac{a^2}{b^2}I=\frac{1}{b}e^{ax}\left(\sin bx+\frac{a}{b}\cos bx\right).$$

Вынесем в левой части этого уравнения I за скобку:

$$I\,\frac{a^2+b^2}{b^2}=\frac{1}{b}e^{ax}\left(\sin bx+\frac{a}{b}\cos bx\right).$$

Отсюда следует, что искомый интеграл равен

$$I=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx+a\cos bx)+C. \qquad (4{,}11)$$

Аналогичную задачу предлагаем для самостоятельного решения.

Задача 4,23 (для самостоятельного решения).

Вычислить интеграл $I=\int e^{ax}\sin bx\,dx$.

Ответ. $I=\dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C.$ (4,12)

Задача 4,24 (для самостоятельного решения).

Применить формулы (4,11) и (4,12) к вычислению интегралов:

$$1)\ I_1=\int e^{2x}\cos 3x\,dx;\ 2)\ I_2=\int\frac{\cos 2x}{e^{3x}}\,dx;\ 3)\ I_3=\int\frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{\sqrt[3]{e^x}}\,dx.$$

Ответ. 1) $\dfrac{e^{2x}}{13}(2\cos 3x+3\sin 3x)+C$; 2) $\dfrac{2\sin 2x-3\cos 2x}{13e^{3x}}$;

3) $\dfrac{6}{13}\dfrac{\sin\frac{x}{2}-5\cos\frac{x}{2}}{\sqrt[3]{e^x}}+C.$

Задача 4,25 (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $I_1=\int\sin(\ln x)\,dx$ и 2) $I_2=\int\cos(\ln x)\,dx$.

Указание. Применение дважды к каждому интегралу формулы интегрирования по частям приводит к исходному интегралу. Например,

$$I_1=x\sin(\ln x)-\underbrace{\int\cos(\ln x)\,dx}_{\text{Снова применить интегрирование по частям}}=x\sin(\ln x)-[x\cos(\ln x)+\underbrace{\int\sin(\ln x)\,dx}_{\text{Исходный интеграл}}].$$

Ответ. $I_1=\dfrac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C$; $I_2=\dfrac{x}{2}[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]+C$.

ПЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Простейшие дроби. Разложение рациональной дроби на простейшие.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Простейшие дроби. Простейшими (иначе элементарными) дробями называются дроби вида:

1) $\dfrac{A}{x-a}$; 2) $\dfrac{A}{(x-a)^n}$, ($n>0$ и целое);

3) $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$; 4) $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, ($n>0$ и целое),

где A, B, a, p и q — действительные числа, а трехчлен $x^2 + px + q$ имеет комплексные корни, т. е. не раскладывается на действительные множители первой степени.

Рациональные дроби. Дробь

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \tag{5,1}$$

называется *рациональной*, если ее числитель и знаменатель — многочлены (предполагается, что коэффициенты многочленов действительные числа).

Дробь (5,1) называется *правильной*, если степень многочлена $P(x)$, находящегося в числителе, меньше, чем степень многочлена $Q(x)$, находящегося в знаменателе.

Если же степень числителя равна степени знаменателя или больше ее, то рациональная дробь (5,1) называется *неправильной*.

Примеры. 1) Дробь $\frac{x^2+5x-3}{x^3+3x-1}$ — правильная (степень числителя меньше степени знаменателя).

2) Дроби $\frac{x^3+x^2-9}{2x^3+3x^2-x+7}$ и $\frac{x^5-3x^2+x-8}{x^2+x+3}$ — неправильные: в первой степень числителя равна степени знаменателя, а во второй степень числителя больше степени знаменателя.

Из неправильной рациональной дроби всегда можно выделить целую часть (многочлен). Это достигается делением числителя на знаменатель по правилу деления многочленов.

Например, неправильная дробь $\frac{x^4-3x^2+5x+4}{x^2-8x+5}$ может быть представлена так:

$$\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} x^4-3x^2+5x+4 \\ x^4-8x^3+5x^2 \end{array} & \begin{array}{l} x^2-8x+5 \\ \hline x^2+8x+56 \end{array} \\
\hline
-\begin{array}{r} 8x^3-8x^2+5x+4 \\ 8x^3-64x^2+40x \end{array} & \\
\hline
-\begin{array}{r} 56x^2-35x+4 \\ 56x^2-448x+280 \end{array} & \\
\hline
413x-276 &
\end{array}$$

и, таким образом,

$$\frac{x^4-3x^2+5x+4}{x^2-8x+5} = \underbrace{x^2+8x+56}_{\text{Целая часть (многочлен)}} + \underbrace{\frac{413x-276}{x^2-8x+5}}_{\text{Правильная дробь}}.$$

Всякая неправильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы многочлена и правильной дроби.

Поэтому интегрирование рациональной дроби (5,1) всегда может быть приведено к интегрированию многочлена и правильной дроби.

Корни многочлена. Если при $x = x_1$ многочлен

$$Q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \qquad (5,2)$$

обращается в нуль, т. е. $Q(x_1) = 0$, то число x_1 называется корнем многочлена.

Разложение многочлена на множители. 1. Если числа x_1, x_2, x_3, ..., x_n являются корнями многочлена (5,2), то этот многочлен может быть разложен на множители по формуле

$$Q(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n). \qquad (5,3)$$

2. Многочлен степени n не может иметь больше, чем n различных корней.

3. Корень многочлена x_1 называется простым, если в разложение (5,3) множитель $x - x_1$ входит один раз. Если же этот множитель в формулу (5,3) входит α_1 раз, то корень x_1 называется корнем кратности α_1 многочлена (5,2).

Если корень x_1 имеет кратность α_1, корень x_2 — кратность α_2, а корень x_p — кратность α_p, то формулу (5,3) можно заменить такой:

$$Q(x) = a_0(x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2} \ldots (x - x_p)^{\alpha_p}, \qquad (5,4)$$

причем $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = n$.

4. Если коэффициенты многочлена (5,2) — действительные числа, а его корнем является комплексное число $a + bi$, то его корнем будет также и комплексное число $a - bi$, сопряженное с $a + bi$.

Если в формуле (5,3) перемножить множители $x - (a + bi)$ и $x - (a - bi)$, соответствующие этим корням, то получится квадратичный множитель вида $x^2 + px + q$, где p и q — действительные числа.

В случае, когда $a + bi$ — простой корень многочлена (5,2), то и $a - bi$ — также простой корень этого многочлена.

Если же $a + bi$ — корень кратности k многочлена (5,2), то и корень $a - bi$ имеет такую же кратность. В этом случае паре этих комплексных сопряженных корней в (5,3) будет соответствовать множитель $(x^2 + px + q)^k$.

Если многочлен (5,2) имеет не только действительные, но и комплексные корни, то вместо формулы (5,4) имеет место формула

$$Q(x) = a_0(x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2} \ldots (x^2 + p_1x + q_1)^{k_1}(x^2 + \\ + p_2x + q_2)^{k_2} \ldots (x^2 + p_lx + q_l)^{k_l}, \qquad (5,5)$$

причем

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + 2k_1 + 2k_2 + \ldots + 2k_l = n.$$

Квадратичные множители, входящие в эту формулу, не имеют действительных корней и на множители первой степени с действительными коэффициентами не разлагаются.

Теорема (о разложении рациональной дроби на простейшие). Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ — правильная, несократимая рациональная дробь, а ее знаменатель после разложения на множители имеет вид

$$Q(x) = a_0 (x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} \ldots (x^2 + p_1 x + q_1)^{k_1} (x^2 + p_2 x + q_2)^{k_2} \ldots (x^2 + p_l x + q_l)^{k_l},$$

где $x_1, x_2, \ldots$ — действительные числа, а квадратичные множители не имеют действительных корней.

Тогда дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ может быть представлена в виде суммы простейших дробей. В этой сумме каждому множителю вида $(x - x_1)^p$ в знаменателе, где x_1 — любой из действительных корней, а p — его кратность, соответствует выражение вида

$$\frac{A_1}{(x-x_1)^p} + \frac{A_2}{(x-x_1)^{p-1}} + \frac{A_3}{(x-x_1)^{p-2}} + \ldots + \frac{A_p}{x - x_1}, \quad (5,6),$$

а каждому множителю $(x^2 + px + q)^r$ знаменателя — выражение вида

$$\frac{B_1 x + C_1}{(x^2+px+q)^r} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2+px+q)^{r-1}} + \frac{B_3 x + C_3}{(x^2+px+q)^{r-2}} + \ldots + \frac{B_r x + C_r}{x^2+px+q}, \quad (5,7)$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_p, B_1, B_2, \ldots, B_r, C_1, C_2 \ldots, C_r$ — действительные числа, подлежащие определению.

Теперь мы на нескольких примерах укажем два наиболее распространенных способа определения коэффициентов, стоящих в числителях тех простейших дробей, на которые разлагается данная рациональная дробь. Это способ неопределенных коэффициентов и способ задания частных значений.

Задача 5,1. Разложить на простейшие дроби рациональную дробь $\frac{x^2+2x-4}{(x-1)(x-2)(x+3)(x-4)}$.

Решение. Применим способ неопределенных коэффициентов. Общий вид разложения будет таким:

$$\frac{x^2+2x-4}{(x-1)(x-2)(x+3)(x-4)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x+3} + \frac{A_4}{x-4}.$$

Умножим обе части этого равенства на знаменатель левой части:

$$x^2 + 2x - 4 = A_1(x-2)(x+3)(x-4) + A_2(x-1)(x+3)(x-4) + A_3(x-1)(x-2)(x-4) + A_4(x-1)(x-2)(x+3). \quad (5,8)$$

Левая часть равенства должна быть тождественно равна правой, т. е. равенство (5,8) должно выполняться при любом значении x. Это будет иметь место только в том случае, когда коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства будут между собою равны.

В правой части (5,8) произведем умножение двучленов и получим

$$x^2+2x-4=A_1(x^3-3x^2-10x+24)+A_2(x^3-2x^2-11x+12)+$$
$$+A_3(x^3-7x^2+14x-8)+A_4(x^3-7x+6).$$

Это равенство можно переписать иначе, расположив многочлен в правой части по убывающим степеням x:

$$x^2+2x-4=(A_1+A_2+A_3+A_4)x^3+(-3A_1-2A_2-7A_3)x^2+$$
$$+(-10A_1-11A_2+14A_3-7A_4)x+(24A_1+12A_2-8A_3+6A_4).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях последнего равенства, получаем систему четырех уравнений первой степени с четырьмя неизвестными:

$$\begin{array}{c|l}
x^3 & A_1+A_2+A_3+A_4=0 \\
x^2 & -3A_1-2A_2-7A_3=1 \\
x & -10A_1-11A_2+14A_3-7A_4=2 \\
x^0 & 24A_1+12A_2-8A_3+6A_4=-4 \\
\text{(свободный член)} &
\end{array}$$

Решив эту систему, получим:

$$A_1=-\frac{1}{12};\quad A_2=-\frac{2}{5};\quad A_3=\frac{1}{140};\quad A_4=\frac{10}{21}.$$

Теперь определим числа A_1, A_2, A_3 и A_4 вторым способом — способом задания частных значений.

Так как равенство (5,8) — тождество, то оно сохраняется при любом значении x. Будем давать x такие значения, чтобы в правой части все члены, кроме одного, обращались в нуль. Такими «выгодными» значениями являются, очевидно, корни знаменателя, т. е. значения $x=1$; $x=2$; $x=-3$; $x=4$.

При $x=1$ в правой части (5,8) все слагаемые, кроме первого, обратятся в нуль, левая часть равенства x^2+2x-4 при $x=1$ будет равна -1, и мы получим

$$-1=A_1(1-2)(1+3)(1-4);\quad -1=12A_1;\quad A_1=-\frac{1}{12}.$$

При $x=2$ левая часть равна 4, а в правой части (5,8) все слагаемые, кроме второго, будут равны нулю:

$$4=A_2(2-1)(2+3)(2-4);\quad 4=-10A_2;\quad A_2=-\frac{2}{5}.$$

При $x=-3$ в правой части (5,8) все слагаемые, кроме третьего, равны нулю:

$$-1=A_3(-3-1)(-3-2)(-3-4);\ -1=-140A_3;\ A_3=\frac{1}{140}.$$

При $x=4$ в правой части (5,8) все слагаемые, кроме четвертого, обратятся в нуль, и мы будем иметь:

$$20=A_4(4-1)(4-2)(4+3);\quad 20=42A_4;\quad A_4=\frac{10}{21}.$$

Заметим, что каким бы способом ни вычислялись неизвестные коэффициенты, мы всегда получим для них одни и те же значения, так как разложение рациональной дроби на простейшие может быть осуществлено единственным образом.

Итак, заданная дробь

$$\frac{x^2+2x-4}{(x-1)(x-2)(x+3)(x-4)} = -\frac{1}{12(x-1)} - \frac{2}{5(x-2)} + \frac{1}{140(x+3)} + \frac{10}{21(x-4)}.$$

Укажем, что способ задания частных значений x для определения неизвестных коэффициентов особенно удобен в том случае, когда знаменатель дроби содержит только действительные множители первой степени, среди которых нет равных.

В других случаях способ задания частных значений также дает сокращение вычислений, так как позволяет избежать решения системы уравнений с числом уравнений, равным числу неизвестных.

Однако мы рекомендуем учащемуся овладеть этими двумя способами.

Задача 5,2 (для самостоятельного решения).

Рациональную дробь $\frac{x^3+2}{(x-1)(x-2)(x-3)(x+1)}$ разложить на элементарные. Решение провести двумя способами.

Ответ. $\frac{3}{4(x-1)} - \frac{10}{3(x-2)} + \frac{29}{8(x-3)} - \frac{1}{24(x+1)}$.

Задача 5,3 (для самостоятельного решения).

Разложить на простейшие дроби следующие рациональные дроби (применить два способа):

1) $\frac{11x-4}{x^2+2x-8}$.

Указание: знаменатель разложить на множители.

2) $\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}$; 3) $\frac{3x^3-24x^2-41x+20}{(x+1)(x+2)(x-3)(x-2)}$;

4) $\frac{5x^2-25x+26}{(x-1)(x-2)(x-3)}$; 5) $\frac{11x+40}{4(x-4)(x+2)}$;

6) $\frac{3x^2+23x+28}{(x+2)(x+3)(x-4)}$.

Ответ. 1) $\frac{3}{x-2}+\frac{8}{x+4}$; 2) $\frac{4}{x-1}-\frac{7}{x+3}+\frac{5}{x-4}$;

3) $\frac{17}{6(x+1)}+\frac{9}{10(x+2)}-\frac{119}{10(x-3)}+\frac{67}{6(x-2)}$;

4) $\frac{3}{x-1}+\frac{4}{x-2}-\frac{2}{x-3}$; 5) $\frac{7}{2(x-4)}-\frac{3}{4(x+2)}$;

6) $\frac{1}{x+2}-\frac{2}{x+3}+\frac{4}{x-4}$.

Задача 5,4 (для самостоятельного решения).

Представить в виде суммы многочлена и простейших дробей рациональные дроби:

1) $\frac{3x^3-10x^2-11x+21}{x^2-5x+4}$; 2) $\frac{x^4-x^3-9x^2-10x-14}{x^2-2x-8}$;

3) $\frac{30x^5+90x^4+165x^3+341x^2+271x+30}{x^3+3x^2+2x}$.

Указание. Выделить целую часть, согласно объяснению на стр. 60; знаменатели разложить на множители.

Ответ. 1) $3x+5-\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x-4}$;

2) $x^2+x+1+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-4}$;

3) $30x^2+105+\frac{15}{x}+\frac{5}{x+1}+\frac{6}{x+2}$.

Задача 5,5. Разложить на простейшие дроби рациональную дробь $\frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)}$.

Решение. Разлагая дробь на простейшие, получаем согласно формуле (5,6):

$$\frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)}=\frac{A_1}{(x-2)^3}+\frac{A_2}{(x-2)^2}+\frac{A_3}{x-2}+\frac{A_4}{x-5}.$$

Умножим обе части этого равенства на знаменатель левой части:

$$x^3-6x^2+9x+7=A_1(x-5)+A_2(x-2)(x-5)+ \\ +A_3(x-2)^2(x-5)+A_4(x-2)^3. \qquad (5,9)$$

Для определения неизвестных коэффициентов A_1, A_2, A_3 и A_4 применим второй способ — способ задания частных значений в сочетании со способом неопределенных коэффициентов. Напоминаем, что написанное равенство является тождеством: оно остается верным при любом значении x. Принимая $x=5$ и $x=2$, мы сможем просто определить два коэффициента. При $x=5$ имеем в левой части 27, тогда $27=A_4(5-2)^3$; $27=27A_4$; $A_4=1$.

При $x=2$ получаем в левой части 9.

$$9=A_1(2-5);\quad 9=-3A_1;\quad A_1=-3.$$

Теперь сравним коэффициенты при x^3 в левой и правой части тождества (5,9). В левой части коэффициент при x^3 равен 1, а в правой, если выполнить в ней возведение в степень и умножение, коэффициент при x^3 равен A_3+A_4. Таким образом, $A_3+A_4=1$. Но так как $A_4=1$, то $A_3=0$.

Сравним теперь свободные члены в левой и правой части (5,9). В правой части свободный член равен $-5A_1+10A_2-20A_3-8A_4$, а в левой 7, т. е. имеет место уравнение

$$-5A_1+10A_2-20A_3-8A_4=7.$$

Подставляя найденные значения A_1, A_4 и A_3, получим для определения A_2 уравнение

$$15 + 10A_2 - 8 = 7; \quad 10A_2 = 0; \quad A_2 = 0.$$

Итак, данная дробь

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 9x + 7}{(x-2)^3(x-5)} = -\frac{3}{(x-2)^3} + \frac{1}{x-5}.$$

Определение A_2 и A_3 можно было провести способом задания частных значений. Например, при $x = 1$ и $x = 0$ получаем систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{r} 11 = -4A_1 + 4A_2 - 4A_3 - A_4 \\ 7 = -5A_1 + 10A_2 - 20A_3 - 8A_4 \end{array}\right\}.$$

Подставляя найденные значения $A_1 = -3$, $A_4 = 1$, получаем:

$$\left.\begin{array}{r} 11 = 12 + 4A_2 - 4A_3 - 1 \\ 7 = 15 + 10A_2 - 20A_3 - 8 \end{array}\right\}, \text{ или } \left.\begin{array}{r} 4A_2 - 4A_3 = 0 \\ A_2 - 2A_3 = 0 \end{array}\right\}.$$

Отсюда следует, что $A_2 = A_3 = 0$.

Задача 5,6 (для самостоятельного решения).

Разложить на простейшие дроби:

1) $\dfrac{x^4 + 5x^3 - 10x^2 - 8x + 5}{(x-2)^3(x+3)^2}$;

2) $\dfrac{5x^2 + 6x + 9}{(x-3)^2(x+1)^2}$;

3) $\dfrac{x^2 - x + 14}{(x-4)^3(x-2)}$;

4) $\dfrac{x^3 - 8x + 7}{(x^2 - 3x - 10)^2}$;

5) $\dfrac{-69x^3 - 12x^2 + 475x + 646}{(x+2)^2(x-3)^2}$;

6) $\dfrac{3x^2 + 13x + 11}{(x+1)^2(x+2)}$;

7) $\dfrac{x^3 - 2x^2 - 3x + 4}{x^2(x-2)^2}$.

Указания. В четвертом примере $x^2 - 3x - 10$ разложить на множители; в седьмом примере представить дробь в виде $\frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{(x-2)^2} + \frac{A_4}{x-2}$.

Ответ. 1) $\dfrac{1}{5(x-2)^3} + \dfrac{42}{25(x-2)^2} + \dfrac{27}{25(x-2)} + \dfrac{23}{25(x+3)^2} - \dfrac{2}{25(x+3)}$; 2) $\dfrac{9}{2(x-3)^2} + \dfrac{1}{2(x+1)^2}$;

3) $\dfrac{13}{(x-4)^3} - \dfrac{3}{(x-4)^2} + \dfrac{2}{x-4} - \dfrac{2}{x-2}$;

4) $-\dfrac{8}{49(x-5)^2} + \dfrac{30}{343(x-5)} + \dfrac{27}{49(x+2)^2} - \dfrac{30}{343(x+2)}$;

5) $\dfrac{8}{(x+2)^2} - \dfrac{9}{x+2} + \dfrac{4}{(x-3)^2} - \dfrac{60}{x-3}$;

6) $\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{6}{x+1} - \dfrac{3}{x+2}$;

7) $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{4x} - \dfrac{1}{2(x-2)^2} + \dfrac{3}{4(x-2)}$.

Задача 5,7. Дробь $\frac{1}{x^3+1}$ разложить на простейшие.

Решение. Разложим знаменатель x^3+1 на множители: $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$. Квадратичный множитель x^2-x+1 действительных корней не имеет, а потому на основании формул (5,6) и (5,7) имеет место разложение

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{B_1x+C_1}{x^2-x+1}.$$

Умножая обе части равенства на x^3+1, получаем

$$1 = A_1(x^2-x+1) + (B_1x+C_1)(x+1).$$

Для определения неизвестных A_1, B_1 и C_1 воспользуемся способом неопределенных коэффициентов. Выполняя умножение, имеем

$$1 = (A_1+B_1)x^2 + (-A_1+C_1+B_1)x + A_1 + C_1.$$

Это равенство является тождеством и может сохраняться только тогда, когда коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства равны между собой:

$$\begin{array}{c|l}
x^2 & A_1 + B_1 = 0 \qquad (1) \\
x & -A_1 + C_1 + B_1 = 0 \qquad (2) \\
x^0 & A_1 + C_1 = 1 \qquad (3) \\
\text{(свобод-} & \\
\text{ный член)} &
\end{array}$$

Складывая первое уравнение с третьим и вычитая из полученного уравнения второе, получаем

$$3A_1 = 1; \quad A_1 = \frac{1}{3}.$$

Тогда из уравнения (1) $B_1 = -\frac{1}{3}$, а из уравнения (3) $C_1 = \frac{2}{3}$ и, окончательно

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{x-2}{3(x^2-x+1)}.$$

Задача 5,8. Дробь $\frac{x^2}{1-x^4}$ разложить на простейшие.

Решение. Знаменатель дроби $1-x^4 = (1-x)(1+x)(1+x^2)$. Поэтому данная дробь может быть представлена в виде

$$\frac{x^2}{1-x^4} = \frac{A_1}{1-x} + \frac{A_2}{1+x} + \frac{A_3x+A_4}{1+x^2}.$$

После умножения обеих частей равенства на $1-x^4$ получим тождество

$$x^2 = A_1(1+x)(1+x^2) + A_2(1-x)(1+x^2) + (A_3x+A_4)(1-x^2). \qquad (5,10)$$

Для определения неизвестных коэффициентов A_1, A_2, A_3 и A_4 применим сначала способ задания частных значений. При $x = 1$

получаем в левой части 1, а в правой все слагаемые, кроме первого, обратятся в нуль, а первое слагаемое станет равным $4A_1$. A_1 найдем из полученного уравнения: $1 = 4A_1$, $A_1 = \frac{1}{4}$. При $x = -1$ получаем в левой части равенства 1, а в правой $4A_2$, и тогда $1 = 4A_2$, а $A_2 = \frac{1}{4}$.

Теперь сравним коэффициенты при x^3 в левой и правой части равенства (5,10). В левую часть этого равенства x^3 не входит. Это означает, что коэффициент при x^3 равен 0, а в правой части коэффициент при x^3 равен $A_1 - A_2 - A_3$. Таким образом,

$$0 = A_1 - A_2 - A_3.$$

Учитывая, что A_1 и A_2 уже определены, имеем

$$0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - A_3,$$

а отсюда следует, что $A_3 = 0$.

Нам осталось определить A_4.

Дадим x значение 0. В левой части получим 0, а в правой $A_1 + A_2 + A_4$, и тогда

$$0 = A_1 + A_2 + A_4.$$

Так как $A_1 = A_2 = \frac{1}{4}$, то $0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + A_4$, отсюда $A_4 = -\frac{1}{2}$.

Итак, предложенная дробь

$$\frac{x^2}{1-x^4} = \frac{1}{4(1-x)} + \frac{1}{4(1+x)} - \frac{1}{2(1+x^2)}.$$

Задача 5,9* (для самостоятельного решения). Разложить на простейшие дроби:

$$1)\ \frac{1}{(a+bx)(1+x^2)};\quad 2)\ \frac{x^2+2}{(x-1)(x+1)(x-2)(x^2+1)};$$

$$3)\ \frac{1}{x^4+1}.$$

Указание. $x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$.

Дробь представить в виде

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

Ответ. 1) $\frac{a-bx}{(a^2+b^2)(1+x^2)} + \frac{b^2}{(a^2+b^2)(a+bx)}$;

2) $-\frac{3}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)} + \frac{2}{5(x-2)} + \frac{x+2}{10(x^2+1)}$;

3) $A = \frac{1}{2\sqrt{2}}$; $B = \frac{1}{2}$; $C = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$; $D = \frac{1}{2}$.

Задача 5,10 (для самостоятельного решения).

Рациональные дроби: 1) $\frac{x^2+1}{x^3+1}$ и 2) $\frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}$ разложить на простейшие.

Указание. $x^3+x^2+4x+4 = x^2(x+1)+4(x+1) = (x+1)(x^2+4)$.

Ответ. 1) $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x+1}+\frac{x+1}{x^2-x+1}\right)$; 2) $-\frac{2}{x+1}+\frac{2x+1}{x^2+4}$.

Задача 5,11 (для самостоятельного решения). Разложить на простейшие дроби: 1) $\frac{x^2}{x^4+x^2-2}$; 2) $\frac{1}{1-x^6}$.

Указание. 1) Знаменатель разложить на множители. Для этого решить биквадратное уравнение $x^4+x^2-2=0$. Его корни $x_1=1$; $x_2=-1$; $x_3=\sqrt{2}i$ и $x_4=-\sqrt{2}i$, а потому $x^4+x^2-2=(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}i)$. Перемножая множители, соответствующие мнимым корням $(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}i)$, получим окончательно

$$x^4+x^2-2=(x-1)(x+1)(x^2+2).$$

$$2)\ 1-x^6=(1-x^3)(1+x^3)=(1-x)(1+x+x^2)(1+x)(1-x+x^2).$$

Ответ. 1) $\frac{1}{6}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{6}\frac{1}{x+1}+\frac{2}{3}\frac{1}{2+x^2}$;

2) $\frac{1}{6}\frac{1}{1+x}+\frac{1}{6}\frac{1}{1-x}+\frac{x+2}{6(x^2+x+1)}+\frac{x-2}{6(x^2-x+1)}$.

ШЕСТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: *Интегрирование простейших рациональных дробей.*

Интегрирование рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ приводится к интегрированию простейших дробей вида:

1) $\frac{A}{x-a}$; 2) $\frac{A}{(x-a)^n}$ ($n>0$ и целое); 3) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$;

4) $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ ($n>0$ и целое).

1. $$\int\frac{A}{x-a}=dx=\ln|x-a|+C. \qquad (6,1)$$

Задача 6,1. Найти интегралы:

1) $\int\frac{dx}{x-3}$; 2) $\int\frac{dx}{5-x}$; 3) $\int\frac{dx}{2x-1}$.

Решение. 1) По формуле (6,1) $\int \frac{dx}{x-3} = \ln|x-3| + C$;

$$2) \int \frac{dx}{5-x} = -\int \frac{-1dx}{5-x} = -\ln|5-x| + C;$$

$$3) \int \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{2dx}{2x-1}}_{\text{Числитель равен производной знаменателя}} = \frac{1}{2}\ln|2x-1| + C.$$

Задача 6,2 (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int \frac{dx}{x-13}$; 2) $\int \frac{dx}{15-3x}$; 3) $\int \frac{dx}{4-7x}$; 4) $\int \frac{dx}{3-8x}$; 5) $\int \frac{3dx}{4x-9}$.

Ответ. 1) $\ln|x-13| + C$;

2) $-\frac{1}{3}\ln|15-3x| + C$; 3) $-\frac{1}{7}\ln|4-7x| + C$;

4) $-\frac{1}{8}\ln|3-8x| + C$; 5) $\frac{3}{4}\ln|4x-9| + C$.

2. $\int \frac{A\,dx}{(x-a)^n} = A\int (x-a)^{-n}\,dx = \frac{A}{-n+1}(x-a)^{-n+1} + C.$

Окончательно:

$$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^n} = -\frac{A}{n-1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C. \qquad (6,2)$$

Задача 6,3. Вычислить интегралы:

$$1)\ I = \int \frac{dx}{(x-2)^3};\quad 2)\ I = \int \frac{dx}{(x+3)^5};$$

$$3)\ I = \int \frac{dx}{(2x-1)^4};\quad 4)\ I = \int \frac{dx}{(4-3x)^3}.$$

Решение. Для вычисления первых двух интегралов непосредственно применяется формула (6,2):

1) $n = 3$; $I = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x-2)^2} + C$.

2) $n = 5$; $I = -\frac{1}{4}\frac{1}{(x+3)^4} + C$.

3) Чтобы можно было применить формулу (6,2), числитель дроби $\frac{1}{(2x-1)^4}$, стоящей под интегралом, должен быть равен производной от основания степени знаменателя. Преобразуем дробь к виду

$$\frac{1}{(2x-1)^4} = \frac{1}{2}\frac{2}{(2x-1)^4},$$

и тогда

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2}{(2x-1)^4}\,dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\,\frac{1}{(2x-1)^3}\right) + C =$$
$$= -\frac{1}{6}\,\frac{1}{(2x-1)^3} + C.$$

4) Этот интеграл вычисляется как и предыдущий

$$I = -\frac{1}{3}\int \frac{-3}{(4-3x)^3}\,dx = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\,\frac{1}{(4-3x)^2}\right) + C =$$
$$= \frac{1}{6}\,\frac{1}{(4-3x)^2} + C.$$

3. $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx.$

Для вычисления этого интеграла поступают так:

а) в числителе дроби, стоящей под интегралом, записывается производная знаменателя, т. е. $(2x+p)$. Тождественными преобразованиями из $2x+p$ получают заданный числитель $Ax+B$. Для этого следует $2x+p$ умножить на $\frac{A}{2}$ и к полученному произведению прибавить $B-\frac{Ap}{2}$. Очевидно, что

$$(2x+p)\frac{A}{2} + B - \frac{Ap}{2} = Ax + B.$$

б) Преобразованная дробь $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$ имеет вид

$$\frac{(2x+p)\frac{A}{2} + B - \frac{Ap}{2}}{x^2+px+q}$$

и может быть представлена как сумма двух дробей:

$$\frac{A}{2}\,\frac{2x+p}{x^2+px+q} + \frac{B-\frac{Ap}{2}}{x^2+px+q}.$$

Первая дробь интегрируется просто: в числителе находится производная знаменателя — интегрирование приводит к натуральному логарифму модуля знаменателя. Для интегрирования второй дроби в знаменателе выделяют полный квадрат:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}.$$

Интеграл от второй дроби приводится к табличному интегралу (1,23), если $4q - p^2 < 0$, и к табличному интегралу (1,21), если $4q - p^2 > 0$.

Замечание. Если в знаменателе дроби вместо квадратичного трехчлена $x^2 + px + q$ находится трехчлен $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, то коэффициент a следует вынести за скобку и тем самым свести этот случай к предыдущему.

В задачах 6,4 и 6,5 даны примеры вычисления интегралов этого типа.

Задача 6,4. Найти интегралы:

1) $I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 14}$; 2) $I_2 = \int \frac{dx}{x^2 + x + 1}$; 3) $I_3 = \int \frac{dx}{x^2 + 3x + 6}$;

4) $I_4 = \int \frac{dx}{x^2 - 9x + 25}$; 5) $I_5 = \int \frac{dx}{x^2 - 7x + 14}$; 6) $I_6 = \int \frac{dx}{x^2 - x + 14}$.

Решение. В этом практическом занятии нам часто придется пользоваться формулой (3,4). Напомним, что она имеет такой вид:

$$\int \frac{u'}{u^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

1) Выделим полный квадрат в знаменателе дроби:

$$x^2 + 4x + 14 = (x + 2)^2 - 4 + 14 = (x + 2)^2 + 10.$$

Применим формулу (3,4)

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 10} = \frac{1}{\sqrt{10}} \operatorname{arctg} \frac{x + 2}{\sqrt{10}} + C.$$

$$\left| \begin{array}{l} u = x + 2;\ u' = 1 \\ a^2 = 10;\ a = \sqrt{10} \end{array} \right|$$

2) Выделяем полный квадрат в знаменателе дроби:

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4};$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C =$$

$$\left| \begin{array}{l} u = x + \frac{1}{2};\ u' = 1 \\ a^2 = \frac{3}{4};\ a = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right|$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

3) Выделим полный квадрат в знаменателе дроби:

$$x^2+3x+6=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+6=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4};$$

$$I_3=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{15}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{2}}+C=$$

Формулу (3,4) можно применить: $u=x+\frac{3}{2}$; $u'=1$; $a^2=\frac{15}{4}$;

$$=\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{15}}+C.$$

4) В знаменателе выделяем полный квадрат:

$$x^2-9x+25=\left(x-\frac{9}{2}\right)^2-\frac{81}{4}+25=\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{19}{4};$$

$$I_4=\int\frac{dx}{\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{19}{4}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{19}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{9}{2}}{\frac{\sqrt{19}}{2}}+C=$$

Формулу (3,4) можно применить: $u=x-\frac{9}{2}$; $u'=1$; $a^2=\frac{19}{4}$

$$=\frac{2}{\sqrt{19}}\operatorname{arctg}\frac{2x-9}{\sqrt{19}}+C.$$

5) Выделим полный квадрат в знаменателе:

$$x^2-7x+14=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}+14=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{7}{4};$$

$$I_5=\int\frac{dx}{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{7}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}+C=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x-7}{\sqrt{7}}+C.$$

6) $x^2-x-14=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+14=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{55}{4};$

$$I_6=\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{55}{4}}=\frac{2}{\sqrt{55}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{55}}+C.$$

Задача 6,5 (для самостоятельного решения).
Найти интегралы:

$$1)\ \int\frac{dx}{x^2+x+5};\quad 2)\ \int\frac{dx}{x^2+2x+6};\ 3)\ \int\frac{dx}{x^2+6x+19};$$

$$4)\ \int\frac{dx}{x^2+5x+12};\ 5)\ \int\frac{dx}{x^2-7x+20}.$$

Ответ. 1) $\frac{2}{\sqrt{19}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{19}}+C;$

2) $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{5}}+C;$ 3) $\frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{\sqrt{10}}+C;$

4) $\frac{2}{\sqrt{23}}\operatorname{arctg}\frac{2x+5}{\sqrt{23}}+C;$ 5) $\frac{2}{\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{2x+7}{\sqrt{31}}+C.$

Задача 6,6. Найти интегралы:

$$1)\ I_1=\int\frac{dx}{5x^2+7x+11};\quad 2)\ I_2=\int\frac{dx}{4x^2+x+5};$$

$$3)\ I_3=\int\frac{dx}{3x^2-8x+9}.$$

Решение. Эта задача отличается от предыдущих тем, что коэффициент при x^2 в знаменателе не равен единице. Для того чтобы свести этот случай к предыдущему, будем этот коэффициент выносить за скобку (см. замечание на стр. 72).

$$1)\ 5x^2+7x+11=5\left(x^2+\frac{7}{5}x+\frac{11}{5}\right)=5\left[\left(x+\frac{7}{10}\right)^2-\right.$$
$$\left.-\frac{49}{100}+\frac{11}{5}\right]=5\left[\left(x+\frac{7}{10}\right)^2+\frac{171}{100}\right];$$

$$I_1=\int\frac{dx}{5\left[\left(x+\frac{7}{10}\right)^2+\frac{171}{100}\right]}=\frac{1}{5}\frac{1}{\frac{\sqrt{171}}{10}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{7}{10}}{\frac{\sqrt{171}}{100}}+C=$$
$$=\frac{2}{\sqrt{171}}\operatorname{arctg}\frac{10x+7}{\sqrt{171}}+C.$$

$$2)\ 4x^2+x+5=4\left(x^2+\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}\right)=4\left[\left(x+\frac{1}{8}\right)^2-\frac{1}{64}+\frac{5}{4}\right]=$$
$$=4\left[\left(x+\frac{1}{8}\right)^2+\frac{79}{64}\right];$$

$$I_2=\int\frac{dx}{4\left[\left(x+\frac{1}{8}\right)^2+\frac{79}{64}\right]}=\frac{1}{4}\frac{1}{\frac{\sqrt{79}}{8}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{8}}{\frac{\sqrt{79}}{8}}+C=$$
$$=\frac{2}{\sqrt{79}}\operatorname{arctg}\frac{8x+1}{\sqrt{79}}+C.$$

3) $3x^2-8x+9=3\left(x^2-\frac{8}{3}x+3\right)=3\left[\left(x-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{16}{9}+3\right]=$
$=3\left[\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{11}{9}\right]$;

$$I_3=\int\frac{dx}{3\left[\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{11}{9}\right]}=\frac{1}{3}\frac{1}{\frac{\sqrt{11}}{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{4}{3}}{\frac{\sqrt{11}}{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{3x-4}{\sqrt{11}}+C.$$

Задача 6,7 (для самостоятельного решения).
Найти интегралы:

$$1)\ \int\frac{dx}{5x^2+9x+10};\qquad 2)\ \int\frac{dx}{7x^2-3x+5};$$

$$3)\ \int\frac{dx}{9x^2+x+12};\qquad 4)\ \int\frac{dx}{6x^2+7x+15};$$

$$5)\ \int\frac{dx}{3x^2-11x+17}.$$

Ответ. 1) $\frac{2}{\sqrt{119}}\operatorname{arctg}\frac{10x+9}{\sqrt{119}}+C$;

2) $\frac{2}{\sqrt{131}}\operatorname{arctg}\frac{14x-3}{\sqrt{131}}+C$;

3) $\frac{2}{\sqrt{431}}\operatorname{arctg}\frac{18x+1}{\sqrt{431}}+C$;

4) $\frac{2}{\sqrt{311}}\operatorname{arctg}\frac{12x+7}{\sqrt{311}}+C$;

5) $\frac{2}{\sqrt{83}}\operatorname{arctg}\frac{6x-11}{\sqrt{83}}+C$.

Теперь выполним упражнения в интегрировании дробей вида $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$.

Задача 6,8. Найти интегралы:

$$1)\ I_1=\int\frac{3x+4}{x^2+7x+14}dx;\quad 2)\ I_2=\int\frac{2x-3}{x^2+x+5}dx;$$

$$3)\ I_3=\int\frac{7x-8}{x^2+5x+17}dx.$$

Решение. На стр. 71 дано указание, как вычислять эти интегралы. Рекомендуется еще раз ознакомиться с ним.

1) Преобразуем дробь $\frac{3x+4}{x^2+7x+14}$, стоящую под интегралом: выделим в числителе из $3x+4$ производную знаменателя, равную $2x+7$, но чтобы величина числителя при этом не изменилась:

$$3x+4=(2x+7)\frac{3}{2}+4-\frac{21}{2}=(2x+7)\frac{3}{2}-\frac{13}{2}.$$

Поэтому

$$I_1=\int\frac{(2x+7)\frac{3}{2}-\frac{13}{2}}{x^2+7x+14}\,dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x+7}{x^2+7x+14}\,dx-$$

Преобразовываем в разность двух интегралов, причем во втором интеграле в знаменателе выделяем полный квадрат	Числитель является производной знаменателя. Применима формула (1,32)

$$-\frac{13}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}+14}=\frac{3}{2}\ln(x^2+7x+14)-$$

$$-\frac{13}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{7}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}+C.$$

Ответ. $I_1=\frac{3}{2}\ln(x^2+7x+14)-\frac{13}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+7}{\sqrt{7}}+C.$

Замечание. Под знаком логарифма трехчлен $x^2+7x+14$ не взят по абсолютной величине, так как корни его комплексны, коэффициент при x^2 положителен, а поэтому при любом значении x этот трехчлен положителен.

Это замечание следует иметь в виду и в дальнейшем.

2) Из числителя дроби $2x-3$ выделим производную знаменателя, равную $2x+1$, и получим $2x-3=(2x+1)-4$. Поэтому

$$I_2=\int\frac{(2x+1)-4}{x^2+x+5}\,dx=\int\frac{2x+1}{x^2+x+5}\,dx-$$

Представляем как разность двух интегралов, а во втором интеграле в знаменателе выделяем полный квадрат	В числителе производная знаменателя. Применить формулу (1,32)

$$-4\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+5}=\ln(x^2+x+5)-4\frac{1}{\frac{\sqrt{19}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{19}}{2}}+C=$$

$$=\ln(x^2+x+5)-\frac{8}{\sqrt{19}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{19}}+C.$$

3) Поступаем так же. Из числителя дроби $7x-8$ выделяем производную знаменателя, равную $2x+5$:

$$7x-8=(2x+5)\frac{7}{2}-8-\frac{35}{2}=(2x+5)\frac{7}{2}-\frac{51}{2};$$

$$I_3=\frac{7}{2}\ln(x^2+5x+17)-\frac{51}{\sqrt{43}}\operatorname{arctg}\frac{2x+5}{\sqrt{43}}+C.$$

Задача 6,9 (для самостоятельного решения). Найти интегралы:

1) $\int\frac{3x-11}{x^2+8x+18}dx$; 2) $\int\frac{x+7}{x^2+11x+42}dx$; 3) $\int\frac{x-3}{x^2-9x+23}dx$;

4) $\int\frac{7x+4}{x^2+x+9}dx$; 5) $\int\frac{5x-7}{x^2+3x+8}dx$.

Ответ. 1) $\frac{3}{2}\ln(x^2+8x+18)-\frac{23}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+4}{\sqrt{2}}+C$;

2) $\frac{1}{2}\ln(x^2+11x+42)+\frac{3}{\sqrt{47}}\operatorname{arctg}\frac{2x+11}{\sqrt{47}}+C$;

3) $\frac{1}{2}\ln(x^2-9x+23)+\frac{3}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2x-9}{\sqrt{11}}+C$;

4) $\frac{7}{2}\ln(x^2+x+9)+\frac{1}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{35}}+C$;

5) $\frac{5}{2}\ln(x^2+3x+8)-\frac{29}{\sqrt{23}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{23}}+C$.

4. Интеграл вида $\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, где $n>1$ и целое, а корни знаменателя комплексны, сводится к вычислению двух интегралов. Это достигается так: в числителе записывается производная основания степени знаменателя, т. е. производная от x^2+px+q, и так же, как было указано в п. 3, (стр. 71), эта производная преобразовывается в выражение $Ax+B$, стоящее в числителе. Дробь

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}=\frac{(2x+p)\frac{A}{2}+B-\frac{Ap}{2}}{(x^2+px+q)^n}=\frac{A}{2}\,\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\frac{1}{(x^2+px+q)^n}. \qquad (6,3)$$

Интеграл первой дроби вычисляется по формуле (1,29). Вторая дробь

$$\frac{1}{(x^2+px+q)^n}=\frac{1}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^n}.$$

Если обозначить

$$q-\frac{p^2}{4}=\beta^2,\quad x+\frac{p}{2}=\beta z \qquad (6,4)$$

$\left(\text{обозначить } q-\frac{p^2}{4}\right.$ через β^2 мы имеем право, так как по предположению корни трехчлена x^2+px+q — комплексны, а потому $\left.q-\frac{p^2}{4}\text{ — величина положительная}\right)$, то

$$\frac{1}{(x^2+px+q)^n}=\frac{1}{(\beta^2z^2+\beta^2)^n}=\frac{1}{[\beta^2(1+z^2)]^n}=\frac{1}{\beta^{2n}(1+z^2)^n},$$

и таким образом интегрирование второй дроби в правой части (6,3) сводится к интегрированию дроби $\frac{1}{(1+z^2)^n}$.

Интеграл

$$I_n=\int\frac{1}{(1+z^2)^n}dz \tag{6,5}$$

вычисляется по формуле

$$I_n=\frac{1}{2(n-1)}\frac{z}{(1+z^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}, \tag{6,6}$$

где

$$I_{n-1}=\int\frac{1}{(1+z^2)^{n-1}}dz$$

(индекс у буквы I равен показателю степени выражения $1+z^2$). Вывод формулы (6,6) можно найти, например, в учебнике Н. С. Пискунова «Дифференциальное и интегральное исчисления».

Формула (6,6) называется рекуррентной, или формулой приведения. Она позволяет вычисление интеграла I_n свести к вычислению интеграла I_{n-1} с меньшим на единицу индексом.

Упражнения, связанные с применением рекуррентной формулы (6,6)

Задача 6,10. Вычислить интегралы:

$$1)\ I_3=\int\frac{dz}{(1-z^2)^3};\quad 2)\ I_4=\int\frac{dx}{(1+x^2)^4};\quad 3)\ I=\int\frac{dx}{(4+x^2)^5}.$$

(Значок при I равен показателю степени выражения, стоящего в знаменателе).

Решение. 1) Применим последовательно формулу (6,6). Подставляя в (6,6) $n=3$, получим:

$$I_3=\frac{1}{2(3-1)}\frac{z}{(1+z^2)^{3-1}}+\frac{2\cdot 3-3}{2\cdot 3-2}I_2;$$

$$I_3=\frac{1}{4}\frac{z}{(1+z^2)^2}+\frac{3}{4}I_2.$$

Теперь применим (6,6) к вычислению I_2 (положим в (6,6) $n=2$). Тогда

$$I_3=\frac{1}{4}\frac{z}{(1+z^2)^2}+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2(2-1)}\frac{z}{(1+z^2)}+\frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2}I_1\right)=\frac{1}{4}\frac{z}{(1+z^2)^2}+$$

$$+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\frac{z}{1+z^2}+\frac{1}{2}I_1\right)=\frac{1}{4}\frac{z}{(1+z^2)^2}+\frac{3}{8}\frac{z}{1+z^2}+\frac{3}{8}I_1.$$

Но $I_1=\int\frac{dz}{1+z^2}=\operatorname{arctg} z+C$, а поэтому окончательно

$$I_3=\int\frac{dz}{(1+z^2)^3}=\frac{1}{4}\frac{z}{(1+z^2)^2}+\frac{3}{8}\frac{z}{1+z^2}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg} z+C. \qquad (6,7)$$

2) Здесь также последовательно применяем формулу (6,6) начиная с $n=4$:

$$I_4=\frac{1}{2(4-1)}\frac{x}{(1+x^2)^{4-1}}+\frac{2\cdot 4-3}{2\cdot 4-2}I_3;$$

$$I_4=\frac{1}{6}\frac{x}{(1+x^2)^3}+\frac{5}{6}I_3. \qquad (6,8)$$

Но I_3 нами было найдено в предыдущем примере, только там вместо x стояла буква z. Заменяя в (6,7) z на x и подставляя в (6,8), получим

$$I_4=\frac{1}{6}\frac{x}{(1+x^2)^3}+\frac{5}{6}\left[\frac{1}{4}\frac{x}{(1+x^2)^2}+\frac{3}{8}\frac{x}{1+x^2}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg} x\right]+C.$$

Окончательно

$$I_4=\frac{1}{6}\frac{x}{(1+x^2)^3}+\frac{5}{24}\frac{x}{(1+x^2)^2}+\frac{5}{16}\frac{x}{1+x^2}+\frac{5}{16}\operatorname{arctg} x+C. \qquad (6,9)$$

3) Формулу (6,6) можно применить, если в знаменателе будет выражение вида $(1+x^2)^n$. У нас же в степень $n=5$ возводится не $1+x^2$, а $4+x^2$. Полагая $x=2z$, получим $dx=2dz$; $x^2=4z^2$, а $(4+x^2)^5=(4+4z^2)^5=[4(1+z^2)]^5=1024(1+z^2)^5$.

Поэтому искомый интеграл

$$I=\int\frac{dx}{(4+x^2)^5}=\int\frac{2dz}{1024(1+z^2)^5}=\frac{1}{512}\int\frac{dz}{(1+z^2)^5}=\frac{1}{512}I_5.$$

Итак, $I=\frac{1}{512}I_5$ и, применяя формулу (6,6) при $n=5$,

$$I=\frac{1}{512}\left[\frac{1}{2(5-1)}\frac{z}{(1+z^2)^4}+\frac{2\cdot 5-3}{2\cdot 5-2}I_4\right],$$

т. е. $I=\frac{1}{512}\left[\frac{1}{8}\frac{z}{(1+z^2)^4}+\frac{7}{8}I_4\right]$.

Подставляя сюда найденное в предыдущем примере I_4 (только в (6,9) надо x заменить буквой z), получаем

$$I=\frac{1}{512}\left[\frac{1}{8}\frac{z}{(1+z^2)^4}+\frac{7}{8}\left(\frac{1}{6}\frac{z}{(1+z^2)^3}+\frac{5}{24}\frac{z}{(1+z^2)^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{5}{16}\frac{z}{1+z^2}+\frac{5}{16}\operatorname{arctg} z\right)\right]+C.$$

Раскрывая скобки, будем иметь

$$I=\frac{1}{512}\left[\frac{1}{8}\frac{z}{(1+z^2)^4}+\frac{7}{48}\frac{z}{(1+z^2)^3}+\frac{35}{192}\frac{z}{(1+z^2)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{35}{128}\frac{z}{1+z^2}+\frac{35}{128}\operatorname{arctg} z\right]+C.$$

Возвратимся к старой переменной x. Мы полагали, что $x=2z$. Отсюда $z=\frac{x}{2}$. Подставляя в последнее равенство $z=\frac{x}{2}$, получим окончательно

$$I=\frac{1}{32}\frac{x}{(4+x^2)^4}+\frac{7}{768}\frac{x}{(4+x^2)^3}+\frac{35}{12288}\frac{x}{(4+x^2)^2}+$$
$$+\frac{35}{32768}\frac{x}{4+x^2}+\frac{35}{65536}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$$

Задача 6,11 (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы (указания даны на стр. 77 и 78).

1) $I=\int\frac{dx}{(3x^2+x+7)^2}$; 2) $I=\int\frac{dx}{(5x^2+2x+4)^3}$;

3) $I=\int\frac{3x+5}{(x^2+2x+5)^2}dx$; 4) $I=\int\frac{2x-1}{(4x^2+3x+5)^3}dx$.

Ответ. 1) $\frac{6x+1}{83(3x^2+x+7)}+\frac{12}{83\sqrt{83}}\operatorname{arctg}\frac{6x+1}{\sqrt{83}}+C$;

2) $\frac{5x+1}{38}\left[\frac{1}{2(5x^2+2x+4)^2}+\frac{15}{76(5x^2+2x+4)}\right]+$
$+\frac{75}{2888\sqrt{19}}\operatorname{arctg}\frac{5x+1}{\sqrt{19}}+C$;

3) $\frac{x-5}{4(x^2+2x+5)}+\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$;

4) $-\frac{14x+23}{142(4x^2+3x+5)^2}-\frac{21}{5041}\frac{8x+3}{4x^2+3x+5}-$
$-\frac{336}{5041\sqrt{71}}\operatorname{arctg}\frac{8x+3}{\sqrt{71}}+C.$

СЕДЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Интегрирование рациональных дробей.

На пятом практическом занятии учащийся на большом числе упражнений ознакомился со способами разложения рациональной дроби на простейшие, а на шестом занятии он приобрел навыки интегрирования простейших рациональных дробей.

Поэтому интегрирование рациональных дробей не должно вызывать трудностей. Ограничимся только несколькими подробно разобранными примерами, а остальные предложим для самостоятельного решения.

Мы рассмотрим такие четыре случая:

1. Корни знаменателя — только действительные числа, среди которых нет равных.

2. Корни знаменателя — только действительные числа, но среди них есть равные (знаменатель имеет действительные кратные корни).

3. Знаменатель дроби, кроме действительных корней, имеет и комплексные корни, но среди них нет равных.

4. Знаменатель дроби наряду с действительными имеет и кратные комплексные корни.

Первый случай.

Задача 7,1. Вычислить $I=\int \frac{x^3+x+2}{(x-3)(x-4)}dx.$

Решение. *Прежде чем приступить к интегрированию рациональной дроби, следует убедиться в том, что дробь — правильная и несократимая.* В нашем случае дробь, стоящая под интегралом,— неправильная, так как степень ее числителя (третья) выше степени знаменателя (второй).

Поэтому прежде всего исключаем целую часть.

Для этого делим числитель x^3+x+2 на знаменатель $(x-3)(x-4)=x^2-7x+12$:

$$\begin{array}{r|l} -\;x^3+x+2 & x^2-7x+12 \\ \mp x^3 \pm 7x^2 \mp 12x & \overline{x+7+\frac{38x-82}{x^2-7x+12}} \\ \hline -\;7x^2-11x+2 & \\ \mp 7x^2 \pm 49x \mp 84 & \\ \hline 38x-82 & \end{array}$$

Поэтому

$$I=\int\left(x+7+\frac{38x-82}{(x-3)(x-4)}\right)dx=\frac{1}{2}x^2+7x+\int\frac{38x-82}{(x-3)(x-4)}dx.$$

Дробь $\frac{38x-82}{(x-3)(x-4)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-4}.$

Умножая обе части этого равенства на $(x-3)(x-4)$, получаем

$$38x-82=A(x-4)+B(x-3).$$

Здесь коэффициенты проще всего определить способом задания частных значений: $A=-32$; $B=70$.

Дробь $\frac{38x-82}{(x-3)(x-4)}=-\frac{32}{x-3}+\frac{70}{x-4}$, а $I=\frac{1}{2}x^2+7x+$ $+\int\left(-\frac{32}{x-3}+\frac{70}{x-4}\right)dx=\frac{1}{2}x^2+7x-32\ln|x-3|+70\ln|x-4|+C.$

Задача 7,2. Вычислить $I=\int\frac{x^2+x+5}{x(x+3)(x-2)}dx.$

Решение. Дробь, стоящая под интегралом,— правильная. Разлагаем ее на простейшие:

$$\frac{x^2+x+5}{x(x+3)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-2}.$$

Умножая левую и правую часть этого равенства на знаменатель левой части, имеем

$$x^2 + x + 5 = A(x+3)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+3).$$

И здесь при определении коэффициентов A, B и C наиболее быстро к цели ведет способ задания частных значений.

(Вообще, если корни знаменателя — числа только действительные и разные, этот способ является наиболее целесообразным). $A = -\frac{5}{6}$; $B = \frac{11}{15}$; $C = \frac{11}{10}$.

$$I = \int\left(-\frac{5}{6}\frac{1}{x} + \frac{11}{15}\frac{1}{x+3} + \frac{11}{10}\frac{1}{x-2}\right)dx = -\frac{5}{6}\ln|x| + \frac{11}{15}\ln|x+3| +$$

$$+\frac{11}{10}\ln|x-2| + C = \ln\frac{(x-2)\sqrt[15]{(x+3)^{11}}\sqrt[10]{x-2}}{\sqrt[6]{x^5}} + C.$$

Задача 7,3 (для самостоятельного решения).

Вычислить: 1) $\int\frac{dx}{(a+bx)(c+dx)}$; 2) $\int\frac{x\,dx}{(a+bx)(c+dx)}$.

Ответ. 1) $\frac{1}{bc-ad}\ln\left|\frac{a+bx}{c+dx}\right| + C$; 2) $\frac{1}{ad-bc}\left[\frac{a}{b}\ln|a+bx| -\right.$ $\left.-\frac{c}{d}\ln|c+dx|\right] + C.$

Задача 7,4 (для самостоятельного решения).

Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{x^2-a^2}$.

Ответ. $\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

Задача 7,5. Вычислить:

1) $I = \int\frac{2x+3}{x^2-7x+12}dx$; 2) $I = \int\frac{x^2+2x+3}{x^3-9x^2+20x}dx$;

3) $I = \int\frac{2x^2-7x+8}{x^4-10x^2+9}dx$; 4) $I = \int\frac{2x^4-x^3+5}{x^3-9x}dx$.

Решение. 1) Разлагаем прежде всего знаменатель на множители: $x^2-7x+12 = (x-3)(x-4)$. Дробь

$$\frac{2x+3}{x^2-7x+12} = \frac{2x+3}{(x-3)(x-4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-4};\ A = -9;\ B = 11;$$

$$I = \ln\frac{(x-4)^{11}}{(x-3)^9} + C.$$

2) Знаменатель дроби разлагаем на множители:

$$x^3 - 9x^2 + 20x = x(x^2 - 9x + 20) = x(x-4)(x-5).$$

Дробь

$$\frac{x^2+2x+3}{x^3-9x^2+20x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{x-5}.$$

Для определения коэффициентов A, B и C с целью упражнений примените способ задания частных значений и способ неопределенных коэффициентов. Окажется, что

$$A=\frac{3}{20};\ B=-\frac{27}{4};\ C=\frac{38}{5};$$

$$I=\frac{3}{20}\ln|x|-\frac{27}{4}\ln|x-4|+\frac{38}{5}\ln|x-5|+C,$$

или $I=\ln\dfrac{\sqrt[20]{x^3}\,(x-5)^7\sqrt[4]{(x-5)^3}}{(x-4)^6\sqrt[4]{(x-4)^3}}+C.$

3) Знаменатель дроби разлагаем на множители: приравниваем знаменатель нулю и находим его корни:

$x^4-10x^2+9=0;\ \ x_1=1;\ \ x_2=-1;\ \ x_3=3;\ \ x_4=-3$, поэтому $x^4-10x^2+9=(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$, а дробь

$$\frac{2x^2-7x+8}{x^4-10x^2+9}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-3}+\frac{D}{x+3};$$

$$A=-\frac{3}{16};\ B=\frac{17}{16};\ C=\frac{5}{48};\ D=-\frac{47}{48};$$

$$I=\ln(x+1)\sqrt[48]{\frac{(x+1)^3(x-3)^5}{(x-1)^9(x+3)^{47}}}+C.$$

4) Здесь мы прежде всего обращаем внимание на то, что дробь, стоящая под интегралом,— неправильная. Исключаем целую часть:

$$I=\int\left(2x-1+\frac{18x^2-9x+5}{x(x-3)(x+3)}\right)dx;$$

$$\frac{18x^2-9x+5}{x(x-3)(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x+3}.$$

Определяя коэффициенты любым из указанных способов, получим:

$$A=-\frac{5}{9};\ B=\frac{70}{9};\ C=\frac{97}{9};$$

$$I=x^2-x-\frac{5}{9}\ln|x|+\frac{70}{9}\ln|x-3|+\frac{97}{9}\ln|x+3|+C;$$

$$I=x^2-x+\ln(x-3)^7(x+3)^{10}\sqrt[9]{\frac{(x-3)^7(x+3)^7}{x^5}}+C.$$

Задача 7,6 (для самостоятельного решения).
Вычислить интегралы:

1) $\displaystyle\int\frac{x^4-3x^3-11x^2+4x+15}{x^3-5x^2-x+5}\,dx;$

2) $\displaystyle\int\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx;$ 3) $\displaystyle\int\frac{dx}{4x^4-5x^2+1};$

4) $\displaystyle\int\frac{dz}{z^3+7z^2+2z-40}.$

Указания. В первом примере после исключения целой части получится дробь $\frac{x+5}{x^3-5x^2-x+5}$; знаменатель после разложения его на множители равен $(x+1)(x-1)(x-5)$. Дробь $\frac{x+5}{x^3-5x^2-x+5}=$
$=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-5}$;

$$A=\frac{1}{3};\quad B=-\frac{3}{4};\quad C=\frac{5}{12}.$$

В четвертом примере один корень знаменателя $z_1=2$.

Ответ. 1) $\frac{(x+2)^2}{2}+\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{3}{4}\ln|x-1|+\frac{5}{12}\ln|x-5|+C$;

2) $\ln\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}+C$; 3) $\ln\sqrt[6]{\frac{(x-1)(2x+1)^2}{(x+1)(2x-1)^2}}+C$;

4) $\frac{1}{42}\ln\frac{(z+5)^6(z-2)}{(z+4)^7}+C$.

Второй случай. Корни знаменателя — только действительные числа, но среди них есть кратные.

Задача 7,7. Вычислить

$$I=\int\frac{2x^2+5x-8}{(x-1)^3(x+2)^2}\,dx.$$

Решение. Заданная дробь — правильная и несократимая. (На это прежде всего следует обратить внимание).

Представим дробь в виде

$$\frac{2x^2+5x-8}{(x-1)^3(x+2)^2}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{(x+2)^2}+\frac{E}{x+2}. \quad (7,1)$$

Определение A, B, C, D, E проведем способом неопределенных коэффициентов и способом задания частных значений, которые целесообразно комбинировать.

Умножая обе части написанного равенства на знаменатель левой части, получим

$$2x^2+5x-8=A(x+2)^2+B(x-1)(x+2)^2+C(x-1)^2(x+2)^2+$$
$$+D(x-1)^3+E(x-1)^3(x+2).$$

Напоминаем, что написанное выражение является тождеством, а потому равенство должно сохраняться при любом значении x. При $x=-2$ получаем

$$2(-2)^2+5(-2)-8=D(-2-1)^3,$$

отсюда определяем коэффициент D:

$$-10=-27D;\quad D=\frac{10}{27}.$$

При $x=1$

$$2\cdot1^2+5\cdot1-8=A(1+2)^2;\qquad -1=9A;\qquad A=-\frac{1}{9}.$$

Нам осталось определить еще три коэффициента: B, C и E. Теперь будем сравнивать коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой части равенства.

Коэффициент при x^4 в левой части равен нулю (x^4 в левой части отсутствует), а в правой $C + E$. Поэтому $C + E = 0$.

Свободный член в левой части равен -8, а в правой $4A - 4B + 4C - D - 2E$. На основании этого получаем второе уравнение: $4A - 4B + 4C - D - 2E = -8$, в котором A и D уже известны, а поэтому $2B - 2C + E = \frac{97}{27}$.

Мы сравнивали именно свободные члены потому что это можно сделать, не выполняя умножения и возведения в степень в правой части равенства.

Для того, чтобы получить третье уравнение для определения B, C и E, снова возвратимся к способу задания частных значений. При $x = 2$ получим

$$8 + 10 - 8 = 16A + 16B + 16C + D + 4E.$$

С учетом, что $A = -\frac{1}{9}$, а $D = \frac{10}{27}$ это уравнение примет вид $4B + 4C + E = \frac{77}{27}$.

Таким образом, для определения B, C и E имеем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} C + E &= 0 \\ 2B - 2C + E &= \frac{97}{27} \\ 4B + 4C + E &= \frac{77}{27} \end{aligned}\right\};$$

$$B = \frac{29}{27}; \quad C = -\frac{13}{27}; \quad E = \frac{13}{27}.$$

Таким образом,

$$A = -\frac{1}{9}; \quad B = \frac{29}{27}; \quad C = -\frac{13}{27}; \quad D = \frac{10}{27}; \quad E = \frac{13}{27}.$$

Очень полезно сделать проверку найденных значений коэффициентов. Для этого дадим x произвольное значение, например, $x = -3$, получим равенство

$$-5 = A - 4B + 16C - 64D + 64E.$$

При найденных значениях коэффициентов оно выполняется. Отсюда мы заключаем, что коэффициенты определены верно.

$$\int \frac{2x^2+5x-8}{(x-1)^3(x+2)^2}\,dx = \int\left[\frac{-\frac{1}{9}}{(x-1)^3}+\frac{\frac{29}{27}}{(x-1)^2}+\frac{-\frac{13}{27}}{x-1}+\frac{\frac{10}{27}}{(x+2)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{13}{27}}{x+2}\right]dx = \frac{1}{9}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{29}{27}\,\frac{1}{x-1}-\frac{13}{27}\ln|x-1|-\frac{10}{27}\,\frac{1}{x+2}+$$

$$+\frac{13}{27}\ln|x+2|+C = -\frac{26x^2+5x-34}{18(x-1)^2(x+2)}+\frac{13}{27}\ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right|+C.$$

Задача 7,8 (для самостоятельного решения).

Вычислить интеграл $\int \frac{x^4+5x^3-10x^2-8x+5}{(x-2)^3(x+3)^2}\,dx$ способами, которые были применены в предыдущей задаче.

Ответ. $-\frac{23}{25(x+3)}-\frac{1}{10(x-2)^2}-\frac{42}{25(x-2)}+\frac{27}{25}\ln|x-2|-$ $-\frac{2}{25}\ln|x+3|+C.$

Задача 7,9 (для самостоятельного решения).

Вычислить интеграл $\int \frac{x^2+x-1}{x^3(x-2)^2}\cdot dx$

Ответ. $\frac{-5x^2+x-2}{8x^2(x-2)}+\ln\sqrt[16]{\left(\frac{x}{x-2}\right)^5}+C.$

Задача 7,10 (для самостоятельного решения).

Вычислить интеграл $I=\int \frac{x^2-8x+7}{(x^2-3x-10)^2}\,dx.$

Указание. $x^2-3x-10=(x-5)(x+2).$

Ответ. $\frac{8}{49}\,\frac{1}{x-5}-\frac{27}{49}\,\frac{1}{x+2}+\frac{30}{343}\ln\left|\frac{x-5}{x+2}\right|+C.$

Третий случай. Знаменатель дроби, кроме действительных корней, имеет и комплексные, но среди комплексных корней нет равных.

Задача 7,11. Вычислить интеграл $I=\int \frac{x^4+5x^3-7x^2+5}{x^3-x^2+5x-5}\,dx.$

Решение. Разложим знаменатель на множители:

$$x^3-x^2+5x-5=x^2(x-1)+5(x-1)=(x-1)(x^2+5).$$

Дробь, стоящая под интегралом, — неправильная. Поэтому, прежде чем разлагать ее на простейшие, исключим целую часть. Окажется, что она равна

$$x+6-\frac{6x^2+25x-35}{x^3-x^2+5x-5}. \qquad (A)$$

Теперь дробь $\frac{6x^2+25x-35}{x^3-x^2+5x-5}$ разложим на простейшие. Учитывая, что знаменатель дроби равен $(x-1)(x^2+5)$, получим

$$\frac{6x^2+25x-35}{(x-1)(x^2+5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+5}.$$

Умножая обе части этого равенства на знаменатель левой части, получим

$$6x^2+25x-35=A(x^2+5)+(Bx+C)(x-1).$$

Применим сначала способ задания частных значений. Возьмем $x=1$:

$$6\cdot 1^2+25\cdot 1-35=A(1^2+5);\quad -4=6A;\quad A=-\frac{2}{3}.$$

Теперь сравним коэффициенты при одинаковых степенях x. В левой части равенства коэффициент при x^2 равен 6, а в правой $A+B$.

Поэтому $A+B=6$, а так как $A=-\frac{2}{3}$, то $B=\frac{20}{3}$.

Свободный член в левой части равенства -35, а в правой $5A-C$. Поэтому $5A-C=-35$; $C=\frac{95}{3}$.

Итак, дробь

$$\frac{6x^2+25x-35}{(x-1)(x^2+5)}=-\frac{2}{3}\frac{1}{x-1}+\frac{\frac{20}{3}x+\frac{95}{3}}{x^2+5}.$$

Учитывая это, а также выражение (A), получаем

$$I=\int\left[x+6+\left(-\frac{2}{3}\frac{1}{x-1}+\frac{\frac{20}{3}x+\frac{95}{3}}{x^2+5}\right)\right]dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+6x-\frac{2}{3}\ln|x-1|+\frac{20}{3}\int\frac{x}{x^2+5}dx+\frac{95}{3}\int\frac{dx}{x^2+5}=$$

$$=\frac{x^2}{2}+6x+\frac{1}{3}\ln\frac{(x^2+5)^{10}}{(x-1)^2}+\frac{95}{3\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}+C.$$

Задача 7,12 (для самостоятельного решения).

Вычислить $\int\frac{dx}{1-x^4}$.

Указание. $1-x^4=(1-x)(1+x)(1+x^2)$. Дробь запишется в виде

$$\frac{1}{1-x^4}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1+x}+\frac{Cx+D}{1+x^2}.$$

Ответ. $\ln\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$

Задача 7,13. Вычислить

$$\int\frac{x\,dx}{1+x^3}.$$

Решение. Так как $1+x^3=(1+x)(1-x+x^2)$, а корни трехчлена $1-x+x^2$ комплексны, то дробь запишем в виде

$$\frac{x}{1+x^3}=\frac{A}{1+x}+\frac{Bx+C}{1-x+x^2}.$$

Ответ. $-\frac{1}{6}\ln\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$

Задача 7,14 (для самостоятельного решения).

Вычислить $\int\frac{dx}{1-x^3}$.

Указание. $1-x^3=(1-x)(1+x+x^2)$.

Ответ. $\frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{1+x+x^2}}{1-x}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$

Задача 7,15. Вычислить $I=\int\frac{x^3}{(x^2+x+2)(x^2-2x+3)}dx.$

Указание. Учитывая, что корни каждого из трехчленов, находящихся в знаменателе,— комплексны, подынтегральную дробь запишем в виде

$$\frac{x^3}{(x^2+x+2)(x^2-2x+3)}=\frac{Ax+B}{x^2+x+2}+\frac{Cx+D}{x^2-2x+3};$$

$$A=\frac{5}{22};\quad B=\frac{7}{11};\quad C=\frac{17}{22};\quad D=-\frac{21}{22}.$$

Ответ. $\ln\sqrt[44]{(x^2+x+2)^5(x^2-2x+3)^{17}}+\frac{23}{22\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}}-$

$$-\frac{\sqrt{2}}{11}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C.$$

Задача 7,16 (для самостоятельного решения).

Вычислить $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

Ответ. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$

Четвертый случай. Знаменатель дроби имеет **действительные** и кратные комплексные корни.

Задача 7,17. Вычислить $\int\frac{1}{(x-1)^2(x^2+4)^2}dx.$

Указание. Знаменатель дроби имеет кратные комплексные корни. Если $(x^2+4)^2=0$, то $x_1=2i$; $x_2=-2i$; $x_3=2i$; $x_4=-2i$. Дробь

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+4)^2}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{(x^2+4)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+4};$$

$$A=\frac{1}{25};\quad B=-\frac{4}{125};\quad C=\frac{18}{125};\quad D=-\frac{31}{125};\quad E=\frac{4}{125};$$

$$F=\frac{3}{125}.$$

Ответ. $\frac{2}{125}\ln\frac{x^2+4}{(x-1)^2}-\frac{71x^2+41x+88}{1000(x-1)(x^2+4)}-\frac{7}{2000}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$

Задача 7,18 (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы:

$$1)\ \int\frac{5x^2-12}{(x^2-6x+13)^2}dx;\quad 2)\ \int\frac{x^5}{(3+2x^2)^3}\,dx.$$

Ответ. 1) $\frac{13x-159}{8(x^2-6x+13)}+\frac{53}{16}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}+C;$

$$2)\ \frac{1}{16}\left[\ln(3+2x^2)+\frac{3(9+8x^2)}{2(3+2x^2)^2}\right]+C.$$

Указание. При вычислении второго интеграла можно избежать обычного пути, если ввести подстановку $3+2x^2=z$. Тогда $4x\,dx=dz$; $x\,dx=\frac{dz}{4}$; $x^2=\frac{z-3}{2}$; $x^4=\frac{(z-3)^2}{4}$ и

$$\int\frac{x^5\,dx}{(3+2x^2)^3}=\int\frac{x^4x\,dx}{(3+2x^2)^3}=\int\frac{(z-3)^2\,dz}{4\cdot4\cdot z^3}=\frac{1}{16}\int\frac{z^2-6z+9}{z^3}dz=$$

$$=\frac{1}{16}\int\left(\frac{1}{z}-\frac{6}{z^2}+\frac{9}{z^3}\right)dz=\frac{1}{16}\left[\ln z+\frac{6}{z}-\frac{9}{2z^2}\right]+C=$$

$$=\frac{1}{16}\left[\ln(3+2x^2)+\frac{6}{3+2x^2}-\frac{9}{2(3+2x^2)^2}\right]+C.$$

Отсюда легко получается и предыдущий ответ.

Замечание. Следует вообще иметь в виду, что интегралы вида $\int\frac{x^{2m+1}}{(a+bx^2)^n}dx$, где m — целое и положительное число, легко вычисляются с помощью подстановки $a+bx^2=z$. Эта подстановка приводит к интегралу $\frac{1}{2b^{m+1}}\int\frac{(z-a)^m}{z^n}dz$, а вычисление его сводится к вычислению интегралов от одночленов.

Задача 7,19 (для самостоятельного решения). Вычислить

$$I=\int\frac{x^7}{(5+4x^2)^4}dx.$$

Указание. Подстановка $5+4x^2=z$;

$$I=\frac{1}{512}\int\frac{(z-5)^3}{z^4}dz.$$

Ответ. $\frac{1}{512}\left[\ln(5+4x^2)+\frac{1375+2700x^2+1440x^4}{6(5+4x^2)^3}\right]+C.$