ДЕСЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Интегральная сумма. Определенный интеграл и его основные свойства. Вычисление определенного интеграла как предела интегральной суммы.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Интегральная сумма. Пусть на отрезке $[a, b]$ $(a < b)$ оси Ox задана непрерывная функция $f(x)$.

Отрезок $[a, b]$ разделим на n частей, длины которых могут быть произвольными.

Каждый такой отрезок будем называть частичным.

Абсциссы точек деления обозначим через $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{n-1}$ и будем полагать, что

$$a < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < b.$$

Длину частичного отрезка, равную разности $x_k - x_{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, обозначим через Δx_k:

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}.$$

На каждом частичном отрезке выберем *произвольную точку*, абсциссу которой обозначим через ξ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, вычислим $f(\xi_k)$ — значение заданной функции $f(x)$ в этой точке. Найдем произведение числа $f(\xi_k)$ на длину Δx_k отрезка, на котором взята точка ξ_k, т. е. $f(\xi_k)\,\Delta x_k$.

Составим сумму таких произведений

$$f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + f(\xi_3)\,\Delta x_3 + \cdots + f(\xi_{n-1})\,\Delta x_{n-1} + f(\xi_n)\,\Delta x_n,$$

которую обозначим

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k. \tag{10,1}$$

Эта сумма называется интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Для заданной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ можно составить бесчисленное множество интегральных сумм, так как отрезок $[a, b]$ может быть разделен на части бесчисленным числом способов, а при выбранном способе разделения существует еще бесчисленное число возможностей для выбора в каждом отрезке точек ξ_k.

2. Определенный интеграл. Обозначим через l *длину наибольшего* из частичных отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$ в данном разделении отрезка $[a, b]$ на части $(l = \max \Delta x_k)$.

Определение. Предел интегральной суммы (10,1)

$$\lim_{\substack{l \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

при условии, что $l \to 0$ (а значит, число отрезков n неограниченно возрастает ($n \to \infty$)), если он существует и не зависит ни от того, каким образом разделен на части отрезок $[a, b]$, ни от того, какая точка ξ_k выбрана на каждом частичном отрезке, называется определенным интегралом функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается символом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Таким образом,

$$\lim_{\substack{l \to 0) \\ (n \to \infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{10,2}$$

Функция $f(x)$ в этом случае называется интегрируемой на отрезке $[a, b]$.

Гарантией существования этого предела, или, что то же самое, существования определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, и независимости его ни от способа деления отрезка $[a, b]$ на части, ни от выбора точек ξ_k на каждом частичном отрезке является непрерывность функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Теорема (о существовании определенного интеграла).

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то предел интегральных сумм (10,1) при условии, что длина каждого частичного отрезка стремится к нулю, а число частичных отрезков неограниченно увеличивается, существует и не зависит ни от способа разделения отрезка $[a, b]$ на части, ни от выбора точек на каждом частичном отрезке.

В символе $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, отрезок $[a, b]$ — отрезком интегрирования, а переменная величина x — переменной интегрирования.

Отыскивая предел (10,2) суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$ при условии, что длина наибольшего из частичных отрезков Δx_k стремится к нулю, следует иметь в виду, что каждое слагаемое $f(\xi_k)\,\Delta x_k$ есть величина бесконечно малая, так как в этом предельном процессе Δx_k — величина бесконечно малая, а $f(\xi_k)$ имеет конечное значение, потому что функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ по предположению непрерывна. **Таким образом, определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ есть предел суммы бесконечно малых величин, количество которых неограниченно возрастает.**

3. Формула Ньютона — Лейбница. Имеет место формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \tag{10,3}$$

где функция $F(x)$ есть какая-нибудь первообразная для подынтегральной функции $f(x)$.

Формула (10,3) называется формулой Ньютона — Лейбница. Она является основной формулой интегрального исчисления.

Согласно этой формуле, для вычисления предела интегральной суммы (10,1) при указанных выше условиях, или, что то же, для вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$, надо: 1) найти какую-нибудь первообразную функцию $F(x)$ для подынтегральной функции; 2) вычислить ее значение $F(b)$ при верхнем пределе и вычесть из него ее значение $F(a)$ при нижнем пределе.

Обычно при вычислении определенного интеграла употребляют такую запись:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Формула Ньютона — Лейбница позволяет свести сложную задачу вычисления предела интегральной суммы, для решения которой отсутствует общий прием, к нахождению первообразной функции для подынтегральной; тем самым она указывает единообразный и простой способ вычисления предела суммы неограниченно возрастающего количества бесконечно малых величин и позволяет заменить бесконечный процесс суммирования хорошо известной операцией отыскания первообразной функции.

4. Основные свойства определенного интеграла.

1)
$$\int_a^b dx = b - a. \tag{10,4}$$

2) *Постоянный множитель можно вынести за знак определенного интеграла*

$$\int_a^b c f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx, \tag{10,5}$$

где c — постоянная величина.

3) *Определенный интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен такой же алгебраической сумме определенных интегралов от слагаемых функций*

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)]\, dx =$$

$$= \int_a^b f_1(x)\, dx \pm \int_a^b f_2(x)\, dx \pm \cdots \pm \int_a^b f_n(x)\, dx. \qquad (10,6)$$

4) *При перестановке пределов интегрирования знак определенного интеграла меняется на противоположный*

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx. \qquad (10,7)$$

5) Если нижний и верхний пределы интегрирования равны между собой, то определенный интеграл равен нулю

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0. \qquad (10,8)$$

6) *Переменную интегрирования можно обозначить любой буквой*, не нарушая справедливости формул, т. е.

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(y)\, dy = \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b f(\alpha)\, d\alpha. \qquad (10,9)$$

7) Имеет место формула

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx, \qquad (10,10)$$

которая верна при любом взаимном расположении чисел a, b и c.

Если выполняются неравенства $a < c < b$, то из формулы (10,10) следует, что интеграл по всему отрезку равен сумме интегралов по частям этого отрезка[1].

1. Упражнения на вычисление определенных интегралов непосредственно из определения, как предела интегральных сумм, и с применением формулы Ньютона — Лейбница.

Задача 10,1. Составить формулы для вычисления интегральных сумм для функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, разделяя этот отрезок на n равных частичных отрезков.

Значение функции вычислять:

1) в правом конце каждого частичного отрезка;

2) в левом конце каждого частичного отрезка.

---

[1] Дальнейшие свойства определенных интегралов будут рассмотрены на последующих практических занятиях.

Решение. 1) Длина отрезка интегрирования равна $b-a$. Длину каждого частичного отрезка для удобства записи обозначим не через Δx, как обычно, а через h. Тогда

$$h=\frac{b-a}{n}.$$

Координаты точек деления равны:

$$x_0=a;\ x_1=a+h;\ x_2=a+2h,\ \ldots,\ x_{n-1}=a+(n-1)h;$$
$$x_n=b=a+nh. \qquad (10,11)$$

Значения функции в правых концах частичных отрезков буду

$$f(a+h);\ f(a+2h);\ f(a+3h),\ \ldots,\ f(a+nh).$$

Умножая каждое из этих чисел на длину h частичного отрезка и складывая эти произведения, получим интегральную сумму

$$S_n=f(a+h)h+f(a+2h)h+f(a+3h)h+\cdots+f(a+nh)h=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}f(a+ih)h=h\sum_{i=1}^{n}f(a+ih). \qquad (10,12)$$

(постоянная величина h, входящая в каждое слагаемое, вынесена за знак суммы).

В таком случае $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ будет пределом этой интегральной суммы, т. е.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=h\lim_{\substack{h\to 0\\(n\to\infty)}}\sum_{i=1}^{n}f(a+ih) \qquad (10,13)$$

2) Значениями функции в левых концах каждого частичного отрезка будут числа

$$f(a);\ f(a+h);\ f(a+2h),\ \ldots,\ f[a+(n-1)h].$$

Умножая каждое из этих значений на длину h частичного отрезка, получим интегральную сумму

$$S_a^1=f(a)h+f(a+h)h+f(a+2h)h+\cdots+f[a+(n-1)]h=$$
$$=\sum_{i=0}^{n-1}f(a+ih)h=h\sum_{i=0}^{n-1}f(a+ih). \qquad (10,14)$$

В этом случае

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\substack{h\to 0\\(n\to\infty)}}h\sum_{i=0}^{n-1}f(a+ih). \qquad (10,15)$$

Задача 10,2. Составить формулу для вычисления интегральной ммы для функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$ $(a < b)$, зделяя отрезок $[a, b]$ на n частичных отрезков так, чтобы циссы точек деления образовывали геометрическую прогрессию и, что то же, чтобы длины частичных отрезков разбиения образовывали геометрическую прогрессию).

Решение. Если знаменатель геометрической прогрессии обозначить через $q\,(q > 1)$, то абсцисса конца отрезка $[a, b]$

$$b = aq^n. \tag{10,16}$$

Абсциссы точек деления будут такими:

$$x_0 = a;\ x_1 = aq;\ x_2 = aq^2;\ x_3 = aq^3,\ \ldots,\ x_n = aq^n = b.$$

Длины частичных отрезков равны:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0 = aq - a = a(q-1); \qquad \Delta x_2 = x_2 - x_1 = aq^2 - aq = aq(q-1)$$

и вообще

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = aq^{k-1}(q-1).$$

Вычислим значения функции в левом конце каждого частичного отрезка и получим числа

$$f(a);\ f(aq);\ f(aq^2),\ \ldots,\ f(aq^{n-1}).$$

Умножая эти числа на длину соответствующего отрезка и складывая полученные произведения, составим интегральную сумму

$$f(a)\cdot a(q-1) + f(aq)\cdot aq(q-1) + f(aq^2)\cdot aq^2(q-1) + \cdots + f(aq^{n-1})\cdot aq^{n-1}(q-1) = a(q-1)\sum_{i=0}^{n-1} f(aq^i)\,q^i. \tag{10,17}$$

В этом случае

$$\int_a^b f(x)\,dx = a\lim_{\substack{n\to\infty\\(q\to 1)}}\sum_{i=0}^{n-1}(q-1)f(aq^i)\,q^i = a\lim_{\substack{q\to 1\\(n\to\infty)}}(q-1)\sum_{i=0}^{n-1} f(aq^i)\,q^i. \tag{10,18}$$

Из (10,16) получаем

$$q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}, \tag{10,19}$$

а потому, когда $n \to \infty$, то $q \to 1$ (см. И. А. Каплан. «Практические занятия по высшей математике», ч. II, задача 13,2).

Задача 10,3. Вычислить определенный интеграл $\int_a^b e^x\,dx$ как предел интегральной суммы.

Решение. Разделим отрезок интегрирования $[a, b]$ на n равных частей и составим для функции $f(x) = e^x$ по формуле (10,12) интегральную сумму, выбирая точки в правом конце каждого частичного отрезка. Так как $f(x) = e^x$, то

$$f(a+h) = e^{a+h};\ f(a+2h) = e^{a+2h},\ \ldots,\ f(a+ih) = e^{a+ih};$$

$$f(a+nh) = f(b) = e^{a+nh} \quad (a+nh = b);$$

$$S_n = he^{a+h} + he^{a+2h} + \cdots + he^{a+ih} + \cdots + he^{a+nh};$$

$$S_n = he^a(e^h + e^{2h} + \cdots + e^{ih} + \cdots + e^{nh}). \tag{10,20}$$

Выражение в скобках — геометрическая прогрессия, знаменатель которой $q = e^h$.

Известно, что сумма n членов геометрической прогрессии равна

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}. \tag{10,21}$$

У нас $a_1 = e^h$; $q = e^h$, а потому (10,20) перепишется так:

$$S_n = he^a \frac{e^h(e^{nh} - 1)}{e^h - 1} = \frac{he^h}{e^h - 1}(e^{a+nh} - e^a).$$

Но из (10,11) следует, что $a + nh = b$, а потому

$$S_n = \frac{he^h}{e^h - 1}(e^b - e^a).$$

На основании (10,2) определенный интеграл

$$\int_a^b e^x\,dx = \lim_{h\to 0} S_n = \lim_{h\to 0} \frac{he^h}{e^h - 1}(e^b - e^a) = 1 \cdot (e^b - e^a) \lim_{h\to 0} \frac{h}{e^h - 1} = e^b - e^a$$

(множитель $e^b - e^a$ как постоянная величина, вынесен за знак предела, а по правилу Лопиталя $\lim\limits_{h\to 0} \frac{h}{e^h - 1} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{e^h} = 1$, а $\lim\limits_{h\to 0} e^h = 1$).

Итак,

$$\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a.$$

Вычислите самостоятельно этот интеграл по формуле (10,14), т. е. разделяя отрезок $[a, b]$ по-прежнему на n равных частей, но выбирая на каждом частичном отрезке (x_{k-1}, x_k) точку в его левом конце.

Теперь применим к вычислению этого интеграла формулу (10,3) Ньютона — Лейбница. Согласно этой формуле

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — первообразная функция для подынтегральной функции $f(x)$. Поэтому

$$\int_a^b e^x\,dx = e^x\Big|_a^b = e^b - e^a,$$

что совпадает с ранее найденным результатом.

Учащийся легко оценит экономию в вычислениях, которую дает формула Ньютона—Лейбница: весь процесс сводится к отысканию первообразной функции для подынтегральной, вычислению её значений при верхнем и нижнем пределах интегрирования и определению разности этих значений.

Задача 10,4. Вычислить интеграл $\int_a^b x^k dx$, где a и b — положительные числа, $a < b$, $k \neq -1$, рассматривая его как предел интегральной суммы.

Решение. Предпримем такое разбиение отрезка интегрирования $[a, b]$ на части, чтобы абсциссы точек деления образовали геометрическую прогрессию. (Это равносильно тому, что длины частичных отрезков образуют геометрическую прогрессию). Вычислять значение функции будем в левом конце каждого частичного отрезка.

В задаче 10,2 была получена формула (10,18) для вычисления определенного интеграла при таком способе разбиения отрезка интегрирования на части. Полагая в этой формуле $f(x) = x^k$, $f(aq^i) = (aq^i)^k$ и учитывая (10,19), получим

$$\int_a^b x^k\,dx = a \lim_{\substack{q\to 1\\ (n\to\infty)}} (q-1) \sum_{i=0}^{n-1} (aq^i)^k q^i = a \lim_{\substack{q\to 1\\ (n\to\infty)}} (q-1) \sum_{i=0}^{n-1} a^k q^{i(k+1)} =$$

$$= a^{k+1} \lim_{\substack{q\to 1\\ (n\to\infty)}} (q-1) \sum_{i=0}^{n-1} q^{i(k+1)}. \qquad (10,22)$$

Под знаком суммы стоит геометрическая прогрессия. Её первый член $a_1 = 1$, знаменатель q^{k+1}. Поэтому по формуле (10,21) сумма этой прогрессии

$$S_n = \frac{1\cdot[(q^{k+1})^n - 1]}{q^{k+1}-1} = \frac{(q^n)^{k+1}-1}{q^{k+1}-1}.$$

Но на основании (10,19) $q^n = \dfrac{b}{a}$, поэтому

$$S_n = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{k+1} - 1}{q^{k+1}-1},$$

а (10,22) перепишется в виде

$$\int_a^b x^k\,dx = a^{k+1} \lim_{\substack{q\to 1\\ (n\to\infty)}} (q-1)\frac{\frac{b^{k+1}}{a^{k+1}}-1}{q^{k+1}-1} =$$

$$= a^{k+1}\left(\frac{b^{k+1}}{a^{k+1}}-1\right)\lim_{q\to 1}\frac{q-1}{q^{k+1}-1} = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1},$$

так как по правилу Лопиталя

$$\lim_{q\to 1}\frac{q-1}{q^{k+1}-1} = \lim_{q\to 1}\frac{1}{(k+1)\,q^k} = \frac{1}{k+1}.$$

Итак,

$$\int_a^b x^k\,dx = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1} \qquad (10,23)$$

причем на пределы интегрирования a и b было наложено ограничение $0 < a < b$, так как при этом предположении проведенное деление отрезка $[a, b]$ на части, длины которых составляют геометрическую прогрессию, всегда возможно.

Следует отметить, что формула (10,23) верна при любых значениях a и b.

Теперь применим к вычислению этого интеграла формулу (10,3) Ньютона—Лейбница:

$$\int_a^b x^k\,dx = \left.\frac{x^{k+1}}{k+1}\right|_a^b = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$$

(никаких ограничений на числа a и b не наложено).

Очевидно, что применение этой формулы просто и быстро дает необходимый результат.

При $k=0$ из (10,23) получаем

$$\int_a^b dx = b-a,$$

т. е. *определенный интеграл от дифференциала равен разности между верхним и нижним пределами интегрирования.*

Эти две задачи приведены с целью упражнения в составлении интегральной суммы для подынтегральной функции, определении предела этой суммы при разных способах разбиения отрезка интегрирования на части, а также для сравнения труда, затрачиваемого на вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона—Лейбница и как предела интегральных сумм.

Теперь мы предложим для тех же упражнений несколько задач для самостоятельного решения с необходимыми указаниями.

Задача 10,5 (для самостоятельного решения).

Вычислить $\int\limits_a^b \frac{1}{x}\,dx$ ($a > 0$; $b > 0$; $a < b$), составив интегральную сумму для функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на отрезке $[a, b]$. Разбиение отрезка на части произвести точками, абсциссы которых составляют геометрическую прогрессию. Вычислить этот интеграл и по формуле Ньютона—Лейбница.

Указание. Использовать формулу (10,18).

$$f(aq^i) = \frac{1}{aq^i}; \quad \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{aq^i} q^i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{a} = n \cdot \frac{1}{a}.$$

Задача сведется к определению предела $\lim\limits_{\substack{q \to 1 \\ (n \to \infty)}} n(q-1)$.

Так как согласно (10,19) $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$, то $\ln q = \frac{1}{n} \ln \frac{b}{a}$, а $n = \frac{\ln \frac{b}{a}}{\ln q}$. Поэтому указанный предел преобразуется в

$$\lim_{q \to 1} \frac{\ln \frac{b}{a}}{\ln q}(q-1) = \ln \frac{b}{a} \lim_{q \to 1} \frac{q-1}{\ln q}$$

(применить правило Лопиталя: «неопределенность» вида $\frac{0}{0}$).

Ответ. $\ln \frac{b}{a}$. По формуле Ньютона—Лейбница

$$\int\limits_a^b \frac{1}{x}\,dx = \ln x \Big|_a^b = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}.$$

Требование, чтобы a и b были числами положительными, является существенным, так как каждое из них оказалось под знаком логарифма.

Задача 10,6 (для самостоятельного решения).

Вычислить $\int\limits_a^b x\,dx$, составив интегральную сумму для функции $f(x) = x$. Отрезок $[a, b]$ разделить произвольным образом на n частей.

Точку, в которой вычисляется значение функции, взять в середине каждого частичного отрезка:

$$\xi_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}.$$

Так как $f(x) = x$, то $f(\xi_k) = \xi_k$.
Длина частичного отрезка

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}.$$

Интегральная сумма примет вид

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k + x_{k-1}}{2}(x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_k^2 - x_{k-1}^2) = \frac{1}{2}(x_n^2 - x_0^2).$$

Но $x_n = b$; $x_0 = a$, поэтому интегральная сумма равна $\frac{1}{2}(b^2 - a^2)$, а ее предел в данном случае, как предел постоянной величины, равен ей самой

$$\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

Такой результат, конечно, мог быть получен сразу по формуле (10,23). При решении этой задачи было произведено не специальное разбиение отрезка на части, а произвольное. Точка, в которой вычисляется значение функции, была выбрана в середине каждого отрезка. По формуле Ньютона—Лейбница получается, конечно, то же самое

$$\int_a^b x\,dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Задача 10,7 (для самостоятельного решения).

Вычислить $\int_a^b \sin x\,dx$ как предел интегральной суммы и применяя формулу Ньютона—Лейбница.

Указание. Отрезок $[a, b]$ разделить на n равных частей. Значения функции $\sin x$ вычислить в правом конце каждого отрезка.

По формуле (10,12) интегральная сумма будет иметь такой вид $\left(\text{с учетом, что } h = \frac{b-a}{n}\right)$:

$$h[\sin(a+h) + \sin(a+2h) + \ldots + \sin(a+ih) + \\ + \ldots + \sin(a+nh)].$$

Учесть, что $2\sin(a+ih)\sin\frac{h}{2}=\cos\left(a+ih-\frac{h}{2}\right)-\cos\left(a+ih+\frac{h}{2}\right)$, а отсюда

$$\sin(a+ih)=\frac{1}{2\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+ih-\frac{h}{2}\right)-\cos\left(a+ih+\frac{h}{2}\right)\right]$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Подставляя это значение $\sin(a+ih)$ в интегральную сумму, после приведения подобных членов получим

$$\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)-\cos\left(a+nh+\frac{h}{2}\right)\right].$$

Перейти к пределу при $h\to 0$ $(n\to\infty)$, но учесть, что $a+nh=b$, а $\lim\limits_{h\to 0}\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}=1$ (применить правило Лопиталя).

Ответ. $\int\limits_a^b \sin x\,dx=\cos a-\cos b.$

По формуле Ньютона—Лейбница

$$\int\limits_a^b \sin x\,dx=-\cos x\Big|_a^b=-(\cos b-\cos a)=\cos a-\cos b.$$

Заканчивая упражнения на вычисление определенного интеграла как предела интегральных сумм, отметим еще раз, что такое вычисление даже в простейших случаях требует больших усилий.

В заключение этого практического занятия выполним ряд упражнений на вычисление определённого интеграла по формуле Ньютона—Лейбница.

Задача 10,8 (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_0^\pi \sin x\,dx$; 2) $\int\limits_0^1 e^{kx}dx$; 3) $\int\limits_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ (учесть, что значения функции $y=\operatorname{arctg}x$ находятся на интервале $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$; $\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$; 4) $\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$; 5) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx.$

Ответ. 1) 2; 2) $\frac{e^k-1}{k}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{3}$; 5) $\sqrt{2}-1$.

Задача 10,9 (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы:

$$1)\ \int_a^b \frac{dx}{x}\ (a>0;\ b>0);\quad 2)\ \int_a^b \cos x\,dx;\quad 3)\ \int_0^1 \frac{dx}{1+x};\quad 4)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}};$$

5) $\int\limits_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ (учесть результат задачи 4,3).

Ответ. 1) $\ln\frac{b}{a}$; 2) $\sin b-\sin a$; 3) $\ln 2$; 4) $\frac{\pi}{6}$; 5) $\frac{\pi a^2}{2}$.

Задача 10,10 (для самостоятельного решения).

Интегралы, вычисляемые в этой задаче, имеют большое значение в теории тригонометрических рядов.

Доказать справедливость следующих формул, если m и n — целые числа:

$$1)\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cos nx\,dx=0;$$

$$2)\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\sin nx\,dx=\begin{cases} 0, & \text{если } |m|\neq|n|,\\ \pi & \text{»}\quad m=n,\\ -\pi & \text{»}\quad m=-n.\end{cases}$$

Указание: $\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x]$.

$$3)\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cos nx\,dx=\begin{cases} 0, & \text{если } |m|\neq|n|,\\ \pi & \text{»}\quad m=\pm n,\\ 2\pi & \text{»}\quad m=n=0.\end{cases}$$

Указание: $\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x]$.

Задача 10,11 (для самостоятельного решения).

Интегрируя по частям, доказать формулу

$$\int \sin^{2m}x\,dx=-\frac{1}{2m}\sin^{2m-1}x\cos x+\frac{2m-1}{2m}\int \sin^{2m-2}x\,dx$$

и, применяя её при $m>0$ и целом, показать, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m}x\,dx=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\frac{2m-5}{2m-4}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}. \qquad (10{,}24)$$

Задача 10,12 (для самостоятельного решения).

Из формулы (10,24) получить, заменяя x на $\frac{\pi}{2}-z$, формулу

$$\int \cos^{2m} x\,dx = \frac{1}{2m}\cos^{2m-1} x \sin x + \frac{2m-1}{2m}\int \cos^{2m-2} x\,dx$$

и, пользуясь ею, доказать, что при $m>0$ и целом

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m} x\,dx = \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\frac{2m-5}{2m-4}\ \ldots\ \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}. \qquad (10,25)$$

На последующих практических занятиях учащийся сможет выполнить еще много упражнений, связанных с применением формулы Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла.

ОДИННАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Задачи механики и физики, приводящие к определенному интегралу.

Решим несколько задач, в которых для определения искомой величины требуется сначала составить интегральную сумму, а затем найти ее предел.

Задача 11,1. Сила тока I является заданной непрерывной функцией времени t: $I = I(t)$. Определить количество Q электричества, протекшего через поперечное сечение проводника за время T, отсчитываемое от момента начала опыта.

Решение. Считая, что в начале опыта $T=0$, разделим произвольным образом отрезок времени $(0, T)$ на n частичных отрезков. Абсциссами точек деления пусть будут числа $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{n-1}$, а длины частичных отрезков времени $t_k - t_{k-1}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ обозначим через Δt_k

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1} \quad (k=1, 2, \ldots, n),$$

причем подчеркнем еще раз, что промежутки времени Δt_k не обязательно должны быть между собою равны. В каждом из этих частичных промежутков времени выберем произвольный момент времени τ_k $(k=1, 2, \ldots, n)$. Этот момент может находиться как внутри отрезка времени $[t_{k-1}, t_k]$, так и на любом из его концов.

Сила тока — величина переменная, изменяющаяся во времени. Однако мы будем считать, что за время Δt_k сила тока не изменяется, а имеет в течение всего этого промежутка постоянное значение, а именно то, которое она имела в момент τ_k. Таким образом, для отрезка времени $[t_{k-1}, t_k]$ сила тока, равная $I(\tau_k)$, считается величиной постоянной.

Известно, что для постоянного тока количество электричества, протекшего через поперечное сечение проводника, равно произведению силы тока на время, затраченное на прохождение током этого проводника. Следовательно, за отрезок времени, равный Δt_k, протечет количество электричества, приближенно равное

$$I(\tau_k)\,\Delta t_k \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Произведение $I(\tau_k)\,\Delta t_k$ дает приближенное, а не точное количество электричества, протекшего за время Δt_k, потому что силу тока в течение всего этого промежутка времени мы считаем величиной постоянной, в то время как в действительности она изменяется непрерывно со временем и является величиной переменной.

Давая индексу k значения 1, 2, ..., n и складывая произведения $I(\tau_1)\,\Delta t_1$, $I(\tau_2)\,\Delta t_2$, ..., $I(\tau_n)\,\Delta t_n$, найдем, что количество электричества Q, протекшего за весь отрезок времени $[0, T]$, приближенно определяется суммой

$$Q \approx I(\tau_1)\,\Delta t_1 + I(\tau_2)\,\Delta t_2 + \cdots + I(\tau_n)\,\Delta t_n,$$

которая является интегральной суммой для функции $I(t)$ на отрезке $[0, T]$. Итак,

$$Q \approx \sum_{k=1}^{n} I(\tau_k)\,\Delta t_k. \tag{11,1}$$

За точное значение количества электричества Q принимается предел этой интегральной суммы при условии, что наибольший из отрезков времени $\max \Delta t_k$ стремится к нулю, а значит, число n этих отрезков неограниченно возрастает, т. е.

$$Q = \lim_{\substack{\max \Delta t_k \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{k=1}^{n} I(\tau_k)\,\Delta t_k. \tag{11,2}$$

Когда наибольший из отрезков времени Δt_k стремится к нулю, то каждое слагаемое $I(\tau_k)\,\Delta t_k$ — величина бесконечно малая, а количество n этих слагаемых неограниченно возрастает. Таким образом, при определении предела интегральной суммы (11,1) мы отыскиваем предел суммы бесконечно малых величин, когда их количество неограниченно возрастает.

Из (11,2) следует, что количество электричества, протекшего за отрезок времени $[0, T]$, определяется по формуле

$$Q = \int_0^T I(t)\,dt \tag{11,3}$$

(см. формулу (10,2)).

Таким образом, формула (11,1) определяет *приближенно* количество электричества, протекшего через поперечное сечение проводника за время, равное T секундам. Формула же (11,3) определяет это количество *точно*, причем числа, найденные по этим формулам, тем меньше отличаются одно от другого, чем меньше отрезки времени Δt_k, на которые разделен основной отрезок времени $[0, T]$.

Напомним, что в технической системе единиц количество электричества Q измеряется в кулонах, а сила тока I — в амперах.

Задача 11,2. Сила тока $I = 2t^2 - 3t + 2$.

Определить количество электричества, протекшее через поперечное сечение проводника за 10 секунд, считая время от начала опыта.

Решение.

$$Q = \int_0^{10} (2t^2 - 3t + 2)\, dt = \left(\frac{2}{3} t^3 - \frac{3}{2} t^2 + 2t\right)\Big|_0^{10} = 536 \frac{2}{3}\, k.$$

Задача 11,3. Тело движется по прямой Ox из точки с абсциссой a до точки с абсциссой b $(a < b)$ под действием **переменной** силы $\overline{F}$, являющейся непрерывной функцией абсциссы x: $\overline{F} = \overline{F}(x)$, причем сила параллельна прямой Ox, а ее направление совпадает с направлением движения тела. Найти работу A, произведенную силой $\overline{F}(x)$ на этом перемещении.

Решение. Если бы сила $\overline{F}(x)$ была не переменной, а постоянной, параллельной прямой Ox, и ее направление совпадало с направлением движения тела, то работа A, произведенная ею, была бы равна произведению модуля силы на пройденный путь, т. е. на длину отрезка $[a, b]$, равную $(b - a)$:

$$A = F(b - a).$$

Но сила переменна, а потому этой формулой для определения работы мы воспользоваться не можем.

Отрезок $[a, b]$ разделим на n отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$. На каждом из них выберем произвольную точку ξ_k. Определим в этой точке численное значение силы $\overline{F}(x)$. Получится число $F(\xi_k)$. Полагая, что в пределах каждого частичного отрезка сила не переменна, а постоянна и что ее значение на всем частичном отрезке такое же, как в выбранной точке, будем считать произведенную этой силой работу приближенно на каждом частичном отрезке равной произведению модуля силы на путь, т. е. $F(\xi_k)\, \Delta x_k$.

Работа силы $\overline{F}(x)$ на всем отрезке $[a, b]$ приближенно равна сумме работ на всех частичных участках

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\, \Delta x_k. \qquad (11,4)$$

Сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} F(\xi_k)\, \Delta x_k$ — интегральная сумма для функции $F(x)$ на отрезке $[a, b]$. По формуле (11,4) мы получим не точное значение работы, а приближенное, потому что на каждом частичном отрезке мы считали силу постоянной, в то время как фактически в пределах каждого частичного отрезка она непрерывно изменяется.

За точное значение работы силы $\overline{F}(x)$ на отрезке $[a, b]$ мы примем тот предел, к которому стремится интегральная сумма (11,4), когда наибольший из частичных отрезков Δx_k стремится к нулю, а число их n неограниченно возрастает, т. е.

$$A = \lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\, \Delta x_k,$$

и согласно формуле (10,2)

$$A = \int_a^b F(x)\, dx. \qquad (11,5)$$

Подынтегральное выражение $F(x)\,dx$ называется элементарной работой и обозначается через δA.

Работа A есть определенный интеграл от элементарной работы $\delta A = F(x)\,dx$. Таким образом, для определения работы переменной силы на прямолинейном пути надо сначала вычислить элементарную работу δA, а после этого интегрированием по формуле (11,5) найти полную работу.

Приближенное значение работы, вычисленное по формуле (11,4), будет тем меньше отличаться от ее точного значения (11,5), чем меньшими будут частичные отрезки Δx_k, на которые разбит отрезок $[a, b]$.

При определении предела суммы (11,4) наибольший из отрезков $\Delta x_k \to 0$, каждое слагаемое $F(\xi_k)\,\Delta x_k$ — величина бесконечно малая, а количество их неограниченно возрастает. Поэтому и здесь определение искомой величины, как и в задаче 11,1 связано с определением предела суммы бесконечно малых величин, когда их количество неограниченно возрастает.

Задача 11,4 (работа упругой силы на прямолинейном перемещении).

К телу прикреплена пружина, другой конец которой закреплен неподвижно в точке O. Упругая сила, с которой действует пружина на тело, подчиняется закону Гука, согласно которому $F = -kx$, где k — коэффициент пропорциональности, а x — удлинение пружины. Найти работу упругой силы на прямолинейном перемещении по линии действия силы из точки с абсциссой a в точку с абсциссой b. (Сила — в килограммах, перемещение — в метрах). Знак минус в выражении силы показывает, что упругая сила стремится восстановить равновесие.

Решение. Элементарная работа δA силы упругости на перемещении dx равна

$$\delta A = -kx\, dx,$$

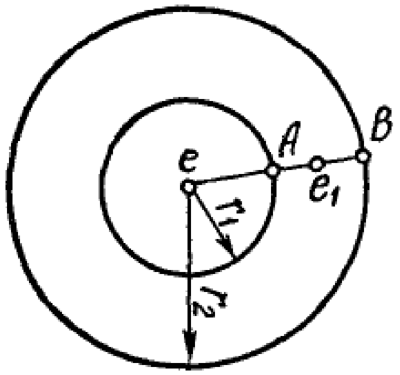
а потому полная работа на перемещении из точки a в точку b определится по формуле (11,5)

$$A = \int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b -kx\,dx = -k\frac{x^2}{2}\Bigg|_a^b = \frac{k}{2}(a^2 - b^2).$$

Следует иметь в виду, что работа упругой силы положительна, если тело движется в сторону убывания модуля упругой силы, и отрицательна, когда движение происходит в сторону возрастания модуля упругой силы.

Задача 11,5. Электрический точечный заряд $+e_1$ движется в электрическом поле, созданном точечным зарядом $+e$. Согласно закону Кулона, сила взаимодействия между двумя точечными зарядами в пустоте численно определяется по формуле

$$F = \frac{e_1 e}{r^2}.$$



К задаче 11,5

Определить работу при перемещении заряда e_1 из точки A в точку B, считая, что A и B находятся на прямой, проходящей через заряд $+e$.

Решение. Элементарная работа на перемещении dr равна $\delta A = F\,dr = \frac{e_1 e}{r^2}\,dr$, а полная работа определится интегрированием

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \frac{e_1 e}{r^2}\,dr = e_1 e\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} = e_1 e\left(-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}\right);$$

$$A = e_1\left(\frac{e}{r_1} - \frac{e}{r_2}\right).$$

Выражение, стоящее в скобках,— разность потенциалов или напряжение между точками A и B.

При решении задачи можно было не составлять выражение элементарной работы, а сразу воспользоваться формулой (11,5), так как здесь известно аналитическое выражение силы: $F = \frac{e_1 e}{r^2}$. Это же замечание относится и к предыдущей задаче.

Задача 11,6. Тяжелая цепь длиною $L = 200$ *м* поднимается, навиваясь на ворот. Определить работу силы веса при поднятии цепи, пренебрегая размерами ворота, если погонный метр цепи весит 50 *кг*.

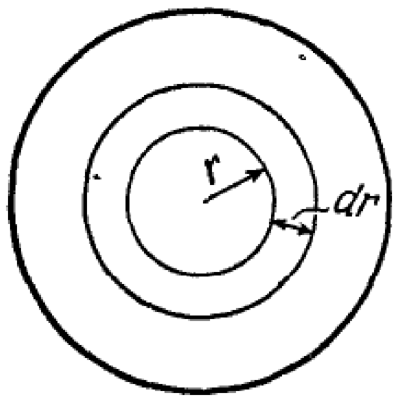
Решение. Пусть к некоторому моменту времени на ворот навернулся отрезок цепи длиной x. Тогда свешивается его часть длиной $L-x$. Весит эта часть $(L-x)\cdot 50$ *кг*. Элементарная работа силы веса на перемещении dx будет равна

$$\delta A = -(L-x)\cdot 50\,dx.$$

(Знак минус поставлен потому, что сила веса направлена противоположно перемещению). Полную работу найдем по формуле (11,5) как интеграл от элементарной работы

$$A=\int_0^L -(L-x)\cdot 50\,dx = 50\frac{(L-x)^2}{2}\Big|_0^L = -25L^2 =$$
$$= -25\cdot 200^2 = -1000\,000 \text{ кг}\cdot\text{м}.$$

Задача 11,7. На вал, вращающийся с угловой скоростью ω, насажен диск радиуса R, погруженный в жидкость. Считая, что сила трения окружающей жидкости о поверхность диска пропорциональна плотности жидкости ρ, квадрату скорости и площади соприкасания, определить момент сил трения относительно оси вала.



К задаче 11,7

Решение. Очевидно, что сила трения окружающей жидкости о поверхность диска будет меняться с глубиной. Подсчитаем сначала элементарную силу трения dF. На расстоянии r от оси вала рассмотрим кольцо, внутренний радиус которого r, а внешний $r+dr$. Площадь этого кольца равна

$$\pi(r+dr)^2-\pi r^2 = 2\pi r\,dr+\pi\,dr^2.$$

При dr, стремящемся к нулю, $\pi\,dr^2$ — величина бесконечно малая высшего порядка малости, чем dr, а потому, пренебрегая ею, примем площадь кольца равной $2\pi r\,dr$. Линейная скорость $v=\omega r$. Квадрат этой скорости равен $\omega^2 r^2$, плотность жидкости — ρ. А потому, принимая коэффициент пропорциональности равным k, для элементарной силы трения dF на расстоянии r от оси вала получаем

$$dF = k\rho 2\pi r\,dr\omega^2 r^2,$$

а ее момент относительно оси вала

$$dm = r\,dF = (k\rho 2\pi r\,dr\omega^2 r^2)\,r;$$
$$dm = 2\pi k\rho\omega^2 r^4\,dr.$$

Полный момент сил трения найдем интегрированием этого выражения от 0 до R:

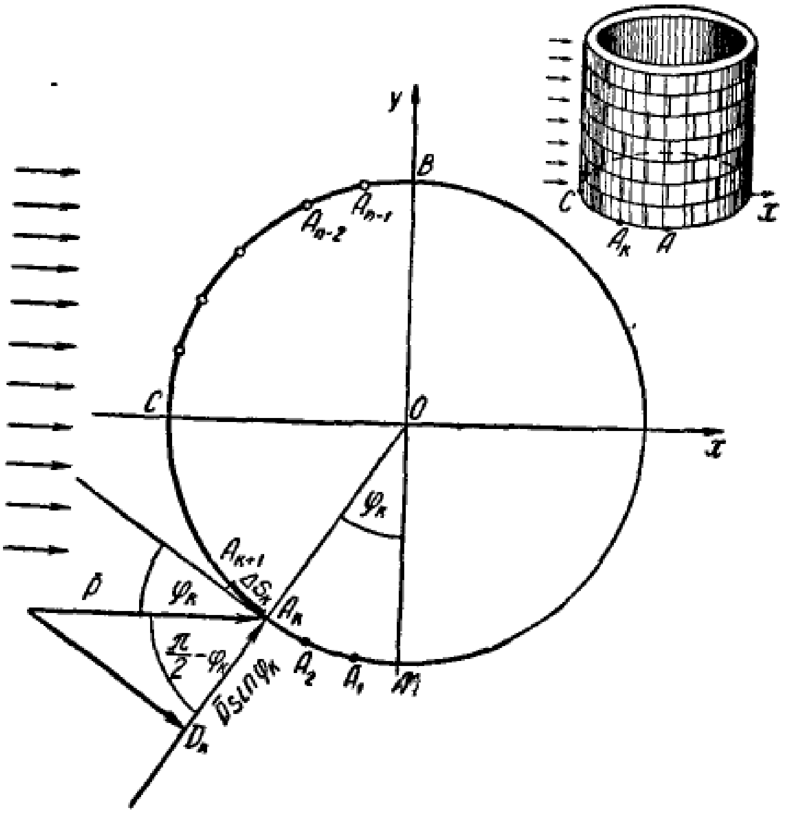
$$m = 2\pi k\rho\omega^2\int_0^R r^4\,dr = 2\pi k\rho\omega^2\frac{r^5}{5}\Big|_0^R = 2\pi k\rho\omega^2\frac{R^5}{5}.$$

Число это следует удвоить, принимая во внимание, что трутся обе поверхности диска. Поэтому полный момент сил трения

$$M = \frac{4}{5}\pi k \rho \omega^2 R^5.$$

При решении задач 11,8—11,15 следует иметь в виду, что давление — величина векторная.

Задача 11,8. Определить численное значение силы давления $\overline{p}$ ветра на стоящую вертикально цилиндрическую башню высотой h *м* с круглым основанием радиуса a *м*, если известно, что сила давления ветра на 1 *м*^{2} плоской поверхности, расположенной перпендикулярно к его направлению, равна p *кг*.



К задаче 11,8

Решение. На чертеже показано основание башни, направление ветра и расположение координатных осей. Дугу ACB разделим на n дуг точками $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots, A_{n-1}$ и рассмотрим полоски башни, опирающиеся на соответственные дуги. Если направление ветра не перпендикулярно поверхности полоски, то эта поверхность будет испытывать только часть давления, равную составляющей силы давления $\overline{p}$ по нормали к этой поверхности. Вычислим силу давления, которую испытывает полоска башни, опирающаяся на дугу Δs_k. Обозначим через φ_k угол, который касательная в точке A_k дуги $A_k A_{k+1}$ составляет с направлением ветра. Тогда составляющая $\overline{D_k A_k}$ силы давления по нормали равна

$$\overline{p}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_k\right) = \overline{p}\sin\varphi_k.$$

Полоска башни, опирающаяся на дугу Δs_k, имеет площадь, равную приближенно $h\,\Delta s_k$ *м*^{2}, а потому она испытывает давление, равное

$$\overline{\Delta p_k} = \overline{p}\sin\varphi_k h\,\Delta s_k.$$

Обозначим через $\Delta\varphi_к$ центральный угол, опирающийся на дугу $\Delta s_к$. Учитывая, что радиус окружности основания башни равен a, получим

$$\Delta s_к = a\Delta\varphi_к,$$

а сила давления ветра на полоску башни, опирающуюся на дугу

$$\overline{\Delta p_к} = \overline{p}\sin\varphi_к\, ha\Delta\varphi_к.$$

Определим проекции этой силы на координатные оси Ox и Oy:

$$(\overline{\Delta p_к})_x = (pah\sin\varphi_к\Delta\varphi_к)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_к\right),$$

или

$$(\overline{\Delta p_к})_x = pah\sin^2\varphi_к\Delta\varphi_к;$$

$$(\overline{\Delta p_к})_y = (pah\sin\varphi_к\Delta\varphi_к)\cos\varphi_к = pah\sin\varphi_к\cos\varphi_к\,\Delta\varphi_к.$$

(Учащегося должен заинтересовать вопрос, почему от силы давления ветра $\overline{\Delta p_к}$ на полоску башни мы переходим к проекциям этой силы на координатные оси).

Суммы проекций по соответствующим координатным осям дадут приближенные значения проекции на эти оси силы давления $\overline{p}$ на всю башню.

$$\left.\begin{aligned} p_x &\approx \sum_{к=1}^{n} pah\sin^2\varphi_к\Delta\varphi_к = pah\sum_{к=1}^{n}\sin^2\varphi_к\Delta\varphi_к \\ p_y &\approx \sum_{к=1}^{n} pah\sin\varphi_к\cos\varphi_к\Delta\varphi_к = pah\sum_{к=1}^{n}\sin\varphi_к\cos\varphi_к\Delta\varphi_к \end{aligned}\right\} \quad (11,6)$$

(в обоих случаях постоянная величина pah, входящая в каждое слагаемое, вынесена за знак суммы).

Угол φ отсчитывается от OA и изменяется на дуге ACB от 0 до π, а потому, переходя к пределу в последних равенствах (11,6) при условии, что число частей деления дуги ACB на части неограниченно увеличивается, а все $\Delta\varphi_к$ стремятся к нулю, получим точные выражения для проекций силы давления на оси Ox и Oy в виде определенных интегралов:

$$p_x = pah\int_0^{\pi}\sin^2\varphi d\varphi = pah\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi = \frac{pah}{2}\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{pah\,\pi}{2}\,кг;$$

$$p_y = pah\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\cos\varphi d\varphi = pah\frac{\sin^2\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 0.$$

Итак, $p_x = \frac{pah\,\pi}{2}\,кг;\;\; p_y = 0.$

Если известны проекции a_x и a_y вектора $\bar{a}$ на координатные оси, то его численное значение (модуль), как известно, находится по формуле $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$, а потому модуль силы давления $\bar{p}$ на всю башню равен

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = \frac{pah\pi}{2} \text{ кг.}$$

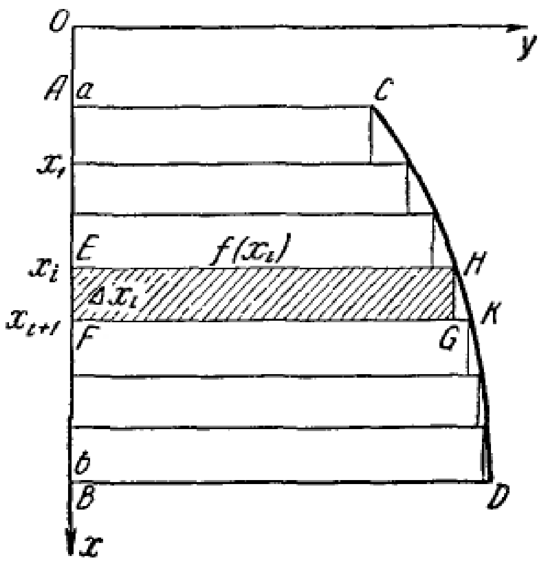
Задача 11,9 (о давлении жидкости на погруженную в нее вертикальную стенку).

В жидкость, удельный вес которой равен γ, погружена вертикальная стенка. Определить численное значение (модуль) силы гидростатического давления жидкости на эту стенку (см. чертеж).

Решение. Из гидростатики известно, что давление жидкости на погруженную в нее горизонтальную пластинку численно равно весу столба жидкости, опирающегося на эту пластинку, т. е. произведению площади этой пластинки на ее расстояние от свободной поверхности жидкости и на удельный вес жидкости.

Если площадь пластинки S, ее расстояние от свободной поверхности жидкости h, а удельный вес жидкости γ, то модуль силы давления

$$P = Sh\gamma. \qquad (11,7)$$



К задаче 11,9

Но эта формула верна только для пластинки, занимающей в жидкости горизонтальное положение. Если же пластинка, погруженная в жидкость, занимает не горизонтальное положение, а, например, вертикальное, то ее различные точки находятся на различной глубине, а поэтому о расстоянии всей пластинки от свободной поверхности жидкости не имеет смысла говорить, и формула (11,7) для вычисления модуля силы давления на эту пластинку непригодна.

Отнесем пластинку $ABCD$ к прямоугольной системе координат (см. чертеж), причем ось Oy расположим на поверхности жидкости. Абсциссы точек A и B соответственно равны a и b, а линия CD определяется уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[a, b]$.

Разделим отрезок $[a, b]$ на n произвольных частей и построим прямоугольники, как показано на чертеже. Площадь пластинки $EFKH$ примем приближенно равной площади прямоугольника $EFGH$, т. е. произведению $f(x_i)\Delta x_i$. Чтобы вычислить приближенно величину давления на этот прямоугольник, повернем его вокруг стороны EH так, чтобы он принял горизонтальное положение. Теперь уже к этой площадке применима формула (11,7), и *приближенно* величина давления жидкости на прямоугольник $EFGH$ будет равна

$$(f(x_i)\,\Delta x_i)\,x_i\gamma.$$

Эта величина тем меньше будет отличаться от истинной величины давления на пластинку $EFKH$, чем на большее число n разделен отрезок $[a, b]$.

Поступая так же со всеми прямоугольниками, мы найдем, что приближенно модуль силы давления определяется интегральной суммой

$$P \approx \gamma \sum_{i=0}^{n-1} x_i f(x_i)\,\Delta x_i$$

(постоянная величина γ входит в каждое слагаемое, а потому вынесена за знак суммы). При составлении интегральной суммы мы точку на каждом частичном отрезке взяли в его левом конце. Как известно, на предел интегральной суммы это не повлияет.

За точное значение модуля силы давления примем предел, к которому стремится эта сумма, когда наибольший из отрезков Δx_i стремится к нулю, а число n этих отрезков неограниченно увеличивается

$$P = \gamma \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=0}^{n-1} x_i f(x_i)\,\Delta x_i.$$

Так как $\Delta x_i \to 0$, то каждое произведение $x_i f(x_i)\,\Delta x_i$ — величина бесконечно малая, и здесь опять-таки мы имеем дело с определением предела суммы неограниченно возрастающего количества бесконечно малых величин.

К задаче 11,10

На основании формулы (10,2) мы можем записать, что модуль силы давления жидкости на вертикально погруженную в нее стенку равен

$$P = \gamma \int_b^a x f(x)\,dx. \tag{11,8}$$

Задача 11,10. Прямоугольная пластинка со сторонами a *дм* и h *дм* вертикально погружена в жидкость удельного веса γ. Сторона длиной a *дм* лежит на поверхности жидкости. Определить численное значение силы давления, испытываемого каждой стороной пластинки.

Решение. Применим формулу (11,8). В ней нижний предел интегрирования нужно взять равным нулю, верхний равен h, $f(x)=a$, а потому модуль силы давления

$$P = \gamma \int_0^h axdx = \gamma \frac{ah^2}{2} \text{ кг}$$

(давление получилось в килограммах, так как стороны прямоугольника выражены в дециметрах).

При решении задачи значительно большую пользу принесло бы повторение рассуждений, проведенных в предыдущей задаче, чем использование готовой формулы (11,8).

Задача 11,11. При условиях предыдущей задачи определить, на какой глубине надо разделить прямоугольник горизонтальной прямой, чтобы давления на каждую из двух частей прямоугольника были равны между собой.

Решение. Проведем прямую, разделяющую прямоугольник на глубине $c\,(c < h)$. Тогда давление p_1 на верхнюю часть прямоугольника численно равно

$$p_1 = \gamma \int_0^c axdx,$$

а давление p_2 на нижнюю его часть

$$p_2 = \gamma \int_c^h axdx.$$

По условию задачи эти числа должны быть между собой равны, а потому

$$\gamma \int_0^c axdx = \gamma \int_c^h axdx.$$

Сокращая на $a\gamma$ и интегрируя, получим уравнение для определения неизвестной величины c:

$$\frac{c^2}{2} = \frac{h^2-c^2}{2}; \; 2c^2 = h^2; \; c = \frac{\sqrt{2}}{2} h.$$

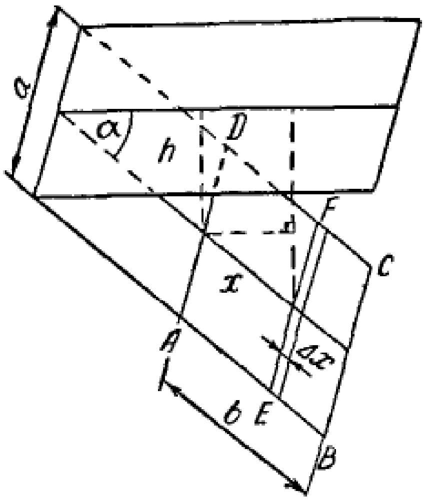
Задача 11,12 (для самостоятельного решения).

Определить численное значение силы давления жидкости удельного веса γ на одну из сторон прямоугольной пластинки, наклоненной к поверхности жидкости под углом α, причем верхняя сторона

AD длиной a *дм* расположена горизонтально на глубине h от поверхности жидкости. Длина другой стороны AB прямоугольника — b *дм* (см. чертеж).

Указание. На прямоугольнике $ABCD$ взять полоску шириной Δx на расстоянии x от стороны AD. Площадь этой полосы равна $a \cdot \Delta x$, а ее расстояние от поверхности жидкости равно $h + x \sin \alpha$. Давление, оказываемое жидкостью на эту полоску, приближенно равно

$$\gamma (h + x \sin \alpha) a \Delta x.$$



К задаче 11,12

Ответ. $p = \frac{ab\gamma}{2}(2h + b \sin \alpha)$ *кг.*

Задача 11,13 (для самостоятельного решения).

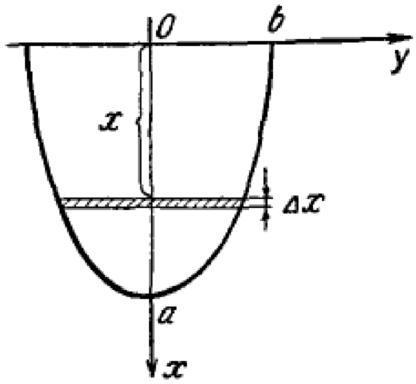
Плотина имеет форму половины эллипса, малая ось которого $2b$ лежит на поверхности жидкости. Большая ось эллипса — $2a$. Вычислить численное значение давления воды на плотину.

Указание. Если расположить оси, как это сделано на чертеже, то эллипс определится уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Вырежем полоску на глубине x шириною Δx. Площадь этой полоски равна $2y\Delta x$. Величину y определить из уравнения эллипса. Принять удельный вес воды $\gamma = 1$.

Численное значение давления равно

$$\frac{2b}{a} \int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$



К задаче 11,13

Можно было сразу воспользоваться готовой формулой (11,8), в которой взять $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$.

Ответ. Если полуоси эллипса выражены в дециметрах, то численно давление получится в килограммах

$$p = \frac{2}{3} a^2 b \text{ кг.}$$

Если заменить эллипс половиной круга ($a = b$) то

$$p = \frac{2}{3} a^3 \text{ кг.}$$

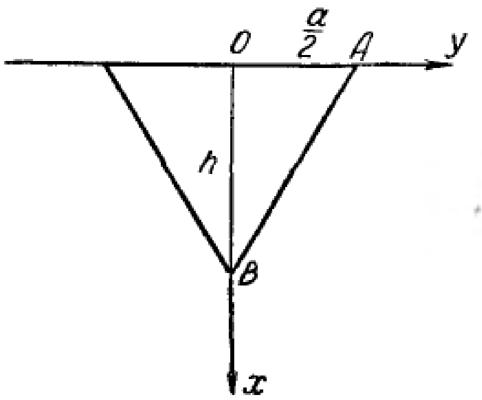
Задача 11,14 (для самостоятельного решения).

Найти численное значение давления воды ($\gamma = 1$) на треугольные щиты, показанные на чертеже.

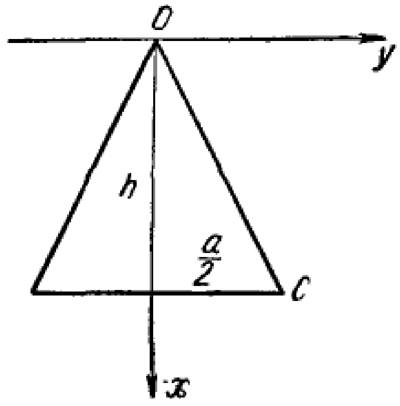
Указание. а) Уравнение AB: $y = \frac{a}{2} - \frac{a}{2h}x$;

б) уравнение OC: $y = \frac{a}{2h}x$.

Ответ. а) $p = \frac{ah^2}{6}$; б) $p = \frac{ah^2}{3}$.



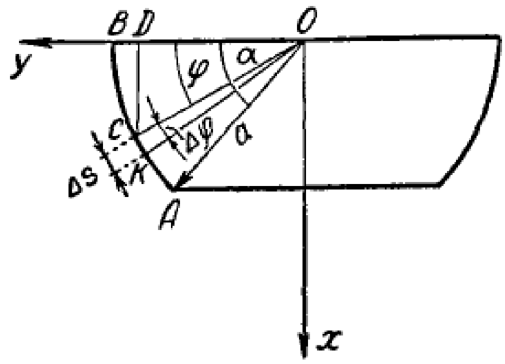
К задаче 11,14 а



К задаче 11,14 б

Задача 11,15 (для самостоятельного решения).

Поперечное сечение стенки резервуара, наполненного водой, представляет дугу AB круга радиуса a *дм*, центр O которого лежит на поверхности воды, а центральный угол AOB равен α. Определить давление воды на эту дугу (см. чертеж).



К задаче 11,15

Указание. 1. Дугу AB разделить на n частей.

2. Учесть, что давление направлено по перпендикуляру к поверхности и численно равно произведению длины элемента Δs на его глубину DC и на удельный вес γ жидкости.

3. Длина дуги окружности равна произведению ее радиуса на число радианов, содержащихся в центральном угле, опирающемся на эту дугу, т. е.

$$\Delta s = a\Delta\varphi,$$

$DC = a\sin\varphi$; $\gamma = 1$, а потому на элемент Δs дуги AB численное значение силы давления $\overline{\Delta p}$ приближенно равно

$$\Delta p = (a\sin\varphi)\, a\Delta\varphi = a^2 \sin\varphi\, \Delta\varphi.$$

4) Найти проекции ΔX и ΔY силы $\overline{\Delta p}$ на оси Ox и Oy:

$$\Delta X = (a^2 \sin\varphi\, \Delta\varphi) \cos(90° - \varphi) = a^2 \sin^2\varphi\, \Delta\varphi;$$

$$\Delta Y = a^2 \sin\varphi \cos\varphi\, \Delta\varphi.$$

$$X = \int\limits_0^\alpha a^2 \sin^2\varphi\, d\varphi;\ \ Y = \int\limits_0^\alpha a^2 \sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi;\ \ p = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Как и в задаче 11,9, читателя должна заинтересовать причина, заставляющая перейти от элементарных давлений $\overline{\Delta p}$ к их проекциям, затем суммировать не элементарные давления, а их проекции, и только найдя их, определить численное значение самого давления.

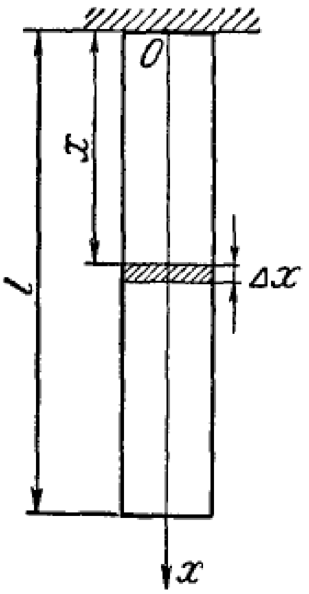
Ответ. $p = \frac{a^2}{4}\sqrt{4\sin^4\alpha + (2\alpha - \sin 2\alpha)^2}$ *кг.*

Задача 11,16. Согласно закону Гука, удлинение Δl стержня длиной l постоянного сечения F под действием растягивающей нормальной силы P определяется формулой

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF}, \qquad (11,9)$$

где E — модуль упругости материала, из которого сделан стержень.

Определить удлинение свободно подвешенного цилиндрического стержня длиной l *см* и поперечного сечения F *см*^{2} под действием его собственного веса. Удельный вес материала стержня γ *г/см*^{3}.



К задаче 11,16

Решение. Разделим стержень на элементарные цилиндрические стержни. Эти элементы будут испытывать различные растяжения, так как они находятся под действием различных сил веса.

Вычислим по формуле (11,9) растяжение элементарного цилиндра высотой Δx, находящегося на расстоянии x от места подвеса. На него действует сила веса, равная весу нижележащей части стержня. Длина этой части равна $(l - x)$, объем ее — $(l - x) F$, а вес — $(l - x) F\gamma$. Полагая в формуле (11,9) $l = \Delta x$; $P = (l - x) F\gamma$, получим, что растяжение элементарного цилиндра приближенно равно

$$\frac{(l - x) F\gamma\, \Delta x}{EF} = \frac{(l - x)\gamma\, \Delta x}{E}.$$

Суммируя растяжения этих элементарных цилиндров и переходя к пределу при условии, что число этих элементарных цилиндров неограниченно возрастает, а высота Δx каждого из них неограниченно убывает, общее удлинение стержня найдем по формуле

$$\Delta l = \int_0^l \frac{(l-x)\gamma}{E}\,dx = -\frac{\gamma}{E}\frac{(l-x)^2}{2}\Big|_0^l.$$

Ответ.

$$\Delta l = \frac{\gamma l^2}{2E}\ см.$$

Задача 11,17 (для самостоятельного решения).

Материальная точка движется по прямой с переменной скоростью, являющейся заданной непрерывной функцией времени t: $v = v(t)$. Определить путь, пройденный телом от момента времени t_0 до момента T.

Указание. Промежуток времени $[t_0, T]$ разделить на n произвольных частей. Длина каждого промежутка времени

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}.$$

В каждом частичном промежутке времени выберем произвольный момент — τ_k. (Момент τ_k может совпадать и с любым из концов отрезка времени Δt_k).

Вычислим скорость v в этот момент времени. Получится число $v(\tau_k)$.

Принимаем, что за время Δt_k движение происходит равномерно. Поскольку при равномерном прямолинейном движении путь, пройденный телом, равен произведению скорости на время, путь, пройденный за время Δt_k, будет приближенно равен $v(\tau_k)\,\Delta t_k$. Сложим пути, пройденные за все частичные отрезки времени.

Приближенное значение пути

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} v(\tau_k)\,\Delta t_k. \qquad (11,10)$$

За точное значение пути S следует принять предел интегральной суммы (11,10), когда наибольший из промежутков времени Δt_k стремится к нулю:

$$S = \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} v(\tau_k)\,\Delta t_k.$$

На основании формулы (10,2) можно записать, что

$$S = \int_{t_0}^{T} v(t)\,dt. \qquad (11,11)$$

Таким образом, если задан закон изменения скорости, то путь, пройденный телом, вычисляется с помощью определенного интеграла по формуле (11,11).

Когда $\max \Delta t_k \to 0$, то произведение $v(\tau_k)\,\Delta t_k$ — величина бесконечно малая. Определение искомой величины и в этой задаче свелось к отысканию предела суммы неограниченно возрастающего количества бесконечно малых величин.

Задача 11,18 (для самостоятельного решения).

Вычислить путь, пройденный свободно падающим в пустоте телом за T секунд, если известно, что скорость v свободного падения в пустоте определяется формулой $v = gt$ (начальную скорость v_0 принимаем равной нулю).

Ответ. $S = \frac{gT^2}{2}$. Если $v_0 \neq 0$, то $v = v_0 + gt$, а $S = v_0 T + \frac{gT^2}{2}$.

Задача 11,19 (для самостоятельного решения).

Дан неоднородный тонкий стержень длиной L. Определить массу этого стержня, зная, что в каждой его точке плотность μ есть заданная непрерывная функция абсциссы x этой точки: $\mu = \mu(x)$.

Указание. Если бы стержень был однородным, то плотность μ во всех его точках была бы величиной постоянной, а его масса, учитывая, что по условию стержень тонкий, была бы равна произведению плотности μ на его длину L, т. е. $m = \mu L$.

Разделить длину стержня на n произвольных частей. Вычислить массу каждой части, считая, что плотность каждой из частей постоянна, сложить полученные массы и перейти к пределу, устремляя к нулю наибольший из частичных отрезков, на которые разделен стержень.

Ответ. $m = \int\limits_0^L \mu(x)\,dx$.

ДВЕНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям. Теорема о среднем значении.

I. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Краткие сведения из теории

Часто для упрощения вычисления интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \qquad (12,1)$$

приходится заменять независимую переменную величину x, полагая, что

$$x = \varphi(t). \qquad (12,2)$$