Государственный университет–Высшая школа экономики
Факультет бизнес информатики
Программа курса математического анализа (2011-2012)

Министерство экономического развития и торговли Российской Федерации	Министерство образования Российской Федерации

Государственный университет -
Высшая школа экономики

Факультет бизнес-информатики
Программа курса «Математический анализ»
для направления «Бизнес-информатика»
(вторая ступень высшего профессионального образования – бакалавриат)

Рекомендована секцией УМС Математические и статистические методы в экономике	*Одобрена на заседании кафедры высшей математики на факультете экономики*
Председатель	Зав. кафедрой
___________А.С.Шведов	___________Ф.Т.Алескеров
“___” __________ 2010 г.	“___” __________ 2011 __г.

Утверждена УС
____

Ученый секретарь

____
“___” __________ 2010 г.

Москва

Тематический план учебной дисциплины

№	Название темы	Всего часов	Аудиторные часы		Самостоятельная работа
			Лекции	Сем. и практ. Занятия	
1	**1 курс, 1 модуль** Теория пределов и непрерывных функций одной переменной.	56	14	14	28
2	**1 курс, 2 модуль** Дифференциальное исчисление для функций одной переменной	60	14	14	32
3	**1 курс, 3 модуль** Дифференциальное исчисление для функций многих переменных.	70	20	20	30
4	**1 курс, 4модуль** Интегральное исчисление для функций одной переменной. Двойные интегралы.	70	20	20	30
5	**2курс, 1 модуль** Обыкновенные дифференциальные уравнения.	64	16	16	32

Формы рубежного контроля

В каждом модуле предусмотрены или контрольная работа, или большое домашнее задание. Во втором модуле 1 курса запланирована зачетная работа, а в четвертом – экзаменационная. В 1 модуле второго курса запланирована экзаменационная работа.

Автор: д.ф.-м.н., профессор А.А.Быков.

Базовые учебники

1. [МАВЗ] Математический анализ в вопросах и задачах, В.Ф.Бутузов, Н.Ч.Крутицкая, Г.Н.Медведев, А.А.Шишкин, 5 изд., М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 480с.
2. [ЗУМА] Задачи и упражнения по математическому анализу, И.А.Виноградова, С.Н.Олехник, А.А.Садовничий, изд-во МГУ, 1988.: – 416с.
3. *Романко В.К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления.– М.-С.Пб.: Физматлит, 2001.
4. *Романко В.К.*. Разностные уравнения – М.-С.Пб.: Физматлит, 2006.
5. *Романко В.К.*. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению *под редакцией* – М.-С.Пб.: Физматлит, 2002.
6. [Ф] *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 2000.

Дополнительная литература

7. [KL–1] W.Kaplan, D.Lewis. Calculus and linear algebra, Vol.1. University of Michigan, 2007.
8. [KL–2] W.Kaplan, D.Lewis. Calculus and linear algebra, Vol.2. University of Michigan, 2007.
9. [Stewart] J.Stewart. Calculus. University of Toronto, Brooks/Cole, 2008, 7-th.ed.
10. [Apostol-1] T.Apostol. Calculus, Vol.1. John Wiley, 1967, 7-th.ed.
11. [Apostol-2] T.Apostol. Calculus, Vol.2. John Wiley, 1969, 7-th.ed.
12. [Кудрявцев–1] Математический анализ в двух томах, том 1. 571 с.
13. [Кудрявцев–2] Математический анализ в двух томах, том 2. 409 с.
14. [Ильин, Позняк–1] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч.I, М.: Наука, 1999.
15. [Ильин, Позняк–2] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч.II, М.: Наука, 1999.
16. [Кудрявцев–К] Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. М.: Наука, 1989.
17. [Демидович] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1999.
18. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.

Государственный университет–Высшая школа экономики
Факультет бизнес информатики
Программа курса математического анализа (2011-2012)

Содержание

Модуль 1 (8 лекций, 8 семинаров, 32 часа)

Продолжительность каждого занятия составляет 2 академических часа, т.е. 80 минут. В название лекции вынесена только основная тема данной лекции.

Лекция k1-m1-01. Предел функции одной переменной.

1.1. Предел функции одной переменной.

1.1.1. Стандартные числовые множества.

Геометрическое изображение вещественных чисел точками на координатной прямой. Стандартные числовые множества: интервал, сегмент (отрезок), промежуток, полупрямая, числовая прямая. Окрестность точки, проколотая окрестность.
[KL–1] Ch. 1, pp.1–45.

1.1.2. Понятие функции одной переменной.

Понятие функции. Область определения, множество значений. График функции одной переменной. Четные и нечетные функции. Периодические функции. Графики элементарных функций. Преобразование графиков функций, сдвиг, отражение, растяжение.

1.1.3. Правила записи логических формул.

Символы $\forall$, $\exists$.

1.1.4. Ограниченные и неограниченные функции.

Определение ограниченной и неограниченной функции на множестве. Символ $O(1)$ при $x \in X$ (ограниченная функция на множестве X). Символ $O(1)$ в окрестности точки $x = a$ (локально ограниченная функция в окрестности точки $x = a$). Теоремы об ограниченности суммы, разности, произведения двух ограниченных функций.

1.1.5. Предел функции в точке.

Определение предела функции в точке по Коши (на языке логических формул). Геометрическая интерпретация предела функции. Пример прямого доказательства существования предела, $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 8$. Теорема о локальной ограниченности функции, имеющей предел. Методика вычисления пределов элементарных функций. Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+6}$, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+7}-3}$.

1.1.6. Односторонние пределы.

Определение одностороннего предела. Теоремы о связи существования и равенства односторонних пределов и существования предела функции в точке. Примеры вычисления односторонних пределов типа $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{x-2}{|x-2|}$, $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{x-2}{|x-2|}$. Предел функции при $x \to +0$, $x \to -0$.

1.1.7. Предел в бесконечно удаленной точке.

Определение предела функции при $x \to +\infty$ (по Коши). ●Определение предела функции при $x \to -\infty$. Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+6}$.

Читать:

[МАВЗ] Глава III, §1, 2, стр. 40-52.
[ЗУМА] Глава II, §1, стр. 48-66.
[KL–1] Ch. 2, pp.84–138.

1.1.8. Содержание семинара 1, пределы.

1. Правила записи логических формул.
2. Доказательство простейших теорем.
3. Прямое доказательстве существования предела, задачи типа $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 8$.
4. Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 6}$.
5. Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x - 2}{\sqrt{x+7} - 3}$.
6. Вычисление односторонних пределов типа $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{x}{|x|}$, $\lim\limits_{x\to 2-0} \dfrac{x-2}{|x-2|}$.

Лекция k1-m1-02. Сравнение бесконечно малых функций.

1.1.9. Бесконечно малые функции.

Определение бесконечно малой функции. Обозначение $o(1)$. Теорема о представлении функции, имеющей предел, в виде суммы константы и бесконечно малой функции. Арифметические операции над бесконечно малыми функциями: сумма, $o(1)+o(1)=o(1)$, разность, $o(1)-o(1)=o(1)$, произведение, $o(1)\cdot o(1)=o(1)$. Понятие неопределенности типа $\frac{0}{0}$. Теорема об ограниченности суммы бесконечно малой функции и ограниченной функции в точке, $o(1)+O(1)=O(1)$. Теорема о произведении бесконечно малой функции и ограниченной функции в точке, $o(1)\cdot O(1)=o(1)$.

1.1.10. Теоремы о пределах функций.

Теоремы о пределе суммы двух функций, о пределе разности, о пределе произведения и о пределе частного. Теорема о предельном переходе в неравенствах (без доказательства).

1.1.11. Бесконечно большие функции.

Определение бесконечно большой положительной функции в точке. Определение бесконечно большой отрицательной функции в точке. Соотношение понятий бесконечно малой функции и бесконечно большой функции. Соотношение понятий бесконечно большой функции и неограниченной функции. Арифметические операции над бесконечно большими функциями: сумма, произведение. Понятие неопределенности типа $+\infty-\infty$. Бесконечно большие функции при $x\to+\infty$. Бесконечно большие функции при $x\to-\infty$.

1.1.12. Сравнение бесконечно малых функций.

Определение $f(x)=o(x)$ при $x\to 0$. Определение $f(x)=o(x^n)$ при $x\to 0$. Определение $f(x)=o(x^{-1})$ при $x\to+\infty$. Определение $f(x)=o(x^{-n})$ при $x\to+\infty$. Примеры применения, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}=\dfrac{1}{3}$, вывод асимптотических формул, $\sqrt{1+x}=1+\dfrac{x}{2}+o(x)$, $\sqrt[3]{1+x}=1+\dfrac{x}{3}+o(x)$ при $x\to 0$.

Читать:
[МАВЗ] Глава III, §3, стр. 52-58.

[ЗУМА] Глава II, §1, стр. 48-66.
[KL–1] Ch. 2, pp.84–138.

1.1.13. Техника вычисления пределов иррациональных функций.

Применение асимптотических формул $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$, $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} + o(x)$.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$.

Применение асимптотической формулы $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - (1 + x/2)}{x^2}$.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right)$, .

1.1.14. Содержание семинара 2, бесконечно малые функции.

1. Правила записи логических формул.
2. Доказательство простейших теорем.
3. Раскрытие неопределенностей типа $+\infty - \infty$.
4. Вычисление пределов с помощью асимптотических формул.

Лекция k1-m1-03. Первый и второй замечательные пределы.

1.1.15. Первый замечательный предел.

Формула, выражающая первый замечательный предел. Геометрическая интерпретация. Асимптотические формулы $\sin = x + o(x)$, $\sin = x + o(x^2)$ при $x \to 0$.

Асимптотические формулы $\cos = 1 + o(1)$, $\cos = 1 + o(x)$, $\cos = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ при $x \to 0$.

Асимптотические формулы $\operatorname{tg} = x + o(x^2)$, $\operatorname{tg} = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$ при $x \to 0$.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x - \sin \beta x}{x}$.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(\alpha + x) - \sin a}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(\alpha + x) - \cos a}{x}$.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(a+x) - 2\sin a + \sin(a-x)}{x^2}$.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x - 2\sin 2x + \sin x}{x^3}$.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x^2}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha x}{\operatorname{tg} \beta x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(a+x) - 2\operatorname{tg} a + \operatorname{tg}(x-a)}{x^2}$.

Читать:
[МАВЗ] Глава III, §4, стр. 58-65.
[ЗУМА] Глава II, §1, стр. 77-80.
[KL–1] Ch. 2, pp.84–138.

1.1.16. Теорема о пределе монотонной функции.

Теорема о пределе монотонной ограниченной на интервале функции. Теорема о пределе монотонной ограниченной на полупрямой функции.

1.1.17. Второй замечательный предел.

Формула, выражающая второй замечательный предел. Число e.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 0}(1+\alpha x)^{\frac{\beta}{x}}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Асимптотические формулы $\ln(1+x)=o(1)$, $\ln(1+x)=x+o(x)$, применение для решения задач, $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$ при $x\to 0$ и аналогичные.

Асимптотические формулы $e^x=1+o(1)$, $e^x=1+x+o(x)$, $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$ при $x\to 0$ и аналогичные и их применение для решения задач.
Вычисление пределов, включающих тригонометрические и иррациональные функции.

Читать:
[МАВЗ] Глава III, §4, стр. 58-65.
[ЗУМА] Глава II, §1, стр. 77-80.
[KL–1] Ch. 2, pp.84–138.

1.1.18. Содержание семинара 3, первый и второй замечательные пределы.

1. Тригонометрические пределы.
2. Пределы с показательной функцией.

Лекция k1-m1-04. Непрерывные функции и обратная функция.

1.1.19. Непрерывные функции одной переменной.

Непрерывность функции одной переменной в точке. Односторонняя непрерывность справа и слева, связь с непрерывностью в точке. Арифметические операции над непрерывными функциями. Непрерывность основных элементарных функций.

1.1.20. Классификация точек разрыва.

Точки разрыва устранимые, первого рода, второго рода. Примеры.

1.1.21. Сложная функция.

Понятие сложной функции. Теорема о непрерывности сложной функции. Непрерывность многочлена и дробно-рациональной функции.

1.1.22. Обратная функция.

Понятие обратной функции. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции (только для монотонной функции, без доказательства). Непрерывность обратных тригонометрических функций. Непрерывность показательной и логарифмической функции. Графики.

Читать:
[МАВЗ] Глава I, §2, стр. 48-52.
[ЗУМА] Глава I, §2, 3, стр. 14-20.
[KL–1] Ch. 2, pp.84–138.

1.1.23. Содержание семинара 4, непрерывные функции.

1. Классификация точек разрыва.
2. Построение графиков композиции элементарных функций с помощью птнятия предела и основных свойств, без использования производной.

Лекция k1-m1-05. Производные и касательная.

1.2. Производная и дифференциал функции одной переменной.

1.2.1. Производная функции одной переменной.

Определение производной функции, ее геометрический, физический и экономический смысл. Таблица производных элементарных функций. Односторонние производные. Теорема о связи существования и равенства односторонних производных и производной функции в точке.

1.2.2. Вычисление производной.

Правила (теоремы) вычисления производной суммы, произведения и частного от деления двух функций. Производная обратной функции (без доказательства). Теорема о производной сложной функции. Производная степенной и показательной функций. Теорема о производной обратной функции и ее геометрическая интерпретация. Теорема о производной сложной функции.

1.2.3. Уравнение касательной.

Понятие, определение и уравнение касательной.

1.2.4. Производные высших порядков.

Понятие второй производной. Понятие и уравнение соприкасающейся параболы. Понятие и уравнение соприкасающейся окружности. Определение производной n-го порядка. Правила вычисления производной суммы и произведения (теорема). Формула Лейбница для n-й производной произведения двух функций (теорема).

1.2.5. Вычисление старших производных.

Старшие производные степенной и показательной функций. Старшие производные логарифмической функции. Старшие производные тригонометрических функций. Старшие производные функций типа xe^x, x^2e^x. Рекуррентные методы.

Читать:
[МАВЗ] Глава IV, §1, стр. 65-74.
[ЗУМА] Глава III, §1, стр. 89-100.
[KL–1] Ch. 3, pp.139–235.

1.2.6. Содержание семинара 5, вычисление производной.

1. Производные степенных функций.
2. Производные иррациональных функций.
3. Производные тригонометрических функций.
4. Производная показательной функции.
5. Производная логарифмической функции.
6. Производная сложной функции.
7. Производная обратной функции.

Лекция k1-m1-06. Дифференциал и старшие дифференциалы.

1.2.7. Дифференциал функции одной переменной.

Определение дифференциала функции в точке. Определение дифференцируемой функции в точке. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости (теорема). Геометрический смысл дифференциала. Теорема о непрерывности дифференцируемой функции в точке.

1.2.8. Вычисление дифференциала функции одной переменной.

Правила вычисления дифференциала суммы, разности, произведения и частного двух функций (теорема). Вычисление первого дифференциала сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала.

1.2.9. Дифференциалы высших порядков.

Понятие дифференциала второго порядка. Понятие дифференциала n-го порядка. Дифференциал второго порядка сложной функции.

1.2.10. Приближенные вычисления с помощью дифференциалов.

Понятие формулы Тейлора и применение для приближенных вычислений. Использование первого дифференциала для приближенных вычислений. Использование второго дифференциала для приближенных вычислений.

Читать:
[МАВЗ] Глава IV, §2, 3, стр. 77-85.
[ЗУМА] Глава III, §2, стр. 101-103.
[KL–1] Ch. 3, pp. 139–235.

1.2.11. Содержание семинара 6, вычисление дифференциала.

1. Производные старших порядков.
2. Вычисление первого дифференциала.

Лекция k1-m1-07. Теоремы о непрерывных и дифференцируемых функциях.

1.3. Теоремы о непрерывных и дифференцируемых функциях.

1.3.1. Теоремы об ограниченности непрерывных функций.

Теоремы о локальной ограниченности и об устойчивости знака непрерывной функции в точке. Ограниченность непрерывной на сегменте функции (первая теорема Вейерштрасса).

1.3.2. Теоремы о корнях непрерывной функции.

Теорема о прохождении непрерывной на сегменте функции через любое промежуточное значение. Теорема о существовании корня непрерывной функции, принимающей значения разных знаков на концах сегмента.

1.3.3. Возрастание и убывание функции в точке.

Возрастание и убывание функции в точке. Достаточные условия возрастания функции в точке. Пример, показывающий, что положительность производной в точке не является необходимым условием возрастания функции в этой точке.

1.3.4. Формула конечных приращений.

Теорема Ролля и ее геометрическая интерпретация. Теорема Лагранжа, ее геометрический и экономический смысл. Следствия из теоремы Лагранжа: условие постоянства функции на промежутке, признак монотонности функции на промежутке. Исследование возрастания и убывания функции. Формула Коши.

Читать:
[МАВЗ] Глава VI, §1, 3, стр. 108-111, 116-121.
[ЗУМА] Глава III, §3, стр. 110-113.
[KL–1] Ch. 3, pp. 139–235.

1.3.5. Содержание семинара 7, формулы Лагранжа и Коши.

1. Вычисление дифференциалов старших порядков.
2. Применение формулы Лагранжа.
3. Применение формулы Коши.

Лекция k1-m1-08. Приложения дифференциального исчисления.

2. Модуль 2 (7 лекций, 7 семинаров, 28 часов)

Лекция k1-m2-01. Локальный экстремум.

2.1. Локальный экстремум.

2.1.1. Локальный экстремум.

Понятие локального экстремума функции. Необходимое условие локального экстремума дифференцируемой функции (теорема). Достаточное условие локального экстремума непрерывной дифференцируемой функции (теорема). Достаточное условие локального экстремума дважды дифференцируемой функции (теорема). Исследование локального экстремума.

Читать:
[МАВЗ] Глава VI, §3, стр. 116-121.
[ЗУМА] Глава III, §3, стр. 110-113.
[KL–1] Ch. 6, pp. 214–219.

Лекция k1-m2-02. Правило Лопиталя.

2.1.2. Правило Лопиталя.

Правило Лопиталя: раскрытие неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ (теорема).

Правило Лопиталя для случая, когда $x \to +\infty$ (теорема без доказательства).

Правило Лопиталя для неопределенности типа $\frac{\infty}{\infty}$ (теорема без доказательства).

Вычисление пределов с помощью однократного применения правила Лопиталя.
Вычисление пределов с помощью многократного применения правила Лопиталя.

Читать:
[МАВЗ] Глава VI, §4, стр. 122-125.
[ЗУМА] Глава III, §3, стр. 113-117.
[KL–1] Ch. 3, pp.139–235. [KL–1] Ch. 6, pp. 386–469.

Лекция k1-m2-03. Формула Тейлора

2.1.3. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Многочлен Тейлора. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (теорема без доказательства). Формула Маклорена. Разложение по формуле Тейлора элементарных функций.

2.1.4. Асимптотические формулы.

Понятие асимптотической формулы. Вывод и применение формул

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^4\right),\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o\left(x^3\right),\ \operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^4\right),\ \sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} + o(x),$$

$$\ln x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right),\ e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + o\left(x^2\right),\ \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o\left(x^2\right),$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o\left(x^2\right),\ \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o\left(x^5\right),\ \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{5} + o\left(x^5\right)$$

и аналогичных для вычисления пределов.

2.1.5. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Остаточный член в форме Лагранжа (теорема без доказательства). Методика оценки остаточного члена формулы Тейлора в форме Лагранжа. Вычисление наибольшего слагаемого многочлена Тейлора. Приближенное вычисление значения функции. Вычисление сложных процентов с высокой точностью.

Читать:
[МАВЗ] Глава VI, §5, стр. 125-130.
[ЗУМА] Глава III, §3, стр. 113-117.
[KL–1] Ch. 6, pp. 386–470.

Лекция k1-m2-04. Числовые последовательности.

2.2. Числовые последовательности.

2.2.1. Предел последовательности.

Понятие числовой последовательности. Ограниченные и неограниченные числовые последовательности. Определение предела последовательности. Ограниченность сходящейся последовательности (теорема). Определение бесконечно малой последовательности. Взаимосвязь бесконечно малых и сходящихся последовательностей (теорема). Арифметические операции с бесконечно малыми последовательностями (теоремы). Определение бесконечно большой последовательности. Арифметические операции с бесконечно большими последовательностями (теоремы). Теоремы о взаимосвязи между бесконечно малыми и бесконечно большими последовательностями.

2.2.2. Свойства сходящихся последовательностей.

Арифметические операции, предельный переход в неравенствах (теорема без доказательства). Понятие о неопределенностях типа $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$. Другие типы неопределенностей, примеры. Исследование неопределенностей методом Лопиталя. Исследование неопределенностей методом асимптотических формул. Вычисление пределов выражений, содержащих радикалы. Понятие и определение монотонной последовательности. Необходимое и достаточное условие сходимости монотонной последовательности (теорема без доказательства).

2.2.3. Эталонные последовательности.

Второй замечательный предел для последовательностей. Число e. Вычисление пределов типа $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{\beta n}$. Эталонные последовательности: $\sqrt[n]{b}$, $\log_a n$, n^β, b^n, $n!$, n^n. Предел $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b}$ при $\beta>0$. Предел $\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n^\beta}$ при $\beta>0$, $a>1$. Предел $\lim_{n\to\infty}\frac{n^\beta}{b^n}$ при $b>1$. Предел $\lim_{n\to\infty}\frac{b^n}{n!}$. Предел $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$.

2.2.4. Предельные точки числовой последовательности.

Понятие подпоследовательности числовой последовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса: из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность (без доказательства). Два эквивалентных определения предельной точки числовой последовательности. Свойства множества всех предельных точек ограниченной последовательности. Верхний и нижний пределы последовательности. Соотношение множества всех верхних граней, точной верхней грани, верхнего предела (теорема без доказательства). Верхний и нижний пределы неограниченных последовательностей.

2.2.5. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши.

Фундаментальная последовательность. Ограниченность фундаментальной последовательности. Критерий Коши сходимости числовых последовательностей (теорема без доказательства). Критерий Коши предела функции в точке (теорема без доказательства). Определение предела по Гейне (на основе понятия предела последовательности. Теорема об эквивалентности двух определений предела функции (без доказательства).

Читать:
[МАВЗ] Глава II, §1-5, стр. 16-33.
[ЗУМА] Глава II, §2, стр. 67-70.
[KL–1] Ch.2.

Лекция k1-m2-05. Исследование и построение графиков функций, заданных явным образом.

2.3. Исследование и построение графиков функций, заданных явным образом.

2.3.1. Классификация точек разрыва.

Точки непрерывности и точки разрыва функций. Классификация точек разрыва: точки устранимого разрыва, точки разрыва 1 рода, точки разрыва 2 рода.

2.3.2. Асимптоты графика функции.

Вертикальные и наклонные асимптоты графика функции. Необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты.

2.3.3. Возрастание и убывание функции.

Возрастание и убывание функции. Отыскание промежутков монотонности с помощью производной.

2.3.4. Локальный экстремум функции одной переменной.

Понятие локального экстремума. Точки возможного экстремума функции.

Достаточные условия локального экстремума, основанные на исследовании первых и вторых производных (теоремы).

Читать:
[МАВЗ] Глава VIII, §1, стр. 130-136.
[ЗУМА] Глава III, §3, стр. 117-122.
[KL–1] Ch. 6, pp.386–469.

Лекция k1-m2-06. Выпуклость и точки перегиба.

2.3.5. Выпуклость графика функции.

Понятие и определение направления выпуклости графика функции на данном интервале. Теорема о достаточном условии выпуклости вниз (вверх) графика функции на данном интервале (без доказательства). Геометрическая интерпретация этой теоремы.

2.3.6. Точки перегиба графика функции.

Определение точек перегиба графика функции. Необходимое условие перегиба графика дважды дифференцируемой функции (теоремы без доказательства). Пример, показывающий, что условие не является достаточным условием перегиба дважды дифференцируемой функции. Точки возможного перегиба графика функции. Различные формы достаточных условий перегиба, использующие первые, вторые, третьи производные (теоремы без доказательства).

Читать:
[МАВЗ] Глава VIII, §1, стр. 130-136.
[ЗУМА] Глава III, §3, стр. 117-122.
[KL–1] Ch. 6, pp.386–469.

Лекция k1-m2-07. Графики параметрических функций.

2.4. Построение графиков функций, заданных параметрически.

2.4.1. Асимптоты графика параметрической функции.

Вертикальные и наклонные асимптоты графика функции. ■Необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты (теорема).

2.4.2. Возрастание и убывание параметрической функции.

Возрастание и убывание функции. Отыскание промежутков монотонности функции методом исследования знака первой производной.

2.4.3. Локальный экстремум параметрической функции.

Точки возможного экстремума функции. Достаточные условия локального экстремума, основанные на исследовании первых и вторых производных (теоремы без доказательства).

2.4.4. Выпуклость графика параметрической функции.

Теорема о достаточном условии выпуклости вниз (вверх) графика функции на данном интервале (без доказательства). Геометрическая интерпретация этой теоремы.

2.4.5. Точки перегиба графика функции.

Необходимое условие перегиба графика дважды дифференцируемой функции (теорема без доказательства). Пример, показывающий, что условие не является достаточным условием перегиба дважды дифференцируемой функции. Точки возможного перегиба графика функции. Различные формы достаточных условий перегиба, использующие первые, вторые, третьи производные (теоремы без доказательства).

2.4.6. Исследование и построение графиков функций, заданных параметрически.

Общая схема исследования функции и построение графика. Примеры исследования по этой схеме.
Читать:
[МАВЗ] Глава VIII, §2, стр. 137-142.
[ЗУМА] Глава III, §3, стр. 117-122.
[KL–1] Ch. 6, pp.386–469.

Лекция k1-m2-08. Приложения дифференциального исчисления.

3. Модуль 3 (10 лекций, 10 семинаров, 40 часов)

Лекция k1-m3-01. Множества точек в пространстве.

3.1. Множества и последовательности точек в m-мерном пространстве.

3.1.1. Понятие m-мерного пространства.

Евклидово m-мерное пространство. Шар, сфера, параллелепипед. Окрестность точки, проколотая окрестность. Шаровая, прямоугольная и кубическая окрестности. Ограниченные и неограниченные последовательности точек. Бесконечно большая последовательность. Предел последовательности. Предельные точки. Связь между сходимостью последовательности точек и покоординатной сходимостью.

3.1.2. Открытые, замкнутые, выпуклые множества точек.

Внутренние и граничные точки множества, предельные точки, изолированные точки.
Открытые и замкнутые множества на плоскости и в пространстве.
Ограниченные и неограниченные множества на плоскости и в пространстве.
Связные и несвязные множества.
Замыкание множества.
Выпуклые и невыпуклые множества в пространстве.
Выпуклая оболочка множества точек на плоскости.
Читать:
[МАВЗ] Глава X, §1, 2, стр. 191-204.
[ЗУМА] Глава III, §1, стр. 286-291.
[Кудрявцев, том 1] Глава 2, §18, стр. 247-265.

Лекция k1-m3-02. Предел функции нескольких переменных.

3.2. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.

3.2.1. Предел функции нескольких переменных.

Понятие функции нескольких переменных (ФНП).
Способы визуализации. Карта линий равного уровня.
Два определения предела функции в точке (по Коши и по Гейне), их эквивалентность.
Бесконечно малые функции в точке.
Предел функции в бесконечно удаленной точке.
Арифметические операции над функциями, имеющими предел в данной точке.
Повторные пределы.
Предел вдоль кривой.

3.2.2. Непрерывные функции нескольких переменных.

Непрерывность функции нескольких переменных по совокупности переменных и по каждой переменной, связь между ними.
Теорема об арифметических операциях над непрерывными функциями.
Понятие сложной функции. Теорема о непрерывности сложной функции.
Читать:
[МАВЗ] Глава X, §3, 4, стр. 205-212.
[ЗУМА] Глава III, §1, стр. 286-291.
[Кудрявцев, том 1] Глава 2, §19, стр. 265-275.

3.2.3. Свойства непрерывных функций.

Ограниченность непрерывной функции, достижение непрерывной функцией своего максимального и минимального значений.
Читать:
[Кудрявцев, том 1] Глава 2, §19, стр. 273-276.

Лекция k1-m3-03. Дифференцируемые функции нескольких переменных.

3.3. Дифференцирование функции нескольких переменных.

3.3.1. Частные производные. Дифференциал.

Частные производные ФНП. Геометрический смысл частной производной.
Определение дифференцируемой ФНП. Дифференциал функции нескольких переменных.
Связь между дифференцируемостью и существованием частных производных.
Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции в точке.
Необходимое условие дифференцируемости функции в точке.
Теорема о достаточных условиях дифференцируемости функции (без доказательства).
Формулы для вычисления дифференциала суммы, разности, произведения и частного двух функций.

3.3.2. Касательная плоскость.

Определение касательной плоскости. Существование касательной плоскости у графика дифференцируемой функции двух переменных.

Уравнение касательной плоскости.
Геометрический смысл дифференцируемости функции двух переменных.

3.3.3. Дифференцирование сложной функции нескольких переменных.

Понятие сложной функции.
Частные производные и дифференцируемость сложной функции.
Дифференциал сложной функции.
Инвариантность формы первого дифференциала.

3.3.4. Градиент и производная по направлению.

Понятие производной по направлению и градиента.
Направление градиента и направление линии равного уровня дифференцируемой функции в заданной точке. Геометрический смысл градиента функции в точке.
Теорема о существовании производной по направлению дифференцируемой ФНП.
Линии и поверхности уровня.
Теорема Эйлера об однородных функциях.

Лекция k1-m3-04. Формула Тейлора.

3.3.5. Векторные функции многих переменных

Понятие векторной функции многих переменных.
Матрица Якоби и якобиан.
Дифференцирование сложных векторных функций.
Векторно-матричная форма записи первого дифференциала.
Отображения, задаваемые простейшими векторными функциями и их геометрическая интерпретация.
Функции размерности 2 и 3 от двух и трех переменных. Геометрическая интерпретация якобиана.
Понятия однозначного и однолистного отображения.
Читать:
[МАВЗ] Глава X, §4, стр. 213-224.
[ЗУМА] Глава III, §2, 3, стр. 291-302.
[Кудрявцев, том 1] Глава 2, §20, стр. 283-310.

3.3.6. Производные и дифференциалы высших порядков.

Частные производные высших порядков.
Достаточные условия равенства смешанных производных.
Дифференциал второго порядка. Дифференциалы высших порядков.
Неинвариантность формы второго дифференциала сложной функции.
Векторно-матричная форма записи первого и второго дифференциалов ФНП.
Матрица Гессе.
Читать:
[Кудрявцев, том 1] Глава 2, §20, стр. 310-317.

3.4. Формула Тейлора.

3.4.1. Формула Тейлора.

Многочлен Тейлора. Формула Тейлора. Остаточный член.
Остаточный член в форме Пеано.

Остаточный член в форме Лагранжа.
Методика оценки остаточного члена для функции с ограниченными производными.
Геометрический смысл формулы Тейлора с остаточным членом первого порядка.
Геометрический смысл формулы Тейлора с остаточным членом второго порядка.
Геометрический смысл формулы Тейлора с остаточным членом третьего порядка.
Приближенное вычисление значений функции.
Читать:
[МАВЗ] Глава X, §5, стр. 225-235.
[ЗУМА] Глава III, §4, стр. 303-309.
[Кудрявцев, том 2] Глава 5, §39, стр. 003-014.

Лекция k1-m3-05. Локальный экстремум.

3.5. Локальный экстремум.

3.5.1. Необходимое условие локального экстремума ФНП.

Понятие локального экстремума ФМП.
Необходимое условие локального экстремума дифференцируемой функции.

3.5.2. Достаточные условия локального экстремума ФНП.

Понятие квадратичной формы и ее матрицы.
Понятие знакоопределенной квадратичной формы.
Критерий Сильвестра.
Теорема о достаточном условии экстремума функции многих переменных.
Методика исследования локального экстремума.
Особенности графика и карты линий равного уровня дважды дифференцируемой функции в окрестности точки локального экстремума.
Выпуклые и строго выпуклые функции. Экстремум выпуклой функции.
Читать:
[МАВЗ] Глава X, §6, стр. 236-242.
[ЗУМА] Глава III, §8, стр. 336-351.
[Кудрявцев, том 2] Глава 5, §40, стр. 016-024.

Лекция k3-m3-06. Неявные функции-1.

3.6. Неявные функции.

3.6.1. Неявные функции, определяемые одним уравнением.

Понятие неявной функции.
Формула для производных неявной функции.
Теорема о существовании и непрерывности неявной функции, определяемой одним уравнением.
Теорема о дифференцируемой неявной функции, определяемой одним уравнением в точке.

3.6.2. Неявные функции, определяемые системой уравнений.

Вычисление частных производных неявных функций, определяемых системой уравнений.
Теорема о старших производных неявной функции, определяемой системой уравнений.

3.6.3. Экстремум неявной функции.

Теорема об экстремуме неявной функции, определяемой одним уравнением и определяемой системой уравнений.
Экономические приложения неявных функций.
Читать:
[МАВЗ] Глава XI, §1, стр. 243-256.
[ЗУМА] Глава III, §5, стр. 310-319.
[Кудрявцев, том 2] Глава 5, §41, стр. 025-030.

Лекция k1-m3-07. Условный экстремум-1.

3.7. Условный экстремум-1.

3.7.1. Понятие условного экстремума.

Понятие условного экстремума.
Необходимое условие условного экстремума.
Метод исключения переменных: сведение задачи об условном экстремуме к задаче о безусловном экстремуме.

3.7.2. Метод Лагранжа.

Метод Лагранжа и его геометрическая интерпретация.
Необходимые условия условного экстремума в форме Лагранжа.
Достаточные условия условного экстремума в форме Лагранжа.
Метод окаймленного гессиана, исследование достаточных условий условного экстремума.
Экономические приложения условного экстремума.
Читать:
[МАВЗ] Глава XI, §3, стр. 261-269.
[ЗУМА] Глава III, §8, стр. 326-350.
[Кудрявцев, том 2] Глава 5, §43, стр. 064-073.

Лекция k1-m3-08. Неявные функции-2.

3.8. Неявные функции, определяемые системой уравнений.

3.8.1. Неявные функции, определяемые системой уравнений.

Вычисление частных производных неявных функций, определяемых системой уравнений.
Теорема о старших производных неявной функции, определяемой системой уравнений.

3.8.2. Экстремум неявной функции, определяемой системой уравнений.

Теорема об экстремуме неявной функции, определяемой системой уравнений.
Методика расчета точек возможного экстремума и проверка достаточных условий.
Читать:
[МАВЗ] Глава XI, §1, стр. 243-256.
[ЗУМА] Глава III, §5, стр. 310-319.
[Кудрявцев, том 2] Глава 5, §41, стр. 030-037.

Лекция k1-m3-09. Условный экстремум-2.

3.9. Условный экстремум с несколькими условиями связи.

3.9.1. Метод Лагранжа с несколькими условиями связи.

Метод Лагранжа и его геометрическая интерпретация.
Необходимые условия условного экстремума в форме Лагранжа.
Достаточные условия условного экстремума в форме Лагранжа.
Метод окаймленного гессиана исследования достаточных условий условного экстремума.
Читать:
[МАВЗ] Глава XI, §3, стр. 261-269.
[ЗУМА] Глава III, §8, стр. 326-350.
[Кудрявцев, том 2] Глава 5, §43, стр. 064-073.

Лекция k1-m3-10. Экономические приложения ФНП.

4. Модуль 4 (10 лекций, 10 семинаров, 28 часов)

Лекция k1-m4-01. Неопределенный интеграл.

4.1. Неопределенный интеграл.

4.1.1. Первообразная и неопределенный интеграл.

Понятие первообразной функции одной переменной на промежутке.
Теорема о том, что любые две первообразных для данной функции отличаются на константу.
Неопределенный интеграл - совокупность всех первообразных заданной функции на заданном промежутке.
Основные свойства неопределенных интегралов.

4.1.2. Основные неопределенные интегралы.

Вычисление интегралов от простейших рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных, логарифмических функций.

4.1.3. Интегрирование методом замены переменной.

4.1.4. Интегрирование по частям.

Читать:
[МАВЗ] Глава V, §1, 2, стр. 87-96.
[ЗУМА] Часть 2, Глава I, §1, 2, стр. 174-181.

Лекция k1-m4-02. Методы интегрирования.

4.2. Методы интегрирования.

4.2.1. Интегрирование рациональных функций.

Понятие о рациональной функции. Выделение целой и дробной частей.
Деление многочленов столбиком.
Разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей.
Практические приемы нахождения коэффициентов разложения.
Четыре вида простейших дробей и их интегрирование.

4.2.2. Интегрирование иррациональных функций.

Различные приемы интегрирования иррациональных функций.
Универсальная подстановка, сведение к интегралу от рациональной функции.

4.2.3. Интегрирование тригонометрических функций.

Различные приемы интегрирования тригонометрических функций.
Универсальная тригонометрическая подстановка, сведение к интегралу от рациональной функции.

Читать:
[МАВЗ] Глава V, §3, 4, стр. 91-96.
[ЗУМА] Часть 2, Глава I, §3, 4, 5, стр. 182-208.

Лекция k1-m4-03. Определенный интеграл.

4.3. Определенный интеграл.

4.3.1. Понятие определенного интеграла.

Определенный интеграл как обобщение понятия площади плоской фигуры.
Определенный интеграл как предел интегральных сумм.
Пример ограниченной неинтегрируемой функции.
Верхняя и нижняя интегральные суммы и их геометрическая интерпретация.
Необходимое и достаточное условие интегрируемости ограниченной функции на сегменте.
Некоторые классы интегрируемых на сегменте функций: непрерывные функции, кусочно-непрерывные функции, монотонные ограниченные функции.

4.3.2. Свойства определенного интеграла.

Формулы среднего значения.
Существование первообразной для непрерывной функции.
Формула Ньютона-Лейбница.

Читать:
[МАВЗ] Глава VIII, §5, стр. 167-171
[ЗУМА] Часть 2, Глава II, §1, стр. 236-246

Лекция k1-m4-04. Вычисление определенного интеграла.

4.4. Вычисление определенного интеграла.

4.4.1. Метод замены переменной.

Вычисление интегралов методом замены переменной.

4.4.2. Интегрирование по частям.

Интегрирование по частям. Двукратное интегрирование по частям. Вычисление интегралов типа $\int_a^b e^{ax}\sin bx\,dx$, $\int_a^b e^{ax}\cos bx\,dx$, $\int_a^b \sin(\ln x)\,dx$, $\int_a^b \cos(\ln x)\,dx$.

Читать:
[МАВЗ] Глава VIII, §5, стр. 167-171
[ЗУМА] Часть 2, Глава II, §1, стр. 236-246

Лекция k1-m4-05. Приложения определенного интеграла.

4.5. Приложения определенного интеграла.

4.5.1. Длина кривой.

Понятие длины плоской кривой. Вычисление длины кривой, заданной явным образом.
Вычисление длины плоской кривой, заданной параметрически.
Вычисление длины плоской кривой, заданной неявным образом.

4.5.2. Площадь фигуры.

Понятие площади плоской фигуры.
Вычисление площади плоской фигуры, заданной явным образом.
Вычисление площади плоской фигуры, заданной параметрически.
Вычисление площади плоской фигуры, заданной неявным образом.

4.5.3. Объем тела.

Понятие объема. Вычисление объема тела вращения, полученного вращением плоской фигуры, заданной явным образом. Вычисление объема тела вращения, полученного вращением плоской фигуры, заданной параметрически. Вычисление объема тела вращения, полученного вращением плоской фигуры, заданной неявным образом. Вычисление координат центра масс и момента инерции кривой, плоской фигуры, тела вращения.

Читать:
[МАВЗ] Глава VIII, §5, стр. 167-171
[ЗУМА] Часть 2, Глава II, §2, 3, стр. 246-265.

Лекция k1-m4-06. Кратные интегралы.

4.6. Кратные интегралы.

4.6.1. Двойной интеграл.

Понятие двойного интеграла и основные его свойства. Сведение двойного интеграла к повторному. Ортогональные координаты на плоскости. Полярные координаты. Замена переменных в двойном интеграле. Якобиан.

4.6.2. Тройной интеграл.

Понятие и свойства тройного интеграла. Сведение тройного интеграла к повторному. Ортогональные координаты в пространстве. Цилиндрические и сферические координаты. Замена переменных в тройном интеграле. Якобиан.

4.6.3. Приложения кратных интегралов.

Вычисление координаты центра масс, дисперсии.

Читать:
[МАВЗ] Глава XII, §1, 2, стр. 279-300.
[ЗУМА] Часть 2, Глава II, §2, 3, стр. 43-67.

Лекция k1-m4-07. Несобственные интегралы.

4.7. Несобственные интегралы.

4.7.1. Понятие и определение.

Понятие несобственного интеграла.

4.7.2. Эталонные интегралы.

4.7.3. Признаки сходимости.

4.7.4. Интегрирование по частям.

4.7.5. Замена переменной.

Лекция k1-m4-08. Приложения несобственных интегралов.

4.7.6. Вычисление средних значений.

4.7.7. Приложения к теории вероятностей.

Лекция k1-m4-09. Ряды.

4.7.8. Числовые ряды.

Понятие числового ряда.

4.7.9. Приложения к теории вероятностей.

Вычисление среднего значения дискретного распределения.
Вычисление дисперсии дискретного распределения.

Лекция k1-m4-10. Экономические приложения интеграла.

5. Курс 2, модуль 1 (7 лекций, 7 семинаров, 28 часов)

Лекция k2-m1-01. Дифференциальные уравнения первого порядка.

5.1. Уравнения первого порядка общего вида.

5.1.1. Понятие дифференциального уравнения.

1. Поле направлений на плоскости.

Читать: [Ф] §1, решить задачи 6, 12, 16.

Понятие дифференциального уравнения первого порядка.

Читать: [Ф] §1, решить задачи 7, 37, 38.

Понятие общего решения. Задача Коши.

Читать: [Ф] §2, решить задачи 56, 53.

2. Составление дифференциального уравнения параметрического семейства кривых.

Читать:[Ф] §1, решить задачи 18, 19, 22.

5.1.2. Примеры математических моделей, приводящих к дифференциальным и разностным уравнениям.

1. Модель Мальтуса, $\dot{x} = (1+\alpha)x$.
2. Модель Ферхюльста, $\dot{x} = k\left(1 - \dfrac{x}{M}\right)x$.
3. Модель Лоттки, $\begin{cases} \dot{x} = (\alpha - py)x, \\ \dot{y} = (-\beta + qx)y. \end{cases}$.
4. Уравнение истечение воды из резервуара переменного сечения.
5. Модель гидравлического удара. Уравнение Риккати.

Читать: [Ф] §3, решить задачи 74, 80, 84, 91.

5.1.3. Дифференциальные уравнения специального вида.

Уравнения с разделяющимися переменными.
Читать: [Ф] §2, решить задачи 51, 52, 55, 57, 58.
Однородные уравнения.
Читать: [Ф] §4, решить задачи 102, 105, 106, 108, 109.
Уравнения в полных дифференциалах.
Читать: [Ф] §6, решить задачи 186, 192.

1. Особые решения.

Читать: [Ф] §8, решить задачи 242, 247.

5.1.4. Уравнения, неразрешенные относительно производной.

Введение параметра.
Читать: [Ф] §8, решить задачи 267, 271, 277, 284.
Уравнения Лагранжа и Клеро.
Читать: [Ф] §8, решить задачи 287, 292.

Лекция k2-m1-02. Линейные уравнения первого порядка.

5.2. Однородные линейные уравнения.

5.2.1. Линейные уравнения первого порядка.

1. Линейное однородное уравнение первого порядка. Понятие общего решения. Принцип суперпозиции.
2. Линейное однородное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение.
3. Линейное однородное уравнение первого порядка с переменными коэффициентами. Общее решение.

5.3. Неоднородные линейные уравнения.

4. Линейное неоднородное уравнение первого порядка.
5. Метод вариации постоянной.

Читать: [Ф] §5, решить задачи 136, 139, 140, 145, 149.

6. Уравнение Бернулли.

Читать: [Ф] §5, решить задачи 151, 153, 154, 155, 156.

Лекция k2-m1-03. Уравнения старших порядков.

5.4. Уравнения старших порядков.

5.4.1. Уравнения старших порядков общего вида.

1. Метод понижения порядка.

Читать: [Ф] §10, решить задачи 421, 422, 423, 425, 429, 437, 455, 459.

5.4.2. Однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами.

1. Линейное однородное уравнение. Принцип суперпозиции.
2. Комплексные числа. Арифметические действия над комплексными числами. Модуль и аргумент числа. Тригонометрическая и экспоненциальная записи комплексного числа. Решение квадратных уравнений в комплексных числах.
3. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

4. Характеристические показатели и частные решения.
5. Общее решение линейного неоднородного уравнения.
6. Методы нахождения частных решений неоднородного уравнения.
7. Решение однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Читать: [Ф] §11, решить задачи 511, 517, 518, 527, 531.

5.4.3. Неоднородные линейные уравнения.

8. Решение дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида.

Читать: [Ф] §11, решить задачи 533, 534, 537, 538.

9. Решение неоднородных уравнений. Метод вариации постоянных.

Читать: [Ф] §11, решить задачи 575, 577.

10. Задача Коши.

Читать: [Ф] §11, решить задачи 582, 586.

11. Уравнения Эйлера.

Читать: [Ф] §11, решить задачи 589, 590, 592.

Лекция k2-m1-04. Однородные линейные системы.

5.5. Системы дифференциальных уравнений.

5.5.1. Линейная система общего вида.

1. Понятие системы. Примеры задач экономического содержания. Матрица системы.
2. Понятие решения системы.
3. Начальные значения. Задача Коши.
4. Общее решение линейной однородной системы. Принцип суперпозиции.
5. Общее решение линейной неоднородной системы.

Читать: [Ф] §14.

5.5.2. Однородные линейные системы с постоянными коэффициентами.

1. Характеристические показатели и частные решения.
2. Общее решение линейной однородной системы с постоянными коэффициентами.
3. Линейная однородная система с двумя неизвестными.

Читать: [Ф] §14, решить задачи 786, 789, 793, 794.

4. Линейная однородная система с тремя неизвестными.

Читать: [Ф] §14, решить задачи 796, 797, 800, 804.

5. Фундаментальная матрица решений, общее решение.

Лекция k2-m1-05. Неоднородные системы.

5.5.3. Неоднородные линейные системы.

1. Решение неоднородной системы с правой частью специального вида.

Читать: [Ф] §14, решить задачи 826, 829, 831, 834.

2. Метод вариации постоянных.

Читать: [Ф] §14, решить задачи 846, 847, 848.

3. Система в матричной форме.

Читать: [Ф] §14, решить задачи 851, 852, 855, 856.

Лекция k2-m1-06. Устойчивость точек покоя.

5.6. Устойчивость точек покоя.

1. Понятие точки покоя.

Читать: [Ф] §15, решить задачи 882, 883, 884.

2. Понятие устойчивой и неустойчивой точки покоя.

Читать: [Ф] §15, решить задачи 890, 891, 892.

3. Исследование устойчивости линейной системы с постоянными коэффициентами.
4. Классификация точек покоя.

Читать: [Ф] §16, решить задачи 961, 962, 963, 964, 965, 966.
Читать: [Ф] §16, решить задачи 971, 972, 973, 974, 975, 976.

5. Устойчивость по первому приближению.

Читать: [Ф] §15, решить задачи 899, 900, 905.

6. Метод Ляпунова.

Читать: [Ф] §15, решить задачи 923, 924.

7. Устойчивость точки покоя дифференциального уравнения.

Читать: [Ф] §15, решить задачи 932, 933.

5.7. Автономные нелинейные системы.

1. Общие понятия и свойства. Решение системы, фазовая траектория.

Читать: [Ф] §17, решить задачи 1001-1008.

2. Положения равновесия, циклы. Устойчивые и неустойчивые положения равновесия.

Читать: [Ф] §17, решить задачи 1021-1028.

3. Исследование нелинейных автономных систем вблизи положений равновесия по линейному приближению.
4. Приложения к исследованию экономических моделей.

Лекция k2-m1-07. Разностные уравнения и системы.

5.8. Разностные уравнения.

1. Примеры математических моделей в экономике, описываемых разностными уравнениями.
2. Разностные уравнения первого порядка. Решение уравнения, начальные условия, задача Коши.
3. Линейное уравнение первого порядка. Арифметическая и геометрическая прогрессии, метод вариации постоянной.
4. Разностные уравнения второго порядка. Решение уравнения, начальные значения.
5. Линейные разностные уравнения. Принцип суперпозиции и алгоритм построения общего решения линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами.
6. Структура общего решения линейного неоднородного уравнения. Методы нахождения частного решения линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами.

5.9. Разностные системы.

1. Системы линейных разностных уравнений. Матрица системы, решение системы, начальные условия.
2. Линейная однородная система. Принцип суперпозиции и фундаментальная матрица решений, общее решение.
3. Методы решения систем линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Критерии устойчивости нулевого решения линейной однородной системы.
4. Структура общего решения линейной неоднородной системы. Частные решения.

5. Количественный и качественный анализ нелинейных разностных уравнений.
6. Приложения к исследованию экономических моделей.

Лекция k2-m1-08. Линейные и нелинейные краевые задачи.

5.10. Линейные краевые задачи.

1. Понятие краевой задачи. Принцип суперпозиции.
3. Построение решения.
Читать: [Ф] §13, решить задачи 751, 752, 755. .
4. Функция Грина.
Читать: [Ф] §13, решить задачи 764, 765, 767. .