Когда $\max \Delta t_k \to 0$, то произведение $v(\tau_k)\Delta t_k$ — величина бесконечно малая. Определение искомой величины и в этой задаче свелось к отысканию предела суммы неограниченно возрастающего количества бесконечно малых величин.

Задача 11,18 (для самостоятельного решения).

Вычислить путь, пройденный свободно падающим в пустоте телом за T секунд, если известно, что скорость v свободного падения в пустоте определяется формулой $v = gt$ (начальную скорость v_0 принимаем равной нулю).

Ответ. $S = \frac{gT^2}{2}$. Если $v_0 \neq 0$, то $v = v_0 + gt$, а $S = v_0 T + \frac{gT^2}{2}$.

Задача 11,19 (для самостоятельного решения).

Дан неоднородный тонкий стержень длиной L. Определить массу этого стержня, зная, что в каждой его точке плотность μ есть заданная непрерывная функция абсциссы x этой точки: $\mu = \mu(x)$.

Указание. Если бы стержень был однородным, то плотность μ во всех его точках была бы величиной постоянной, а его масса, учитывая, что по условию стержень тонкий, была бы равна произведению плотности μ на его длину L, т. е. $m = \mu L$.

Разделить длину стержня на n произвольных частей. Вычислить массу каждой части, считая, что плотность каждой из частей постоянна, сложить полученные массы и перейти к пределу, устремляя к нулю наибольший из частичных отрезков, на которые разделен стержень.

Ответ. $m = \int\limits_0^L \mu(x)\,dx$.

ДВЕНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям. Теорема о среднем значении.

I. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Краткие сведения из теории

Часто для упрощения вычисления интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \tag{12,1}$$

приходится заменять независимую переменную величину x, полагая, что

$$x = \varphi(t). \tag{12,2}$$

Это приводит к формуле преобразования определенного интеграла при введении новой переменной

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \tag{12,3}$$

При этом предполагается: 1) функция $f(x)$ — непрерывна на отрезке $[a, b]$; 2) функция $\varphi(t)$ и ее производная $\varphi'(t)$ — непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$; 3) имеют место равенства $a = \varphi(\alpha)$: $b = \varphi(\beta)$; 4) при изменении новой переменной t от α до β функция $x = \varphi(t)$ изменяется всегда в одном и том же направлении от $\varphi(\alpha) = a$ до $\varphi(\beta) = b$, т. е. функция $x = \varphi(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ должна быть монотонной. (Это требование можно заменить другим: все значения функции $\varphi(t)$ должны находиться на отрезке $[a, b]$).

Из этой справки читатель видит, что замена переменной в определенном интеграле требует осторожности и обязательного выполнения всех перечисленных условий, налагаемых на функцию (12,2). При соблюдении этих требований важно отметить, что замена переменной в определенном интеграле приводит в общем случае к интегралу с новыми пределами интегрирования. Эти пределы находятся так: в (12,2) подставляется сначала нижний предел a заданного интеграла и решается уравнение $a = \varphi(t)$. Значение t, найденное из него, и будет новым нижним пределом α. Если этому уравнению удовлетворяет не одно, а несколько значений t, то за α можно принять любое из них. Затем для определения нового верхнего предела в (12,2) подставляется верхний предел b заданного интеграла и решается уравнение $b = \varphi(t)$. Найденное из этого уравнения значение t будет новым верхним пределом β. Если это уравнение имеет несколько корней, то за β можно принять любой из них. Однако свобода выбора чисел α и β ограничивается требованием, чтобы значения функции $\varphi(t)$ не выходили из отрезка $[a, b]$, в котором определена и непрерывна подынтегральная функция $f(x)$ (см. задачу 12,1).

Сделав замену переменной, изменив пределы интегрирования, после вычисления преобразованного определенного интеграла нет необходимости переходить к старой переменной, как это мы делали при вычислении неопределенного интеграла с помощью замены переменной.

Еще раз подчеркиваем, что подстановка (12,2) должна упростить вычисление интеграла (12,1).

Укажем также, что несоблюдение всех указанных требований, налагаемых на функцию (12,2), может привести к грубым ошибкам.

Во многих случаях приходится вместо подстановки (12,2), которая переменную интегрирования x заменяет функцией новой переменной, вводить новую переменную t как функцию старой переменной x, т. е. полагать

$$t = \omega(x).$$

В этом случае новые пределы интегрирования $\alpha = \omega(a)$, а $\beta = \omega(b)$. Если соотношение $t = \omega(x)$ разрешить относительно x, то окажется, что $x = \varphi(t)$, причем необходимо, чтобы для функции $\varphi(t)$ были соблюдены все указанные выше условия.

Задача 12,1. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

Решение. Можно было бы воспользоваться известным из задачи 4,3 вычислением неопределенного интеграла $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ и, применяя формулу (10,2) Ньютона — Лейбница, найти искомый интеграл

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right)\Bigg|_0^a =$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{a}{a} = \frac{a^2}{2}\arcsin 1 = \frac{a^2\pi}{4}.$$

(Первое слагаемое $\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}$ обращается в нуль как при верхнем, так и при нижнем пределах).

Вычислим теперь этот же интеграл с помощью замены переменной. Введем подстановку

$$x = a\sin t. \tag{12,4}$$

Прежде всего определим новые пределы интегрирования. Когда $x = 0$, из уравнения $0 = a\sin t$ получаем, что $t = k\pi$. Подставляя же в (12,4) вместо x верхний предел a, получим: $a = a\sin t$; $\sin t = 1$; $t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Из всех возможных значений t, удовлетворяющих уравнениям $a\sin t = 0$ и $a = a\sin t$, мы возьмем 0 и $\frac{\pi}{2}$ потому, что на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ функция $x = a\sin t$ удовлетворяет не только первым трем из указанных требований, что очевидно было сразу, но и четвертому, так как на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ она монотонно возрастает и ее значения сплошь заполняют первоначальный отрезок интегрирования $[0, a]$. Вместо этих значений можно было бы взять и любые другие, но такие, чтобы значения функции $x = a\sin t$ не выходили из отрезка $[0, a]$. В качестве таких значений можно взять, например, $\alpha = 2\pi$, $\beta = \frac{5}{2}\pi$. При изменении t от 2π до $\frac{5}{2}\pi$ функция $x = a\sin t$ изменяется от 0 до a. Но взять значения $\alpha = \pi$,

$\beta = \frac{3}{2}\pi$ нельзя, так как тогда функция $x = a\sin t$ принимает значения не на отрезке $[0, a]$, на котором ведется вычисление заданного интеграла, а на отрезке $[0, -a]$.

Подынтегральная функция преобразуется так:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} = a\cos t;\ dx = a\cos t\,dt.$$

Поэтому

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t\,dt = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Ответы, конечно, совпали.

Задача 12,2. Вычислить $\int_0^{2a}\sqrt{2ax - x^2}\,dx$.

Решение. Преобразуем подкоренное выражение

$$2ax - x^2 = a^2 - (x^2 - 2ax + a^2) = a^2 - (x - a)^2$$

и введем подстановку

$$x - a = a\sin t;\ x = a + a\sin t; \tag{12,5}$$

$$dx = a\cos t\,dt;\ \sqrt{2ax - x^2} = \sqrt{a^2 - (x-a)^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} =$$
$$= \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} = a\cos t.$$

Подынтегральное выражение будет таким: $\sqrt{2ax - x^2}\,dx = a^2\cos^2 t\,dt$.

Теперь надо не забыть определить новые пределы интегрирования: сначала в подстановку (12,5) подставим нижний предел заданного интеграла $x = 0$, а потом верхний $x = 2a$, и получим: при $x = 0$ $0 = a + a\sin t$; $\sin t = -1$; $t = -\frac{\pi}{2}$; при $x = 2a$: $2a = a + a\sin t$; $2 = 1 + \sin t$; $\sin t = 1$, $t = \frac{\pi}{2}$. .Решая уравнения $\sin t = -1$ и $\sin t = 1$, мы остановились на значениях $t = -\frac{\pi}{2}$ и $t = \frac{\pi}{2}$, так как на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ функция (12,5) монотонно возрастает и остальным требованиям она также удовлетворяет.

Таким образом, новыми пределами интегрирования будут $-\frac{\pi}{2}$ — нижний предел, $\frac{\pi}{2}$ — верхний. Поэтому

$$\int_0^{2a} \sqrt{2ax - x^2}\,dx = a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{\pi a^2}{2}.$$

Задача 12,3 (для самостоятельного решения).

Вычислить $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2ax + 2a^2}}$.

Указание. $x^2 - 2ax + 2a^2 = (x-a)^2 + a^2$.

Подстановка: $x - a = z$.

Пределы интегрирования: при $x = 0$ получаем, $z = -a$, при $x = a$ $z = 0$. Таким образом, новая переменная z изменяется на отрезке $[-a, 0]$. Интеграл преобразуется к интегралу $\int_{-a}^{0} \frac{dz}{\sqrt{z^2 + a^2}}$.

Ответ. $\ln\left(\sqrt{2} + 1\right)$.

Задача 12,4 (для самостоятельного решения).

Вычислить $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}\,dx}{1 + \sqrt{x}}$.

Указание. Подстановка: $x = z^2$ $(z > 0)$.

Определяем новые пределы интегрирования:

при $x = 1$ $1 = z^2$, $z = 1$;

» $x = 4$ $4 = z^2$; $z = 2$.

Новая переменная z изменяется на отрезке $[1; 2]$. Интеграл преобразуется к виду $2\int_1^2 \frac{z^2\,dz}{1 + z}$.

Ответ. $1 + \ln\frac{9}{4}$.

Задача 12,5. Вычислить $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$.

Указание. Сделать подстановку: $x = \cos\theta$.

Пределы интегрирования:

$$\text{при } x = 0 \quad 0 = \cos\theta;\ \theta = \frac{\pi}{2};$$
$$\text{»} \quad x = 1 \quad 1 = \cos\theta;\ \theta = 0.$$

Новая переменная изменяется на отрезке $\left[\frac{\pi}{2},\ 0\right]$.

Интеграл приводится к виду $-2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta = 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta$.

(Перемена местами пределов интегрирования меняет знак определенного интеграла на противоположный)

Ответ. $\frac{\pi}{2}-1$.

Задача 12,6. Вычислить $I = \int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$.

Решение. Сделаем подстановку:

$$x = \pi - z. \tag{12,6}$$

Новые пределы интегрирования:

$$\text{при } x = 0 \quad 0 = \pi - z;\ z = \pi;$$
$$\text{»} \quad x = \pi \quad \pi = \pi - z;\ z = 0.$$

Таким образом, новая переменная изменяется на отрезке $[\pi, 0]$. Подстановка (12,6) поменяла пределы местами. Учитывая, что из (12,6) $dx = -dz$, данный интеграл

$$I = -\int\limits_{\pi}^{0}\frac{(\pi - z)\sin(\pi - z)}{1+\cos^2(\pi - z)}\,dz = \int\limits_0^{\pi}\frac{(\pi - z)\sin z}{1+\cos^2 z}\,dz =$$

$$= \pi\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin z}{1+\cos^2 z}\,dz - \underbrace{\int\limits_0^{\pi}\frac{z\sin z}{1+\cos^2 z}\,dz.}_{I}$$

Но $\int\limits_0^{\pi}\frac{z\sin z}{1+\cos^2 z}\,dz$ равен искомому, потому что по сравнению с ним здесь изменилось только название переменной (z вместо x).

Поэтому последнее равенство можно переписать так:

$$I = \pi\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin z}{1+\cos^2 z}\,dz - I,$$

т. е.

$$2I = \pi \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin z}{1+\cos^2 z}\,dz;\ I = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin z}{1+\cos^2 z}\,dz =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\operatorname{arctg}(\cos z)\Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2}[\operatorname{arctg}(\cos\pi) - \operatorname{arctg}(\cos 0)] =$$

$$= -\frac{\pi}{2}[\operatorname{arctg}(-1) - \operatorname{arctg} 1] = -\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$$

Ответ. $I = \frac{\pi^2}{4}$.

Задача 12,7. Вычислить $\displaystyle\int\limits_{\sqrt{\frac{3a^2+b^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}$.

Решение. Применим подстановку:

$$x^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta. \qquad (12,7)$$

Отсюда следует:

$$2x\,dx = -2a^2\cos\theta\sin\theta\,d\theta + 2b^2\sin\theta\cos\theta\,d\theta;$$

$$x\,dx = (b^2-a^2)\sin\theta\cos\theta\,d\theta; \qquad (12,8)$$

$$x^2 - a^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta - a^2 = b^2\sin^2\theta + a^2(\cos^2\theta - 1) =$$
$$= b^2\sin^2\theta - a^2\sin^2\theta = (b^2-a^2)\sin^2\theta;$$

$$b^2 - x^2 = b^2 - a^2\cos^2\theta - b^2\sin^2\theta = b^2(1-\sin^2\theta) - a^2\cos^2\theta =$$
$$= b^2\cos^2\theta - a^2\cos^2\theta = (b^2-a^2)\cos^2\theta;$$

$$\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)} = \sqrt{(b^2-a^2)\sin^2\theta\,(b^2-a^2)\cos^2\theta} =$$
$$= (b^2-a^2)\sin\theta\cos\theta.$$

При учете (12,8) подынтегральное выражение станет равным $d\theta$. Теперь определим новые пределы интегрирования.

При нижнем пределе $x = \frac{\sqrt{3a^2+b^2}}{2}$ имеем из (12,7):

$$\frac{3a^2+b^2}{4} = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta;$$

$$3a^2 + b^2 = 4a^2(1-\sin^2\theta) + 4b^2\sin^2\theta = 4a^2 - 4a^2\sin^2\theta + 4b^2\sin^2\theta;$$

$$b^2 - a^2 = 4(b^2-a^2)\sin^2\theta;\quad \sin^2\theta = \frac{1}{4};\quad \sin\theta = \frac{1}{2};\quad \theta = \frac{\pi}{6}.$$

При верхнем пределе $x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, используя (12,7), получим:

$$\frac{a^2+b^2}{2} = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta;$$

$$a^2+b^2 = 2a^2(1-\sin^2\theta) + 2b^2\sin^2\theta;$$

$$a^2+b^2 = 2a^2 - 2a^2\sin^2\theta + 2b^2\sin^2\theta;$$

$$b^2-a^2 = 2(b^2-a^2)\sin^2\theta; \quad \sin^2\theta = \frac{1}{2}; \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}.$$

Таким образом, новая переменная θ изменяется на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$, а исходный интеграл

$$I = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \theta \Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}.$$

Ответ. $I = \frac{\pi}{12}$.

Задача 12,8 (для самостоятельного решения).
Вычислить интегралы:

$$1)\ I_1 = \int\limits_1^2 \frac{dx}{x(1+x^4)}; \quad 2)\ I_2 = \int\limits_3^{10} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x+6}}; \quad 3)\ \int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}}.$$

Указания. 1) Подстановка: $x = \frac{1}{\sqrt[4]{t-1}}$. Здесь можно вообще легко избежать подстановки, если подынтегральную функцию представить в виде

$$\frac{1}{x(1+x^4)} = \frac{1+x^4-x^4}{x(1+x^4)} = \frac{1+x^4}{x(1+x^4)} - \frac{x^4}{x(1+x^4)} = \frac{1}{x} - \frac{x^3}{1+x^4}.$$

Новые пределы интегрирования: 2 и $\frac{17}{16}$;

$$I_1 = -\frac{1}{4}\int\limits_2^{\frac{17}{16}} \frac{dt}{t}.$$

2) Подстановка: $x+6=z^2$. Новые пределы интегрирования: нижний $z=3$, верхний $z=4$; $x-1=z^2-7$,

Ответ. 1) $\frac{1}{4}\ln\frac{32}{17}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{7}}\ln\frac{16+5\sqrt{7}}{9}$; 3) $\frac{5}{3}-\ln 4$.

Задача 12,9 (для самостоятельного решения).
Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{(4x+1)\sqrt{x}}$ (подстановка: $x = z^2$);

2) $\int\limits_1^{\sqrt[3]{5}} \frac{x^2\,dx}{13-6x^3+x^6}$ (подстановка: $x^3 = z$);

3) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$ (подстановка: $1+x^2 = z^2$).

Ответ. 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{12}$; 3) $\frac{58}{15}$.

Задача 12,10 (для самостоятельного решения).

Доказать, что интеграл $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ может быть преобразован в интеграл с заданными пределами α и β при помощи подстановки

$$x = \frac{b-a}{\beta-\alpha}t + \frac{a\beta-b\alpha}{\beta-\alpha},$$

и указать подстановку, которая преобразует этот интеграл в интеграл с пределами 0 и 1.

II. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Формула интегрирования по частям для определенных интегралов имеет вид

$$\int\limits_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int\limits_a^b v du \tag{12,9}$$

в предположении, что функции u и v имеют непрерывные производные на отрезке интегрирования.

Применение формулы (12,9) мало чем отличается от применения соответствующей формулы для неопределенного интеграла. Поэтому мы ограничимся небольшим числом упражнений

Задача 12,11. Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_0^1 \arcsin x\,dx$; 2) $\int\limits_0^1 x \operatorname{arctg} x\,dx$.

Решение. 1) $\int\limits_0^1 \arcsin x\,dx = x\arcsin x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$

$$\left|\begin{array}{c|c} u=\arcsin x & du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv=dx & v=x \end{array}\right|$$

$= 1\cdot\arcsin 1 - 0\cdot\arcsin 0 + \sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$, так как

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

$$2)\ \int\limits_0^1 x\operatorname{arctg} x\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx =$$

$$\left|\begin{array}{c|c} u=\operatorname{arctg} x & du=\dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv=x\,dx & v=\dfrac{x^2}{2} \end{array}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1 dx - \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}(x - \operatorname{arctg} x)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1 =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Задача 12,12 (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы:

$$1)\ \int\limits_1^e \ln^2 x\,dx;\quad 2)\ \int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^5}\,dx;\quad 3)\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\operatorname{tg}^2 x\,dx;\quad 4)\ \int\limits_0^1 (\arcsin x)^2\,dx.$$

Ответ. 1) $e-2$; 2) $\frac{15}{256} - \frac{\ln 2}{64}$; 3) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi^2}{32}$;

4) $\frac{\pi^2}{4} - 2$.

III. ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ

Краткие сведения из теории

Вводя понятие об определенном интеграле, мы произвольным образом делили отрезок интегрирования $[a, b]$ на n частей, и в произвольной точке ξ_i каждого частичного отрезка вычисляли значение функции $f(x)$. При этом получались числа $f(\xi_i)$. Очевидно, самым простым способом будет разложение отрезка $[a, b]$ на части, равные между собой. В таком случае длина каждой из них будет равна $\frac{b-a}{n}$, интегральная сумма примет вид

$$\frac{b-a}{n}[f(\xi_1)+f(\xi_2)+\ldots+f(\xi_n)],$$

и ее предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}[f(\xi_1)+f(\xi_2)+\ldots+f(\xi_n)]=\int_a^b f(x)\,dx,$$

или

$$(b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{f(\xi_1)+f(\xi_2)+\ldots+f(\xi_n)}{n}=\int_a^b f(x)\,dx.$$

После деления обеих частей этого равенства на $b-a$ получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\xi_1)+f(\xi_2)+\ldots+f(\xi_n)}{n}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (12,10)$$

Число $\frac{f(\xi_1)+f(\xi_2)+\ldots+f(\xi_n)}{n}$ есть среднее арифметическое чисел $f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots, f(\xi_n)$, а потому и правую часть $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ формулы (12,10) называют средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Среднее значение функции $f(x)$ обозначается через $f(c)$, и имеет место формула

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx, \qquad (12,11)$$

которая и выражает теорему о среднем значении. При этом предполагается, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Итак, по определению, *среднее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ равно определенному интегралу от этой функции, вычисленному в пределах от a до b и разделенному на длину этого отрезка.*

Задача 12,13. Найти среднее значение функции $y=\sin 3x$ на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

Решение. По формуле (12,11), полагая в ней $a=0$; $b=\frac{\pi}{3}$; $f(x)=\sin 3x$, получим, что среднее значение функции

$$f(c)=\frac{1}{\frac{\pi}{3}-0}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin 3x\,dx=-\frac{3}{\pi}\cdot\frac{1}{3}\cos 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left[\cos 3\frac{\pi}{3}-\cos 0\right]=-\frac{1}{\pi}(\cos\pi-\cos 0)=-\frac{1}{\pi}(-1-1)=$$

$$=\frac{2}{\pi}=0{,}6366.$$

Задача 12,14. На отрезке AB длиною a *см* взята точка P. Найти среднее значение S_m площадей прямоугольников, построенных на отрезках AP и PB как на сторонах.

Решение. Примем точку A за начало отсчета. Пусть точка P находится на расстоянии x от A. Тогда $AP=x$, а $PB=a-x$. Площадь прямоугольника, построенного на AP и PB как на сторонах равна $x(a-x)$.

По формуле (12,11), полагая в ней нижний предел равным 0, а верхний a, находим среднее значение площадей

$$S_m=\frac{1}{a}\int_0^a x(a-x)\,dx=\frac{1}{a}\left(\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a=\frac{1}{a}\left(\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{a}\cdot\frac{a^3}{6}=\frac{a^2}{6}.$$

Итак, $S_m=\frac{a^2}{6}$ см^2.

Задача 12,15 (для самостоятельного решения).

Чему равно среднее значение обратных величин всех вещественных чисел, лежащих между a и b $(a<b)$? Рассмотреть частный случай: $b=2a$.

Указание. Обозначить обратную величину вещественного числа через $\frac{1}{x}$, а искомую — через m.

Ответ. $m=\frac{1}{b-a}\ln\frac{b}{a}$. При $b=2a$:$m=\frac{1}{a}\cdot 0{,}69315$ $(\ln 2=0{,}69315)$.

Задача 12,16 (для самостоятельного решения).

Если тело падает свободно вблизи поверхности земли без начальной скорости, то его скорость вычисляется по формуле $v=\sqrt{2gS}$, где S — путь, пройденный от начала падения. Найти среднюю скорость v_m на пути S_1, пройденном от начала падения.

Ответ. $v_m=\frac{1}{S_1}\int_0^{S_1}\sqrt{2gS}\,dS$; $v_m=\frac{2}{3}v_1$, где $v_1 = \sqrt{2gS_1}$ — скорость в момент, когда пройденный путь равен S_1.

Задача 12,17 (для самостоятельного решения).

Найти среднюю длину ρ_m радиусов кривизны одной арки циклоиды.

Уравнение циклоиды

$$x = a(t - \sin t); \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Указание. Радиус кривизны циклоиды равен $4a\left|\sin\frac{t}{2}\right|$ (см. И. А. Каплан. «Практические занятия по высшей математике», ч. II, стр. 291, формула (36,27).

Ответ. $\rho_m = \frac{2a}{\pi}$.

Задача 12,18. В динамомашине электродвижущая сила переменного тока выражается формулой

$$E = E_0 \sin\frac{2\pi t}{T},$$

где T — продолжительность периода в *сек*;

E_0 — максимальное значение (амплитуда) электродвижущей силы.

Определить среднее значение E_m электродвижущей силы и среднее значение ее квадрата $(E^2)_m$ в течение одного полупериода от $t = 0$ до $t = \frac{T}{2}$.

Ответ. 1) $E_m = 0{,}6366E_0$; 2) $(E^2)_m = \frac{E_0^2}{2}$.

ТРИНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ[1]

Содержание: Несобственные интегралы по бесконечному интервалу и от разрывных функций. Принцип сравнения несобственных интегралов с положительными подынтегральными функциями.

Краткие сведения из теории

Определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ во всем предыдущем рассматривался при следующих предположениях: 1) отрезок $[a, b]$ интегрирования конечен и 2) подынтегральная функция на этом отрезке непрерывна. При таких предположениях этот интеграл называется интегралом в «собственном смысле», или «собственным» интегралом. В том же случае, когда отрезок интегрирования бесконечен или

[1] Без ущерба для последующего задачи этого практического занятия могут решаться после шестнадцатого практического занятия.