Правительство Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования

Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"

Факультет Бизнес-информатики

Программа дисциплины

Математический анализ

для направления «080500.62 Бизнес-информатика» подготовки бакалавров

Автор программы: **Быков Алексей Александрович**

Одобрена на заседании кафедры высшей математики на факультете экономики 29.08.2011 г.

Зав. кафедрой Алескеров Ф.Т.

Рекомендована секцией УМС [Введите название секции УМС] «___»____________ 20 г

Председатель [Введите И.О. Ф.]

Утверждена Ученым Советом факультета экономики «___»_____________20 г.

Ученый секретарь [Введите И.О. Ф.]

Москва, 2011

1 Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов Курс предназначен для студентов по направлению **080500.62 «Бизнес-информатика**» подготовки бакалавров, изучающих дисциплину «Математический анализ».

Программа разработана в соответствии с:

- Образовательным стандартом государственного образовательного бюджетного учреждения высшего профессионального образования «Государственный университет – Высшая школа экономики», в отношении которого установлена категория «Национальный исследовательский университет»;
- Рабочим учебным планом университета подготовки магистра по направлению 080500.62 «Бизнес-информатика» подготовки бакалавра, утвержденным в 2011 г.

2 Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Математический анализ» являются

- ознакомление студентов с основами математического анализа,
- формирование навыков работы с абстрактными понятиями высшей математики,
- знакомство с прикладными задачами дисциплины.

3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен:

- Знать основы математического анализа, необходимые для дальнейшего изучения последующих дисциплин, предусмотренных базовым и рабочим учебными планами;
- Уметь применять методы дисциплины для решения задач, возникающих в дисциплинах, использующих соответствующие методы;
- Владеть навыками применения современного инструментария дисциплины.

В результате освоения дисциплины студент осваивает следующие компетенции:

Компетенция	Код по ФГОС / НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
Общенаучная	ОНК-1	Способность к анализу и синтезу на основе системного подхода	Стандартные (лекционно-семинарские)
Общенаучная	ОНК-2	Способность перейти от проблемной ситуации к проблемам, задачам и лежащим в их основе противоречиям	Стандартные (лекционно-семинарские)
Общенаучная	ОНК-3	Способность использовать мето-	Стандартные (лекцион-

Компетенция	Код по ФГОС / НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
		ды критического анализа, развития научных теорий, опровержения и фальсификации, оценить качество исследований в некоторой предметной области	но-семинарские)
Общенаучная	ОНК-4	Готовность использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при работе в какой-либо предметной области	Стандартные (лекционно-семинарские)
Общенаучная	ОНК-5	Готовность выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь их для решения соответствующий аппарат дисциплины	Стандартные (лекционно-семинарские)
Общенаучная	ОНК-6	Способность приобретать новые знания с использованием научной методологии и современных образовательных и информационных технологий	Стандартные (лекционно-семинарские)
Общенаучная	ОНК-7	Способность порождать новые идеи (креативность)	Стандартные (лекционно-семинарские)
Инструментальные	ИК-2	Умение работать на компьютере, навыки использования основных классов прикладного программного обеспечения, работы в компьютерных сетях, составления баз данных	Стандартные (лекционно-семинарские)
Профессиональные	ПК-1	Способность демонстрации общенаучных базовых знаний естественных наук, математики и информатики, понимание основных фактов, концепций, принципов теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой	Стандартные (лекционно-семинарские)
Профессиональные	ПК-2	Способность понимать и применять в исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат	Стандартные (лекционно-семинарские)
Профессиональные	ПК-4	способность критически оценивать собственную квалификацию и её востребованность, переос-	Стандартные (лекционно-семинарские)

Компетенция	**Код по ФГОС / НИУ**	**Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)**	**Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции**
		мысливать накопленный практический опыт, изменять при необходимости вид и характер своей профессиональной деятельности	
Профессиональные	ПК-8	Способность решать задачи производственной и технологической деятельности на профессиональном уровне, включая разработку математических моделей, алгоритмических и программных решений	Стандартные (лекционно-семинарские)

4 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина относится к циклу дисциплин ОПД.00 «Общие профессиональные дисциплины направления» и блоку дисциплин СД.00 «Специальные дисциплины» и является базовой. Курс предназначен для студентов по направлению **080500.62 Бизнес-информатика** подготовки бакалавра, читается в первом, втором, третьем и четвертом модулях первого курса, а также в первом модуле второго курса. В первом модуле от слушателей не требуется никаких предварительных знаний сверх программы средней школы. Начиная со второго модуля требуется знание понятий, определений, теорем, методов, изученных в рамках курса Геометрия и алгебра (модули 1, 2, 3). Программа соответствует требованиям ГОС. В данном курсе рассматриваются основные разделы математического анализа, образующие элемент базового образования студентов по данной специальности.

Сведения, полученные при изучении данного курса, будут использоваться в теории вероятностей, математической статистике, методах оптимальных решений, теории игр, математической экономике, эконометрике. Они могут быть использованы для разработки и применения численных методов решения задач из многих областей знания, для построения математических моделей таких задач.

Программа предусматривает чтение лекций (72 часа на первом курсе и 16 часов на втором курсе) и проведение семинарских занятий (72 часа на первом курсе и 16 часов на втором курсе). Программой предусмотрена самостоятельная работа студента в объеме 144 часов на первом курсе и 40 часов на втором курсе (1 модуль). Самостоятельная работа включает в себя изучение теоретического материала, подготовку к семинарским занятиям, выполнение домашнего задания, подготовку к промежуточным контрольным работам, к зачетам и к экзаменам по данной дисциплине.

В результате изучения курса студенты должны: знать определения и точные формулировки основных понятий, уметь интерпретировать их на простых модельных примерах; в том числе свободно использовать навыки дифференцирования и интегрирования функций одной и нескольких переменных, исследовать поведение функций, строить эскизы графиков функций, проводить экономические исследования, используя вошедшие в курс методы оптимизации, решать возникающие в процессе анализа экономических ситуаций простейшие дифференциальные уравнения, в математической статистике, теории вероятностей и эконометрике. обладать навыками работы и быть готовыми понимать разделы учебной и научной литературы, связанные с применением теории дифференцирования и интегрирования, методов оптимальных решений, анализом рядов.

Изучение данной дисциплины базируется на следующих дисциплинах:

- Математика в объеме средней школы.
- Геометрия и алгебра (в объеме пройденного материала по указанному курсу)
- Дискретная математика (в объеме пройденного материала по указанному курсу)

Для освоения учебной дисциплины, студенты должны владеть следующими знаниями и компетенциями:

- Знаниями основных понятий и теорем математики в объеме средней школы;
- Навыками решения типовых задач математики в объеме средней школы.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

- теория вероятностей и математическая статистика, эконометрика;
- методы оптимальных решений, теория игр;
- математическая экономика.

5 Тематический план учебной дисциплины

№	*Название раздела*	*Всего часов*	*Аудиторные часы*			*Самостоятельная работа*
			Лекции	*Семинары*	*Практич. занятия*	
1.	Основы высшей математики. Предел и непрерывность функции одной переменной с приложениями к экономике и бизнес информатике (1 модуль 1 курса)	32	16	16		32
2.	Дифференциальное исчисление функций одной переменной с приложениями к экономике и бизнес информатике (2 модуль 1 курса)	32	16	16		32
3.	Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных с приложениями к экономике и бизнес информатике (3 модуль 1 курса)	40	20	20		40
4.	Интегральное исчисление с приложениями к экономике и бизнес информатике (4 модуль 1 курса)	40	20	20		40
	Итого	144	72	72		144
5.	Несобственные интегралы, интегралы зависящие от параметра, числовые и функциональные ряды с приложениями к экономике и бизнес информатике (1 модуль 2 курса)	32	16	16		40
	Итого	32	16	16		40

6 Формы контроля знаний студентов

Тип контроля	*Форма контроля*	*1 год*				*Параметры*	
		1	*2*	*3*	*4*		
Текущий (*неделя*)	**Контрольные работы**					Письменная работа 15 минут на каждом семинарском занятии с оценкой по 10-бальной шкале	
	Домашнее задание					Исполнение в течение текущей недели	
Рубежный (промежуточный)	**Контрольная работа**	8		25		Письменная контрольная работа 80 минут	
Итоговый	**Экзамен**		16		35	Письменная экзаменационная работа 80 минут	

Тип контроля	*Форма контроля*	*2 год*				*Параметры*	
		1					
Текущий (*неделя*)	**Контрольные работы**					Письменная работа 15 минут на каждом семинарском занятии с оценкой по 10-бальной шкале	
	Домашнее задание					Исполнение в течение текущей недели	
Рубежный (промежуточный)	**Контрольная работа**	5				Письменная зачетная работа 80 минут	
Итоговый	**Экзамен**	8				Письменная экзаменационная работа 80 минут	

6.1 Критерии оценки знаний, навыков

Для прохождения контроля студент должен, как минимум, продемонстрировать знания основных определений и формулировок теорем; умение решать типовые задачи, предлагаемые в типовых вариантах контрольных работ, разобранные на семинарских занятиях. При этом для получения зачета необходимо предоставить, как минимум, 80 % решенных в домашнем задании задач.

Оценки по всем формам текущего контроля выставляются по 10-ти балльной шкале.

7 Содержание дисциплины

Модуль 1 (8 лекций, 8 семинаров, 32 часа)

Продолжительность каждого занятия составляет 2 академических часа, т.е. 80 минут. В название лекции вынесена только основная тема данной лекции.

Лекция k1-m1-01. Предел функции одной переменной.

7.1 Предел функции одной переменной.

7.1.1 Стандартные числовые множества.

Геометрическое изображение вещественных чисел точками на координатной прямой. Стандартные числовые множества: интервал, сегмент (отрезок), промежуток, полупрямая, числовая прямая. Окрестность точки, проколотая окрестность.

`[KL–1] Ch. 1, pp.1–45.`

7.1.2 Понятие функции одной переменной.

Понятие функции. Область определения, множество значений. График функции одной переменной. Четные и нечетные функции. Периодические функции. Графики элементарных функций. Преобразование графиков функций, сдвиг, отражение, растяжение.

7.1.3 Правила записи логических формул.

Символы $\forall$, $\exists$.

7.1.4 Ограниченные и неограниченные функции.

Определение ограниченной и неограниченной функции на множестве. Символ $O(1)$ при $x \in X$ (ограниченная функция на множестве X). Символ $O(1)$ в окрестности точки $x = a$ (локально ограниченная функция в окрестности точки $x = a$). Теоремы об ограниченности суммы, разности, произведения двух ограниченных функций.

7.1.5 Предел функции в точке.

Определение предела функции в точке по Коши (на языке логических формул). Геометрическая интерпретация предела функции. Пример прямого доказательства существования предела, $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 8$. Теорема о локальной ограниченности функции, имеющей предел. Методика вычисления пределов элементарных функций. Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+6}$, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+7}-3}$.

7.1.6 Односторонние пределы.

Определение одностороннего предела. Теоремы о связи существования и равенства односторонних пределов и существования предела функции в точке. Примеры вычисления односторонних пределов типа $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{x-2}{|x-2|}$, $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{x-2}{|x-2|}$. Предел функции при $x \to +0$, $x \to -0$.

7.1.7 Предел в бесконечно удаленной точке.

Определение предела функции при $x \to +\infty$ (по Коши). ●Определение предела функции при $x \to -\infty$. Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+6}$.

```
Читать:
[МАВЗ] Глава III, §1, 2, стр. 40-52.
[ЗУМА] Глава II, §1, стр. 48-66.
```

[KL-1] Ch. 2, pp.84-138.

7.1.8 Содержание семинара 1, пределы.

1. Правила записи логических формул.
2. Доказательстве простейших теорем.
3. Прямое доказательстве существования предела, задачи типа $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 8$.
4. Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+6}$.
5. Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+7}-3}$.
6. Вычисление односторонних пределов типа $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{x}{|x|}$, $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{x-2}{|x-2|}$.

Лекция k1-m1-02. Сравнение бесконечно малых функций.

7.1.9 Бесконечно малые функции.

Определение бесконечно малой функции. Обозначение $o(1)$. Теорема о представлении функции, имеющей предел, в виде суммы константы и бесконечно малой функции. Арифметические операции над бесконечно малыми функциями: сумма, $o(1)+o(1)=o(1)$, разность, $o(1)-o(1)=o(1)$, произведение, $o(1)\cdot o(1)=o(1)$. Понятие неопределенности типа $\dfrac{0}{0}$. Теорема об ограниченности суммы бесконечно малой функции и ограниченной функции в точке, $o(1)+O(1)=O(1)$. Теорема о произведении бесконечно малой функции и ограниченной функции в точке, $o(1)\cdot O(1)=o(1)$.

7.1.10 Теоремы о пределах функций.

Теоремы о пределе суммы двух функций, о пределе разности, о пределе произведения и о пределе частного. Теорема о предельном переходе в неравенствах (без доказательства).

7.1.11 Бесконечно большие функции.

Определение бесконечно большой положительной функции в точке. Определение бесконечно большой отрицательной функции в точке. Соотношение понятий бесконечно малой функции и бесконечно большой функции. Соотношение понятий бесконечно большой функции и неограниченной функции. Арифметические операции над бесконечно большими функциями: сумма, произведение. Понятие неопределенности типа $+\infty-\infty$. Бесконечно большие функции при $x\to+\infty$. Бесконечно большие функции при $x\to-\infty$.

7.1.12 Сравнение бесконечно малых функций.

Определение $f(x)=o(x)$ при $x\to 0$. Определение $f(x)=o(x^n)$ при $x\to 0$. Определение $f(x)=o(x^{-1})$ при $x\to+\infty$. Определение $f(x)=o(x^{-n})$ при $x\to+\infty$. Примеры применения, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}=\dfrac{1}{3}$, вывод асимптотических формул, $\sqrt{1+x}=1+\dfrac{x}{2}+o(x)$, $\sqrt[3]{1+x}=1+\dfrac{x}{3}+o(x)$ при $x\to 0$.

Читать:
[МАВЗ] Глава III, §3, стр. 52-58.
[ЗУМА] Глава II, §1, стр. 48-66.

[KL-1] Ch. 2, pp.84-138.

7.1.13 Техника вычисления пределов иррациональных функций.

Применение асимптотических формул $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$, $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} + o(x)$.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

Применение асимптотической формулы $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-(1+x/2)}{x^2}$.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$, .

7.1.14 Содержание семинара 2, бесконечно малые функции.

1. Правила записи логических формул.
2. Доказательство простейших теорем.
3. Раскрытие неопределенностей типа $+\infty - \infty$.
4. Вычисление пределов с помощью асимптотических формул.

Лекция k1-m1-03. Первый и второй замечательные пределы.

7.1.15 Первый замечательный предел.

Формула, выражающая первый замечательный предел. Геометрическая интерпретация. Асимптотические формулы $\sin = x + o(x)$, $\sin = x + o(x^2)$ при $x \to 0$.

Асимптотические формулы $\cos = 1 + o(1)$, $\cos = 1 + o(x)$, $\cos = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ при $x \to 0$.

Асимптотические формулы $\operatorname{tg} = x + o(x^2)$, $\operatorname{tg} = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$ при $x \to 0$.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\alpha x - \sin\beta x}{x}$.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(\alpha+x)-\sin a}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(\alpha+x)-\cos a}{x}$.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(a+x)-2\sin a+\sin(a-x)}{x^2}$.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x - 2\sin 2x + \sin x}{x^3}$.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\alpha x^2}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}\alpha x}{\operatorname{tg}\beta x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(a+x)-2\operatorname{tg} a+\operatorname{tg}(x-a)}{x^2}$.

Читать:
[МАВЗ] Глава III, §4, стр. 58-65.
[ЗУМА] Глава II, §1, стр. 77-80.
[KL-1] Ch. 2, pp.84-138.

7.1.16 Теорема о пределе монотонной функции.

Теорема о пределе монотонной ограниченной на интервале функции. Теорема о пределе монотонной ограниченной на полупрямой функции.

7.1.17 Второй замечательный предел.

Формула, выражающая второй замечательный предел. Число e.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 0}(1+\alpha x)^{\frac{\beta}{x}}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Асимптотические формулы $\ln(1+x)=o(1)$, $\ln(1+x)=x+o(x)$, применение для решения задач, $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$ при $x\to 0$ и аналогичные.

Асимптотические формулы $e^x=1+o(1)$, $e^x=1+x+o(x)$, $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$ при $x\to 0$ и аналогичные и их применение для решения задач.

Вычисление пределов, включающих тригонометрические и иррациональные функции.

Читать:
[МАВЗ] Глава III, §4, стр. 58-65.
[ЗУМА] Глава II, §1, стр. 77-80.
[KL-1] Ch. 2, pp.84–138.

7.1.18 Содержание семинара 3, первый и второй замечательные пределы.

1. Тригонометрические пределы.
2. Пределы с показательной функцией.

Лекция k1-m1-04. Непрерывные функции и обратная функция.

7.1.19 Непрерывные функции одной переменной.

Непрерывность функции одной переменной в точке. Односторонняя непрерывность справа и слева, связь с непрерывностью в точке. Арифметические операции над непрерывными функциями. Непрерывность основных элементарных функций.

7.1.20 Классификация точек разрыва.

Точки разрыва устранимые, первого рода, второго рода. Примеры.

7.1.21 Сложная функция.

Понятие сложной функции. Теорема о непрерывности сложной функции. Непрерывность многочлена и дробно-рациональной функции.

7.1.22 Обратная функция.

Понятие обратной функции. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции (только для монотонной функции, без доказательства). Непрерывность обратных тригонометрических функций. Непрерывность показательной и логарифмической функции. Графики.

Читать:
[МАВЗ] Глава I, §2, стр. 48-52.
[ЗУМА] Глава I, §2, 3, стр. 14-20.
[KL-1] Ch. 2, pp.84–138.

7.1.23 Содержание семинара 4, непрерывные функции.

1. Классификация точек разрыва.
2. Построение графиков композиции элементарных функций с помощью птнятия предела и основных свойств, без использования производной.

Лекция k1-m1-05. Производные и касательная.

7.2 Производная и дифференциал функции одной переменной.

7.2.1 Производная функции одной переменной.

Определение производной функции, ее геометрический, физический и экономический смысл. Таблица производных элементарных функций. Односторонние производные. Теорема о связи существования и равенства односторонних производных и производной функции в точке.

7.2.2 Вычисление производной.

Правила (теоремы) вычисления производной суммы, произведения и частного от деления двух функций. Производная обратной функции (без доказательства). Теорема о производной сложной функции. Производная степенной и показательной функций. Теорема о производной обратной функции и ее геометрическая интерпретация. Теорема о производной сложной функции.

7.2.3 Уравнение касательной.

Понятие, определение и уравнение касательной.

7.2.4 Производные высших порядков.

Понятие второй производной. Понятие и уравнение соприкасающейся параболы. Понятие и уравнение соприкасающейся окружности. Определение производной n-го порядка. Правила вычисления производной суммы и произведения (теорема). Формула Лейбница для n-й производной произведения двух функций (теорема).

7.2.5 Вычисление старших производных.

Старшие производные степенной и показательной функций. Старшие производные логарифмической функции. Старшие производные тригонометрических функций. Старшие производные функций типа xe^x, x^2e^x. Рекуррентные методы.

Читать:
[МАВЗ] Глава IV, §1, стр. 65-74.
[ЗУМА] Глава III, §1, стр. 89-100.
[KL–1] Ch. 3, pp.139–235.

7.2.6 Содержание семинара 5, вычисление производной.

1. Производные степенных функций.
2. Производные иррациональных функций.
3. Производные тригонометрических функций.
4. Производная показательной функции.
5. Производная логарифмической функции.
6. Производная сложной функции.
7. Производная обратной функции.

Лекция k1-m1-06. Дифференциал и старшие дифференциалы.

7.2.7 Дифференциал функции одной переменной.

Определение дифференциала функции в точке. Определение дифференцируемой функции в точке. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости (теорема). Геометрический смысл дифференциала. Теорема о непрерывности дифференцируемой функции в точке.

7.2.8 Вычисление дифференциала функции одной переменной.

Правила вычисления дифференциала суммы, разности, произведения и частного двух функций (теорема). Вычисление первого дифференциала сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала.

7.2.9 Дифференциалы высших порядков.

Понятие дифференциала второго порядка. Понятие дифференциала n-го порядка. Дифференциал второго порядка сложной функции.

7.2.10 Приближенные вычисления с помощью дифференциалов.

Понятие формулы Тейлора и применение для приближенных вычислений. Использование первого дифференциала для приближенных вычислений. Использование второго дифференциала для приближенных вычислений.

Читать:
[МАВЗ] Глава IV, §2, 3, стр. 77-85.
[ЗУМА] Глава III, §2, стр. 101-103.
[KL–1] Ch. 3, pp. 139–235.

7.2.11 Содержание семинара 6, вычисление дифференциала.

1. Производные старших порядков.
2. Вычисление первого дифференциала.

Лекция k1-m1-07. Теоремы о непрерывных и дифференцируемых функциях.

7.3 Теоремы о непрерывных и дифференцируемых функциях.

7.3.1 Теоремы об ограниченности непрерывных функций.

Теоремы о локальной ограниченности и об устойчивости знака непрерывной функции в точке. Ограниченность непрерывной на сегменте функции (первая теорема Вейерштрасса).

7.3.2 Теоремы о корнях непрерывной функции.

Теорема о прохождении непрерывной на сегменте функции через любое промежуточное значение. Теорема о существовании корня непрерывной функции, принимающей значения разных знаков на концах сегмента.

7.3.3 Возрастание и убывание функции в точке.

Возрастание и убывание функции в точке. Достаточные условия возрастания функции в точке. Пример, показывающий, что положительность производной в точке не является необходимым условием возрастания функции в этой точке.

7.3.4 Формула конечных приращений.

Теорема Ролля и ее геометрическая интерпретация. Теорема Лагранжа, ее геометрический и экономический смысл. Следствия из теоремы Лагранжа: условие постоянства функции на промежутке, признак монотонности функции на промежутке. Исследование возрастания и убывания функции. Формула Коши.

Читать:
[МАВЗ] Глава VI, §1, 3, стр. 108-111, 116-121.
[ЗУМА] Глава III, §3, стр. 110-113.
[KL–1] Ch. 3, pp. 139–235.

7.3.5 Содержание семинара 7, формулы Лагранжа и Коши.

1. Вычисление дифференциалов старших порядков.
2. Применение формулы Лагранжа.
3. Применение формулы Коши.

Лекция k1-m1-08. Приложения дифференциального исчисления.

Модуль 2 (8 лекций, 8 семинаров, 32 часов)

Лекция k1-m2-01. Локальный экстремум.

7.4 Локальный экстремум.

7.4.1 Локальный экстремум.

Понятие локального экстремума функции. Необходимое условие локального экстремума дифференцируемой функции (теорема). Достаточное условие локального экстремума непрерывной дифференцируемой функции (теорема). Достаточное условие локального экстремума дважды дифференцируемой функции (теорема). Исследование локального экстремума.

Читать:
[МАВЗ] Глава VI, §3, стр. 116-121.
[ЗУМА] Глава III, §3, стр. 110-113.
[KL–1] Ch. 6, pp. 214–219.

Лекция k1-m2-02. Правило Лопиталя.

7.4.2 Правило Лопиталя.

Правило Лопиталя: раскрытие неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ (теорема).

Правило Лопиталя для случая, когда $x \to +\infty$ (теорема без доказательства).

Правило Лопиталя для неопределенности типа $\frac{\infty}{\infty}$ (теорема без доказательства).

Вычисление пределов с помощью однократного применения правила Лопиталя.
Вычисление пределов с помощью многократного применения правила Лопиталя.

Читать:
[МАВЗ] Глава VI, §4, стр. 122-125.
[ЗУМА] Глава III, §3, стр. 113-117.
[KL–1] Ch. 3, pp.139–235. [KL–1] Ch. 6, pp. 386–469.

Лекция k1-m2-03. Формула Тейлора

7.4.3 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Многочлен Тейлора. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (теорема без доказательства). Формула Маклорена. Разложение по формуле Тейлора элементарных функций.

7.4.4 Асимптотические формулы.

Понятие асимптотической формулы. Вывод и применение формул

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^4\right),\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o\left(x^3\right),\ \operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^4\right),\ \sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} + o\left(x\right),$$

$\ln x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$, $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + o\left(x^2\right)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o\left(x^2\right)$,
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o\left(x^2\right)$, $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o\left(x^5\right)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{5} + o\left(x^5\right)$
и аналогичных для вычисления пределов.

7.4.5 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Остаточный член в форме Лагранжа (теорема без доказательства). Методика оценки остаточного члена формулы Тейлора в форме Лагранжа. Вычисление наибольшего слагаемого многочлена Тейлора. Приближенное вычисление значения функции. Вычисление сложных процентов с высокой точностью.

Читать:
[МАВЗ] Глава VI, §5, стр. 125-130.
[ЗУМА] Глава III, §3, стр. 113-117.
[KL–1] Ch. 6, pp. 386–470.

Лекция k1-m2-04. Числовые последовательности.

7.5 Числовые последовательности.

7.5.1 Предел последовательности.

Понятие числовой последовательности. Ограниченные и неограниченные числовые последовательности. Определение предела последовательности. Ограниченность сходящейся последовательности (теорема). Определение бесконечно малой последовательности. Взаимосвязь бесконечно малых и сходящихся последовательностей (теорема). Арифметические операции с бесконечно малыми последовательностями (теоремы). Определение бесконечно большой последовательности. Арифметические операции с бесконечно большими последовательностями (теоремы). Теоремы о взаимосвязи между бесконечно малыми и бесконечно большими последовательностями.

7.5.2 Свойства сходящихся последовательностей.

Арифметические операции, предельный переход в неравенствах (теорема без доказательства). Понятие о неопределенностях типа $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$. Другие типы неопределенностей, примеры. Исследование неопределенностей методом Лопиталя. Исследование неопределенностей методом асимптотических формул. Вычисление пределов выражений, содержащих радикалы. Понятие и определение монотонной последовательности. Необходимое и достаточное условие сходимости монотонной последовательности (теорема без доказательства).

7.5.3 Эталонные последовательности.

Второй замечательный предел для последовательностей. Число e. Вычисление пределов типа $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{\beta n}$. Эталонные последовательности: $\sqrt[n]{b}$, $\log_a n$, n^β, b^n, $n!$, n^n. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b}$ при $\beta > 0$. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n^\beta}$ при $\beta > 0$, $a > 1$. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^\beta}{b^n}$ при $b > 1$. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b^n}{n!}$. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$.

7.5.4 Предельные точки числовой последовательности.

Понятие подпоследовательности числовой последовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса: из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность (без доказательства). Два эквивалентных определения предельной точки числовой последовательности. Свойства множества всех предельных точек ограниченной последовательности. Верхний и нижний пределы последовательности. Соотношение множества всех верхних граней, точной верхней грани, верхнего предела (теорема без доказательства). Верхний и нижний пределы неограниченных последовательностей.

7.5.5 Фундаментальные последовательности. Критерий Коши.

Фундаментальная последовательность. Ограниченность фундаментальной последовательности. Критерий Коши сходимости числовых последовательностей (теорема без доказательства). Критерий Коши предела функции в точке (теорема без доказательства). Определение предела по Гейне (на основе понятия предела последовательности. Теорема об эквивалентности двух определений предела функции (без доказательства).

Читать:
[МАВЗ] Глава II, §1-5, стр. 16-33.
[ЗУМА] Глава II, §2, стр. 67-70.
[KL–1] Ch.2.

Лекция k1-m2-05. Исследование и построение графиков функций, заданных явным образом.

7.6 Исследование и построение графиков функций, заданных явным образом.

7.6.1 Классификация точек разрыва.

Точки непрерывности и точки разрыва функций. Классификация точек разрыва: точки устранимого разрыва, точки разрыва 1 рода, точки разрыва 2 рода.

7.6.2 Асимптоты графика функции.

Вертикальные и наклонные асимптоты графика функции. Необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты.

7.6.3 Возрастание и убывание функции.

Возрастание и убывание функции. Отыскание промежутков монотонности с помощью производной.

7.6.4 Локальный экстремум функции одной переменной.

Понятие локального экстремума. Точки возможного экстремума функции.
Достаточные условия локального экстремума, основанные на исследовании первых и вторых производных (теоремы).

Читать:
[МАВЗ] Глава VIII, §1, стр. 130-136.
[ЗУМА] Глава III, §3, стр. 117-122.
[KL–1] Ch. 6, pp.386–469.

Лекция k1-m2-06. Выпуклость и точки перегиба.

7.6.5 Выпуклость графика функции.

Понятие и определение направления выпуклости графика функции на данном интервале. Теорема о достаточном условии выпуклости вниз (вверх) графика функции на данном интервале (без доказательства). Геометрическая интерпретация этой теоремы.

7.6.6 Точки перегиба графика функции.

Определение точек перегиба графика функции. Необходимое условие перегиба графика дважды дифференцируемой функции (теоремы без доказательства). Пример, показывающий, что условие не является достаточным условием перегиба дважды дифференцируемой функции. Точки возможного перегиба графика функции. Различные формы достаточных условий перегиба, использующие первые, вторые, третьи производные (теоремы без доказательства).

Читать:
[МАВЗ] Глава VIII, §1, стр. 130-136.
[ЗУМА] Глава III, §3, стр. 117-122.
[KL–1] Ch. 6, pp.386–469.

Лекция k1-m2-07. Графики параметрических функций.

7.7 Построение графиков функций, заданных параметрически.

7.7.1 Асимптоты графика параметрической функции.

Вертикальные и наклонные асимптоты графика функции. ■Необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты (теорема).

7.7.2 Возрастание и убывание параметрической функции.

Возрастание и убывание функции. Отыскание промежутков монотонности функции методом исследования знака первой производной.

7.7.3 Локальный экстремум параметрической функции.

Точки возможного экстремума функции. Достаточные условия локального экстремума, основанные на исследовании первых и вторых производных (теоремы без доказательства).

7.7.4 Выпуклость графика параметрической функции.

Теорема о достаточном условии выпуклости вниз (вверх) графика функции на данном интервале (без доказательства). Геометрическая интерпретация этой теоремы.

7.7.5 Точки перегиба графика функции.

Необходимое условие перегиба графика дважды дифференцируемой функции (теорема без доказательства). Пример, показывающий, что условие не является достаточным условием перегиба дважды дифференцируемой функции. Точки возможного перегиба графика функции. Различные формы достаточных условий перегиба, использующие первые, вторые, третьи производные (теоремы без доказательства).

7.7.6 Исследование и построение графиков функций, заданных параметрически.

Общая схема исследования функции и построение графика. Примеры исследования по этой схеме.
Читать:
[МАВЗ] Глава VIII, §2, стр. 137-142.

[ЗУМА] Глава III, §3, стр. 117-122.
[KL–1] Ch. 6, pp.386–469.

Лекция k1-m2-08. Приложения дифференциального исчисления.

Модуль 3 (10 лекций, 10 семинаров, 40 часов)

Лекция k1-m3-01. Множества точек в пространстве.

7.8 Множества и последовательности точек в m-мерном пространстве.

7.8.1 Понятие m-мерного пространства.

Евклидово m-мерное пространство. Шар, сфера, параллелепипед. Окрестность точки, проколотая окрестность. Шаровая, прямоугольная и кубическая окрестности. Ограниченные и неограниченные последовательности точек. Бесконечно большая последовательность. Предел последовательности. Предельные точки. Связь между сходимостью последовательности точек и покоординатной сходимостью.

7.8.2 Открытые, замкнутые, выпуклые множества точек.

Внутренние и граничные точки множества, предельные точки, изолированные точки.
Открытые и замкнутые множества на плоскости и в пространстве.
Ограниченные и неограниченные множества на плоскости и в пространстве.
Связные и несвязные множества.
Замыкание множества.
Выпуклые и невыпуклые множества в пространстве.
Выпуклая оболочка множества точек на плоскости.
Читать:
[МАВЗ] Глава X, §1, 2, стр. 191-204.
[ЗУМА] Глава III, §1, стр. 286-291.
[Кудрявцев, том 1] Глава 2, §18, стр. 247-265.

Лекция k1-m3-02. Предел функции нескольких переменных.

7.9 Предел и непрерывность функции нескольких переменных.

7.9.1 Предел функции нескольких переменных.

Понятие функции нескольких переменных (ФНП).
Способы визуализации. Карта линий равного уровня.
Два определения предела функции в точке (по Коши и по Гейне), их эквивалентность.
Бесконечно малые функции в точке.
Предел функции в бесконечно удаленной точке.
Арифметические операции над функциями, имеющими предел в данной точке.
Повторные пределы.
Предел вдоль кривой.

7.9.2 Непрерывные функции нескольких переменных.

Непрерывность функции нескольких переменных по совокупности переменных и по каждой переменной, связь между ними.

Теорема об арифметических операциях над непрерывными функциями.
Понятие сложной функции. Теорема о непрерывности сложной функции.
Читать:
[МАВЗ] Глава X, §3, 4, стр. 205-212.
[ЗУМА] Глава III, §1, стр. 286-291.
[Кудрявцев, том 1] Глава 2, §19, стр. 265-275.

7.9.3 Свойства непрерывных функций.

Ограниченность непрерывной функции, достижение непрерывной функцией своего максимального и минимального значений.
Читать:
[Кудрявцев, том 1] Глава 2, §19, стр. 273-276.

Лекция k1-m3-03. Дифференцируемые функции нескольких переменных.

7.10 Дифференцирование функции нескольких переменных.

7.10.1 Частные производные. Дифференциал.

Частные производные ФНП. Геометрический смысл частной производной.
Определение дифференцируемой ФНП. Дифференциал функции нескольких переменных.
Связь между дифференцируемостью и существованием частных производных.
Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции в точке.
Необходимое условие дифференцируемости функции в точке.
Теорема о достаточных условиях дифференцируемости функции (без доказательства).
Формулы для вычисления дифференциала суммы, разности, произведения и частного двух функций.

7.10.2 Касательная плоскость.

Определение касательной плоскости. Существование касательной плоскости у графика дифференцируемой функции двух переменных.
Уравнение касательной плоскости.
Геометрический смысл дифференцируемости функции двух переменных.

7.10.3 Дифференцирование сложной функции нескольких переменных.

Понятие сложной функции.
Частные производные и дифференцируемость сложной функции.
Дифференциал сложной функции.
Инвариантность формы первого дифференциала.

7.10.4 Градиент и производная по направлению.

Понятие производной по направлению и градиента.
Направление градиента и направление линии равного уровня дифференцируемой функции в заданной точке. Геометрический смысл градиента функции в точке.
Теорема о существовании производной по направлению дифференцируемой ФНП.
Линии и поверхности уровня.
Теорема Эйлера об однородных функциях.

Лекция k1-m3-04. Формула Тейлора.

7.10.5 Векторные функции многих переменных

Понятие векторной функции многих переменных.
Матрица Якоби и якобиан.
Дифференцирование сложных векторных функций.
Векторно-матричная форма записи первого дифференциала.
Отображения, задаваемые простейшими векторными функциями и их геометрическая интерпретация.
Функции размерности 2 и 3 от двух и трех переменных. Геометрическая интерпретация якобиана.
Понятия однозначного и однолистного отображения.
Читать:
[МАВЗ] Глава X, §4, стр. 213-224.
[ЗУМА] Глава III, §2, 3, стр. 291-302.
[Кудрявцев, том 1] Глава 2, §20, стр. 283-310.

7.10.6 Производные и дифференциалы высших порядков.

Частные производные высших порядков.
Достаточные условия равенства смешанных производных.
Дифференциал второго порядка. Дифференциалы высших порядков.
Неинвариантность формы второго дифференциала сложной функции.
Векторно-матричная форма записи первого и второго дифференциалов ФНП.
Матрица Гессе.
Читать:
[Кудрявцев, том 1] Глава 2, §20, стр. 310-317.

7.11 Формула Тейлора.

7.11.1 Формула Тейлора.

Многочлен Тейлора. Формула Тейлора. Остаточный член.
Остаточный член в форме Пеано.
Остаточный член в форме Лагранжа.
Методика оценки остаточного члена для функции с ограниченными производными.
Геометрический смысл формулы Тейлора с остаточным членом первого порядка.
Геометрический смысл формулы Тейлора с остаточным членом второго порядка.
Геометрический смысл формулы Тейлора с остаточным членом третьего порядка.
Приближенное вычисление значений функции.
Читать:
[МАВЗ] Глава X, §5, стр. 225-235.
[ЗУМА] Глава III, §4, стр. 303-309.
[Кудрявцев, том 2] Глава 5, §39, стр. 003-014.

Лекция k1-m3-05. Локальный экстремум.

7.12 Локальный экстремум.

7.12.1 Необходимое условие локального экстремума ФНП.

Понятие локального экстремума ФМП.

Необходимое условие локального экстремума дифференцируемой функции.

7.12.2 Достаточные условия локального экстремума ФНП.

Понятие квадратичной формы и ее матрицы.
Понятие знакоопределенной квадратичной формы.
Критерий Сильвестра.
Теорема о достаточном условии экстремума функции многих переменных.
Методика исследования локального экстремума.
Особенности графика и карты линий равного уровня дважды дифференцируемой функции в окрестности точки локального экстремума.
Выпуклые и строго выпуклые функции. Экстремум выпуклой функции.
Читать:
[МАВЗ] Глава X, §6, стр. 236-242.
[ЗУМА] Глава III, §8, стр. 336-351.
[Кудрявцев, том 2] Глава 5, §40, стр. 016-024.

Лекция k3-m3-06. Неявные функции-1.

7.13 Неявные функции.

7.13.1 Неявные функции, определяемые одним уравнением.

Понятие неявной функции.
Формула для производных неявной функции.
Теорема о существовании и непрерывности неявной функции, определяемой одним уравнением.
Теорема о дифференцируемой неявной функции, определяемой одним уравнением в точке.

7.13.2 Неявные функции, определяемые системой уравнений.

Вычисление частных производных неявных функций, определяемых системой уравнений.
Теорема о старших производных неявной функции, определяемой системой уравнений.

7.13.3 Экстремум неявной функции.

Теорема об экстремуме неявной функции, определяемой одним уравнением и определяемой системой уравнений.
Экономические приложения неявных функций.
Читать:
[МАВЗ] Глава XI, §1, стр. 243-256.
[ЗУМА] Глава III, §5, стр. 310-319.
[Кудрявцев, том 2] Глава 5, §41, стр. 025-030.

Лекция k1-m3-07. Условный экстремум-1.

7.14 Условный экстремум-1.

7.14.1 Понятие условного экстремума.

Понятие условного экстремума.
Необходимое условие условного экстремума.
Метод исключения переменных: сведение задачи об условном экстремуме к задаче о безусловном экстремуме.

7.14.2 Метод Лагранжа.

Метод Лагранжа и его геометрическая интерпретация.
Необходимые условия условного экстремума в форме Лагранжа.
Достаточные условия условного экстремума в форме Лагранжа.
Метод окаймленного гессиана, исследование достаточных условий условного экстремума.
Экономические приложения условного экстремума.

Читать:
[МАВЗ] Глава XI, §3, стр. 261-269.
[ЗУМА] Глава III, §8, стр. 326-350.
[Кудрявцев, том 2] Глава 5, §43, стр. 064-073.

Лекция k1-m3-08. Неявные функции-2.

7.15 Неявные функции, определяемые системой уравнений.

7.15.1 Неявные функции, определяемые системой уравнений.

Вычисление частных производных неявных функций, определяемых системой уравнений.
Теорема о старших производных неявной функции, определяемой системой уравнений.

7.15.2 Экстремум неявной функции, определяемой системой уравнений.

Теорема об экстремуме неявной функции, определяемой системой уравнений.
Методика расчета точек возможного экстремума и проверка достаточных условий.

Читать:
[МАВЗ] Глава XI, §1, стр. 243-256.
[ЗУМА] Глава III, §5, стр. 310-319.
[Кудрявцев, том 2] Глава 5, §41, стр. 030-037.

Лекция k1-m3-09. Условный экстремум-2.

7.16 Условный экстремум с несколькими условиями связи.

7.16.1 Метод Лагранжа с несколькими условиями связи.

Метод Лагранжа и его геометрическая интерпретация.
Необходимые условия условного экстремума в форме Лагранжа.
Достаточные условия условного экстремума в форме Лагранжа.
Метод окаймленного гессиана исследования достаточных условий условного экстремума.

Читать:
[МАВЗ] Глава XI, §3, стр. 261-269.
[ЗУМА] Глава III, §8, стр. 326-350.
[Кудрявцев, том 2] Глава 5, §43, стр. 064-073.

Лекция k1-m3-10. Экономические приложения ФНП.

Модуль 4 (10 лекций, 10 семинаров, 28 часов)

Лекция k1-m4-01. Неопределенный интеграл.

7.17 Неопределенный интеграл.

7.17.1 Первообразная и неопределенный интеграл.

Понятие первообразной функции одной переменной на промежутке.
Теорема о том, что любые две первообразных для данной функции отличаются на константу.
Неопределенный интеграл - совокупность всех первообразных заданной функции на заданном промежутке.
Основные свойства неопределенных интегралов.

7.17.2 Основные неопределенные интегралы.

Вычисление интегралов от простейших рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных, логарифмических функций.

7.17.3 Интегрирование методом замены переменной.

7.17.4 Интегрирование по частям.

Читать:
[МАВЗ] Глава V, §1, 2, стр. 87-96.
[ЗУМА] Часть 2, Глава I, §1, 2, стр. 174-181.
Решать:
[Ефимов, Демидович] Глава 6, §1, 6.15-6.80.
[Ефимов, Демидович] Глава 6, §1, 6.114-6.123.
[Ефимов, Демидович] Глава 6, §1, 6.124-6.143.

Лекция k1-m4-02. Методы интегрирования.

7.18 Методы интегрирования.

7.18.1 Интегрирование рациональных функций.

Понятие о рациональной функции. Выделение целой и дробной частей.
Деление многочленов столбиком.
Разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей.
Практические приемы нахождения коэффициентов разложения.
Четыре вида простейших дробей и их интегрирование.

7.18.2 Интегрирование иррациональных функций.

Различные приемы интегрирования иррациональных функций.
Универсальная подстановка, сведение к интегралу от рациональной функции.

7.18.3 Интегрирование тригонометрических функций.

Различные приемы интегрирования тригонометрических функций.
Универсальная тригонометрическая подстановка, сведение к интегралу от рациональной функции.
Читать:
[МАВЗ] Глава V, §3, 4, стр. 91-96.
[ЗУМА] Часть 2, Глава I, §3, 4, 5, стр. 182-208.
Решать:
[Ефимов, Демидович] Глава 6, §2, 6.158-6.181.
[Ефимов, Демидович] Глава 6, §2, 6.190-6.210.
[Ефимов, Демидович] Глава 6, §2, 6.238-6.245.

Лекция k1-m4-03. Определенный интеграл.

7.19 Определенный интеграл.

7.19.1 Понятие определенного интеграла.

Определенный интеграл как обобщение понятия площади плоской фигуры.
Определенный интеграл как предел интегральных сумм.
Пример ограниченной неинтегрируемой функции.
Верхняя и нижняя интегральные суммы и их геометрическая интерпретация.
Необходимое и достаточное условие интегрируемости ограниченной функции на сегменте.
Некоторые классы интегрируемых на сегменте функций: непрерывные функции, кусочно-непрерывные функции, монотонные ограниченные функции.

7.19.2 Свойства определенного интеграла.

Формулы среднего значения.
Существование первообразной для непрерывной функции.
Формула Ньютона-Лейбница.
Читать:
[МАВЗ] Глава VIII, §5, стр. 167-171
[ЗУМА] Часть 2, Глава II, §1, стр. 236-246.
Решать:
[Ефимов, Демидович] Глава 6, §4, 6.324-6.352.

7.20 Вычисление определенного интеграла.

7.20.1 Метод замены переменной.

Вычисление интегралов методом замены переменной.

7.20.2 Интегрирование по частям.

Интегрирование по частям. Двукратное интегрирование по частям. Вычисление интегралов типа $\int_a^b e^{ax}\sin bx\,dx$, $\int_a^b e^{ax}\cos bx\,dx$, $\int_a^b \sin(\ln x)\,dx$, $\int_a^b \cos(\ln x)\,dx$.
Читать:
[МАВЗ] Глава VIII, §5, стр. 167-171
[ЗУМА] Часть 2, Глава II, §1, стр. 236-246
Решать:
[Ефимов, Демидович] Глава 6, §4, 6.386-6.395.
[Ефимов, Демидович] Глава 6, §4, 6.399-6.408.

Лекция k1-m4-04. Приложения определенного интеграла.

7.21 Приложения определенного интеграла.

7.21.1 Длина кривой.

Понятие длины плоской кривой. Вычисление длины кривой, заданной явным образом.
Вычисление длины плоской кривой, заданной параметрически.
Вычисление длины плоской кривой, заданной неявным образом.

7.21.2 Площадь фигуры.

Понятие площади плоской фигуры.
Вычисление площади плоской фигуры, заданной явным образом.

Вычисление площади плоской фигуры, заданной параметрически.
Вычисление площади плоской фигуры, заданной неявным образом.

7.21.3 Объем тела.

Понятие объема. Вычисление объема тела вращения, полученного вращением плоской фигуры, заданной явным образом. Вычисление объема тела вращения, полученного вращением плоской фигуры, заданной параметрически. Вычисление объема тела вращения, полученного вращением плоской фигуры, заданной неявным образом. Вычисление координат центра масс и момента инерции кривой, плоской фигуры, тела вращения.

Читать:
[МАВЗ] Глава VIII, §5, стр. 167-171
[ЗУМА] Часть 2, Глава II, §2, 3, стр. 246-265.
Решать:
[Ефимов, Демидович] Глава 6, §6, 6.453-6.492.
[Ефимов, Демидович] Глава 6, §6, 6.493-6.517.
[Ефимов, Демидович] Глава 6, §6, 6.533-6.544.
[Ефимов, Демидович] Глава 6, §6, 6.546-6.554.

Лекция k1-m4-05. Кратные интегралы.

7.22 Кратные интегралы.

7.22.1 Двойной интеграл.

Понятие двойного интеграла и основные его свойства. Сведение двойного интеграла к повторному. Ортогональные координаты на плоскости. Полярные координаты. Замена переменных в двойном интеграле. Якобиан.

7.22.2 Тройной интеграл.

Понятие и свойства тройного интеграла. Сведение тройного интеграла к повторному. Ортогональные координаты в пространстве. Цилиндрические и сферические координаты. Замена переменных в тройном интеграле. Якобиан.

7.22.3 Приложения кратных интегралов.

Вычисление координаты центра масс, дисперсии.

Читать:
[МАВЗ] Глава XII, §1, 2, стр. 279-300.
[ЗУМА] Часть 2, Глава II, §2, 3, стр. 43-67.

Лекция k1-m4-6. Несобственные интегралы.

7.23 Несобственные интегралы.

7.23.1 Понятие и определение.

Понятие несобственного интеграла.

7.23.2 Эталонные интегралы.

7.23.3 Признаки сходимости.

7.23.4 Интегрирование по частям.

7.23.5 Замена переменной.

7.23.6 Вычисление средних значений.

7.23.7 Приложения к теории вероятностей.

Лекция k1-m4-07. Ряды.

7.23.8 Числовые ряды.

Понятие числового ряда.

7.23.9 Приложения к теории вероятностей.

Вычисление среднего значения дискретного распределения.
Вычисление дисперсии дискретного распределения.

Курс 2, модуль 1 (8 лекций, 8 семинаров, 32 часов)

Лекция k2-m1-01. Дифференциальные уравнения первого порядка.

7.24 Уравнения первого порядка общего вида.

7.24.1 Понятие дифференциального уравнения.

1. Поле направлений на плоскости.
   Читать: [Ф] §1, решить задачи 6, 12, 16.

Понятие дифференциального уравнения первого порядка.
Читать: [Ф] §1, решить задачи 7, 37, 38.

Понятие общего решения. Задача Коши.
Читать: [Ф] §2, решить задачи 56, 53.

2. Составление дифференциального уравнения параметрического семейства кривых.
   Читать:[Ф] §1, решить задачи 18, 19, 22.

7.24.2 Примеры математических моделей, приводящих к дифференциальным и разностным уравнениям.

1. Модель Мальтуса, $\dot{x} = (1+\alpha)x$.
2. Модель Ферхюльста, $\dot{x} = k\left(1 - \dfrac{x}{M}\right)x$.
3. Модель Лоттки, $\begin{cases} \dot{x} = (\alpha - py)x, \\ \dot{y} = (-\beta + qx)y. \end{cases}$.
4. Уравнение истечение воды из резервуара переменного сечения.
5. Модель гидравлического удара. Уравнение Риккати.
   Читать: [Ф] §3, решить задачи 74, 80, 84, 91.

7.24.3 Дифференциальные уравнения специального вида.

Уравнения с разделяющимися переменными.
Читать: [Ф] §2, решить задачи 51, 52, 55, 57, 58.
Однородные уравнения.
Читать: [Ф] §4, решить задачи 102, 105, 106, 108, 109.

Уравнения в полных дифференциалах.
Читать: [Ф] §6, решить задачи 186, 192.

1. Особые решения.

Читать: [Ф] §8, решить задачи 242, 247.

7.24.4 Уравнения, неразрешенные относительно производной.

Введение параметра.
Читать: [Ф] §8, решить задачи 267, 271, 277, 284.
Уравнения Лагранжа и Клеро.
Читать: [Ф] §8, решить задачи 287, 292.

Лекция k2-m1-02. Линейные уравнения первого порядка.

7.25 Однородные линейные уравнения.

7.25.1 Линейные уравнения первого порядка.

1. Линейное однородное уравнение первого порядка. Понятие общего решения. Принцип суперпозиции.
2. Линейное однородное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение.
3. Линейное однородное уравнение первого порядка с переменными коэффициентами. Общее решение.

7.26 Неоднородные линейные уравнения.

4. Линейное неоднородное уравнение первого порядка.
5. Метод вариации постоянной.

Читать: [Ф] §5, решить задачи 136, 139, 140, 145, 149.

6. Уравнение Бернулли.

Читать: [Ф] §5, решить задачи 151, 153, 154, 155, 156.

Лекция k2-m1-03. Уравнения старших порядков.

7.27 Уравнения старших порядков.

7.27.1 Уравнения старших порядков общего вида.

1. Метод понижения порядка.

Читать: [Ф] §10, решить задачи 421, 422, 423, 425, 429, 437, 455, 459.

7.27.2 Однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами.

1. Линейное однородное уравнение. Принцип суперпозиции.
2. Комплексные числа. Арифметические действия над комплексными числами. Модуль и аргумент числа. Тригонометрическая и экспоненциальная записи комплексного числа. Решение квадратных уравнений в комплексных числах.
3. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.
4. Характеристические показатели и частные решения.
5. Общее решение линейного неоднородного уравнения.
6. Методы нахождения частных решений неоднородного уравнения.
7. Решение однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Читать: [Ф] §11, решить задачи 511, 517, 518, 527, 531.

7.27.3 Неоднородные линейные уравнения.

8. Решение дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида.

Читать: [Ф] §11, решить задачи 533, 534, 537, 538.

9. Решение неоднородных уравнений. Метод вариации постоянных.

Читать: [Ф] §11, решить задачи 575, 577.

10. Задача Коши.

Читать: [Ф] §11, решить задачи 582, 586.

11. Уравнения Эйлера.

Читать: [Ф] §11, решить задачи 589, 590, 592.

Лекция k2-m1-04. Однородные линейные системы.

7.28 Системы дифференциальных уравнений.

7.28.1 Линейная система общего вида.

1. Понятие системы. Примеры задач экономического содержания. Матрица системы.
2. Понятие решения системы.
3. Начальные значения. Задача Коши.
4. Общее решение линейной однородной системы. Принцип суперпозиции.
5. Общее решение линейной неоднородной системы.

Читать: [Ф] §14.

7.28.2 Однородные линейные системы с постоянными коэффициентами.

1. Характеристические показатели и частные решения.
2. Общее решение линейной однородной системы с постоянными коэффициентами.
3. Линейная однородная система с двумя неизвестными.

Читать: [Ф] §14, решить задачи 786, 789, 793, 794.

4. Линейная однородная система с тремя неизвестными.

Читать: [Ф] §14, решить задачи 796, 797, 800, 804.

5. Фундаментальная матрица решений, общее решение.

Лекция k2-m1-05. Неоднородные системы.

7.28.3 Неоднородные линейные системы.

1. Решение неоднородной системы с правой частью специального вида.
   Читать: [Ф] §14, решить задачи 826, 829, 831, 834.
2. Метод вариации постоянных.
   Читать: [Ф] §14, решить задачи 846, 847, 848.
3. Система в матричной форме.
   Читать: [Ф] §14, решить задачи 851, 852, 855, 856.

Лекция k2-m1-06. Устойчивость точек покоя.

7.29 Устойчивость точек покоя.

1. Понятие точки покоя.
   Читать: [Ф] §15, решить задачи 882, 883, 884.
2. Понятие устойчивой и неустойчивой точки покоя.
   Читать: [Ф] §15, решить задачи 890, 891, 892.

3. Исследование устойчивости линейной системы с постоянными коэффициентами.
4. Классификация точек покоя.
   Читать: [Ф] §16, решить задачи 961, 962, 963, 964, 965, 966.
   Читать: [Ф] §16, решить задачи 971, 972, 973, 974, 975, 976.
5. Устойчивость по первому приближению.
   Читать: [Ф] §15, решить задачи 899, 900, 905.
6. Метод Ляпунова.
   Читать: [Ф] §15, решить задачи 923, 924.
7. Устойчивость точки покоя дифференциального уравнения.
   Читать: [Ф] §15, решить задачи 932, 933.

7.30 Автономные нелинейные системы.

1. Общие понятия и свойства. Решение системы, фазовая траектория.
   Читать: [Ф] §17, решить задачи 1001-1008.
2. Положения равновесия, циклы. Устойчивые и неустойчивые положения равновесия.
   Читать: [Ф] §17, решить задачи 1021-1028.
3. Исследование нелинейных автономных систем вблизи положений равновесия по линейному приближению.
4. Приложения к исследованию экономических моделей.

Лекция k2-m1-07. Разностные уравнения и системы.

7.31 Разностные уравнения.

1. Примеры математических моделей в экономике, описываемых разностными уравнениями.

2. Разностные уравнения первого порядка. Решение уравнения, начальные условия, задача Коши.

3. Линейное уравнение первого порядка. Арифметическая и геометрическая прогрессии, метод вариации постоянной.

4. Разностные уравнения второго порядка. Решение уравнения, начальные значения.

5. Линейные разностные уравнения. Принцип суперпозиции и алгоритм построения общего решения линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами.

6. Структура общего решения линейного неоднородного уравнения. Методы нахождения частного решения линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами.

7.32 Разностные системы.

1. Системы линейных разностных уравнений. Матрица системы, решение системы, начальные условия.

2. Линейная однородная система. Принцип суперпозиции и фундаментальная матрица решений, общее решение.

3. Методы решения систем линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Критерии устойчивости нулевого решения линейной однородной системы.

4. Структура общего решения линейной неоднородной системы. Частные решения.

5. Количественный и качественный анализ нелинейных разностных уравнений.

6. Приложения к исследованию экономических моделей.

Лекция k2-m1-08. Линейные и нелинейные краевые задачи.

7.33 Линейные краевые задачи.

1. Понятие краевой задачи. Принцип суперпозиции.

3. Построение решения.

Читать: [Ф] §13, решить задачи 751, 752, 755. .

4. Функция Грина.

Читать: [Ф] §13, решить задачи 764, 765, 767. .

8 Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

Государственный университет **Факультет бизнес-информатики** **Высшая школа экономики**
Кафедра высшей математики на факультете экономики
2008-2009 **Задачи и вопросы по математике** **Модули 1-4**

Типовые задачи, разбираемые на лекциях и на семинарах и входящие в программу зачета и экзамена

1. Укажите бесконечно малые и бесконечно большие функции при $x \to +\infty$ и при $x \to 0$. **(1)** $f(x) = \operatorname{tg} x$, **(2)** $f(x) = \sin x$, **(3)** $f(x) = x \sin x$, **(4)** $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, **(5)** $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, **(6)** $f(x) = \ln x$, **(7)** $f(x) = x \ln x$, **(8)** $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, **(9)** $f(x) = x^{-1}$, **(10)** $f(x) = \operatorname{arctg} x$, **(11)** $f(x) = \frac{x}{\operatorname{arctg} x}$, **(12)** $f(x) = x^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$, **(13)** $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, **(14)** $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+5}$.

2. Является ли верным утверждение: **(1)** $x = o(x^2)$ при $x \to 0$, **(2)** $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$, **(3)** $x^{-1} = o(x^{-2})$ при $x \to +\infty$, **(4)** $x^{-2} = o(x^{-1})$ при $x \to +\infty$, **(5)** $(\ln x)^{-1} = o(x)$ при $x \to 0$, **(6)** $(\ln x)^{-1} = o(x^{-1})$ при $x \to +\infty$, **(7)** $x^{-1} = o((\ln x)^{-1})$ при $x \to +\infty$, **(8)** $\frac{1}{x \ln x} = o(\frac{1}{x})$ при $x \to +\infty$, **(9)** $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$ при $x \to 0$, **(10)** $\sin x = x + o(x^2)$ при $x \to 0$, **(11)** $\ln(1-x) = -x + o(x^2)$ при $x \to 0$, **(12)** $\ln(1-x) = -x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ при $x \to 0$, **(13)** $\ln(1+x) = x + o(x^2)$ при $x \to +\infty$, **(14)** $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ при $x \to +\infty$, **(15)** $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ при $x \to 0$, **(16)** $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ при $x \to +\infty$, **(17)** $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ при $x \to 0$, **(18)** $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = o(x^{-1})$ при $x \to +\infty$.

3. При каких α и β является верным утверждение $f(x) = \alpha + \beta x + o(x)$ при $x \to 0$, если **(1)** $f(x) = (1+x)^2$, **(2)** $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}-1}{x}$, **(3)** $f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$, **(4)** $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, **(5)** $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, **(6)** $f(x) = \frac{e^x-1}{x}$. Тот же вопрос для утверждения **(7)** $\sin x = \alpha x + \beta x^3 + o(x^3)$, **(8)** $\arcsin x = \alpha x + \beta x^3 + o(x^3)$. **(9)** $\ln(1+x) = \alpha x + \beta x^2 + o(x^2)$.

4. Используя формулы $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$, найдите такие A, b, C, D, что является верным утверждение **(1)** $\sqrt{\cos x} = A + Bx + Cx^2 + o(x^3)$ при $x \to 0$, **(2)** $\frac{1}{1+\sin x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$, **(3)** $\sin(\operatorname{tg} 2x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$,

5. Используя формулы $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$, найдите такие A, b, C, D, что является верным утверждение **(1)** $\operatorname{tg}(2\sin x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$, **(2)** $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$.

6. Используя формулы $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$, найдите такие A, b, C, D, что является верным утверждение **(1)** $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$, **(2)** $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$.

7. При каких α и β является верным утверждение $f(x) = \alpha + \beta x + o(x)$ при $x \to 0$, если **(1)** $f(x) = (1+x)^2$, **(2)** $f(x) = (1+x)^{-1}$, **(3)** $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}-1}{x}$, **(4)** $f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$, **(5)** $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, **(6)** $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, **(7)** $f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x}$. Тот же вопрос для утверждения **(8)** $\sin x = \alpha x + \beta x^3 + o(x^3)$, **(9)** $\operatorname{arctg} x = \alpha x + \beta x^3 + o(x^3)$,

8. Используя тригонометрические формулы, найдите **(1)** $\lim_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a}$, **(2)** $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(a+x) - 2\cos a + \cos(a-x)}{x^2}$, **(3)** $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x - 3\sin x}{x^3}$, **(4)** $\lim_{x \to 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{x^2}$.

9. Найдите **(1)** $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$, **(2)** $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[12]{x}-1}$, **(3)** $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$, **(4)** $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+13}-4}{x-3}$, **(5)** $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+13}-4}{\sqrt{x+6}-3}$, **(6)** $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+8}-2}$, **(7)** $\lim_{x \to 0} \frac{\ln \cos 2x}{\ln \cos 3x}$. **(8)** $\lim_{x \to 0} \frac{\ln \sin 3x}{\ln \sin 2x}$.

10. Найдите **(1)** $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$, **(2)** $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt{9+x}}{x}$, **(3)** $\lim_{x \to +\infty}(x - \sqrt{x^2-x})$, **(4)** $\lim_{x \to +\infty}(\sqrt{x^2+3x+2} - \sqrt{x^2-x-2})$, **(5)** $\lim_{x \to +\infty} x(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-2})$, **(6)** $\lim_{x \to +\infty} x^2(\sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt[3]{x^3-2})$, **(7)** $\lim_{x \to +\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2})$, **(8)** $\lim_{x \to +\infty} x\sqrt{x}(\sqrt{x-1} - 2\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$, **(9)** $\lim_{x \to +\infty} x^3(\sqrt{x^2-1} - 2x + \sqrt{x^2+1})$.

11. Найдите **(1)** $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^2 x}{x}$, **(2)** $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, **(3)** $\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^{123}}{x^{123}}$, **(4)** $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{2^x}$, **(5)** $\lim_{x \to +\infty} \frac{x \ln x}{x}$.

12. Найдите **(1)** $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n}$, **(2)** $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n}$, **(3)** $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n^{0,01}}$, **(4)** $\lim_{n \to +\infty} \frac{(\ln n)^{17}}{n^{0,01}}$, **(5)** $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2^n}$, **(6)** $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^{2006}}{(1{,}001)^n}$, **(7)** $\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^n}$, **(8)** $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^{2006}}{n!}$, **(9)** $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^{2006}}{n^n}$, **(10)** $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n!}$, **(11)** $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n^n}$.

13. Найдите, используя правило Лопиталя. **(1)** $\lim_{x \to +0} x \ln x$, **(2)** $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$, **(3)** $\lim_{x \to +0} x^{1/x}$, **(4)** $\lim_{x \to 1-0} \frac{\arcsin x - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x}}$, **(5)** $\lim_{x \to 2} \frac{2^x - x^2}{x-2}$.

14. Найдите, используя правило Лопиталя, **(1)** $\lim_{x \to e} \frac{e^x - x^e}{x-e}$, **(2)** $\lim_{x \to e} \frac{e^{2x} - x^{2e}}{(x-e)^2}$, **(3)** $\lim_{x \to 1} \frac{e^{e^2 x} - (ex)^{e^2}}{(x-1)^2}$. **(4)** $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}$, **(5)** $\lim_{x \to 0} \frac{e^{\cos x} - e}{x^2}$.

Государственный университет **Факультет бизнес-информатики** **Высшая школа экономики**
Кафедра высшей математики на факультете экономики
2008-2009 **Задачи и вопросы по математике** **Модули 1-4**

15. Используя формулу первого замечательного предела, найдите **(1)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$, **(2)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}$, **(3)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{3x}$, **(4)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$, **(5)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}$, **(6)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-\sin x}{x}$, **(7)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} x}{x}$, **(8)** $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-2\cos 2x+\cos x}{x^2}$, **(9)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$.

16. Используя формулы $\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)$, $\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$, $\operatorname{tg} x = x+\frac{x^3}{3}+o(x^4)$, найдите **(1)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2\sin x}{x^3}$, **(2)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin 3x-\sin 4x}{x^3}$, **(3)** $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}$, **(4)** $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\cos 3x-2\cos 2x}{x^2}$, **(5)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 3x-3\operatorname{tg} x}{x^3}$, **(6)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 3x-\operatorname{tg} 4x}{x^3}$, **(7)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$.

17. Найдите **(1)** $\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x}$, **(2)** $\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x^2}$, **(3)** $\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\cos\frac{1}{x}-1\right)$, **(4)** $\lim_{x\to+\infty} x^3\left(\sin\frac{1}{x}-\operatorname{tg}\frac{1}{x}\right)$,

18. Найдите **(1)** $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}$, **(2)** $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}$, **(3)** $\lim_{x\to 0}\left(1-3x\right)^{2/x}$, **(4)** $\lim_{x\to 0}\left(1-2x\right)^{3x}$, **(5)** $\lim_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{1/x^2}$, **(6)** $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{1/x^2}$, **(7)** $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{1/x^2}$, **(8)** $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$, **(9)** $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{1/x^2}$, **(10)** $\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{n}$.

19. Найдите **(1)** $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n}$, **(2)** $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^{4n}$, **(3)** $\lim_{n\to+\infty}\left(1+n\right)^{1/n}$.

20. Найдите производную: **(1)** $f(x)=x$, **(2)** $f(x)=x^2$, **(3)** $f(x)=2x^3+3x^2+6x+12$, **(4)** $f(x)=x^\pi$, **(5)** $f(x)=\sqrt{x}$, **(6)** $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, **(7)** $f(x)=\frac{1}{x^2}$, **(8)** $f(x)=\sqrt{x-1}$, **(9)** $f(x)=\sin x$, **(10)** $f(x)=\operatorname{tg} x$, **(11)** $f(x)=\sin(2x)$, **(12)** $f(x)=\ln x$, **(13)** $f(x)=\log_2 x$, **(14)** $f(x)=e^x$, **(15)** $f(x)=\pi^x$, **(16)** $f(x)=2^{-x}$, **(17)** $f(x)=\arcsin x$, **(18)** $f(x)=\arcsin 2x$.

21. Найдите производную: **(1)** $f(x)=\frac{x}{\sin x}$, **(2)** $f(x)=\frac{2x+1}{x+2}$, **(3)** $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$, **(4)** $f(x)=x^2\sin x$, **(5)** $f(x)=x\cos x$, **(6)** $f(x)=e^x\cos x$, **(7)** $f(x)=\sqrt{x}\operatorname{tg} x$, **(8)** $f(x)=x^3\sin 2x$, **(9)** $f(x)=x\ln x$, **(10)** $f(x)=\frac{x}{\ln x}$, **(11)** $f(x)=x^2\cdot 2^x$, **(12)** $f(x)=\frac{e^x}{x}$, **(13)** $f(x)=x\arcsin x$, **(14)** $f(x)=\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

22. Найдите производную: **(1)** $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, **(2)** $f(x)=\sin\sqrt{x}$, **(3)** $f(x)=\ln(2\sqrt{e^x})$, **(4)** $f(x)=\arcsin\sqrt{x}$, **(5)** $f(x)=\sqrt{\operatorname{arctg} x}$, **(6)** $f(x)=e^{\sqrt{-x}}$, **(7)** $f(x)=\left|x^2-5x+6\right|$.

23. Найдите $f^{(n)}(x)$, если **(1)** $f(x)=x^m$, $m<n$, $m,n\in\mathcal{N}$, **(2)** $f(x)=x^m$, $m=n$, $m,n\in\mathcal{N}$, **(3)** $f(x)=x^m$, $m>n$, $m,n\in\mathcal{N}$, **(4)** $f(x)=e^x$, **(5)** $f(x)=e^{2x}$, **(6)** $f(x)=xe^x$, **(7)** $f(x)=xe^{-x}$, **(8)** $f(x)=x^2e^x$, **(9)** $f(x)=\sqrt{x}$, **(10)** $f(x)=\ln x$, **(11)** $f(x)=\ln(x^2+x)$, **(12)** $f(x)=\ln\frac{2x-3}{3x-2}$, **(13)** $f(x)=x\ln x$, **(14)** $f(x)=x^2\ln x$, **(15)** $f(x)=\sin(x)$, **(16)** $f(x)=\sin(3x)$, **(17)** $f(x)=x\sin(x)$, **(18)** $f(x)=x\sin(2x)$, **(19)** $f(x)=x^2\cos(2x)$.

24. Найдите первую производную и первый дифференциал функции **(1)** $f(x)=x^2-6x+5$, **(2)** $f(x)=x^3$, **(3)** $f(x)=\ln x$, **(4)** $f(x)=\sqrt{x}$, **(5)** $f(x)=e^{-x}$, **(6)** $f(x)=xe^{-x}$, **(7)** $f(x)=\sin x$, **(8)** $f(x)=x\sin x$, **(9)** $f(x)=\sin(x^2)$, **(10)** $f(x)=\operatorname{arctg} x$, **(11)** $f(x)=\arcsin x$, **(12)** $f(x)=\arcsin\sqrt{x}$.

25. Найдите вторую производную и второй дифференциал функции **(1)** $f(x)=x^2-6x+5$, **(2)** $f(x)=x^3$, **(3)** $f(x)=\ln x$, **(4)** $f(x)=\sqrt{x}$, **(5)** $f(x)=e^{-x}$, **(6)** $f(x)=xe^{-x}$, **(7)** $f(x)=\sin x$, **(8)** $f(x)=x\sin x$, **(9)** $f(x)=\sin(x^2)$, **(10)** $f(x)=\operatorname{arctg} x$, **(11)** $f(x)=\arcsin x$, **(12)** $f(x)=\arcsin\sqrt{x}$.

26. Найдите **(a)** df, **(b)** d^2f, **(c)** $f(x)+df+\frac{1}{2}d^2f$, **(d)** $f(x+dx)$, если **(1)** $f(x)=2x+3$, $x=2$, $dx=3$, **(2)** $f(x)=x^3$, $x=1$, $dx=1$, **(3)** $f(x)=x^3$, $x=1$, $dx=0{,}1$, **(4)** $f(x)=\ln x$, $x=1$, $dx=1$, **(5)** $f(x)=\sqrt{x}$, $x=16$, $dx=9$, **(6)** $f(x)=\sqrt{1+x}$, $x=1$, $dx=0{,}1$, **(7)** $f(x)=e^x$, $x=\ln 10$, $dx=\ln 2$, **(8)** $f(x)=\sin x$, $x=\frac{\pi}{6}$, $dx=\frac{\pi}{6}$, **(9)** $f(x)=\arcsin x$, $x=\frac{1}{2}$, $dx=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$.

27. Вычислите **(a)** df, **(b)** d^2f, **(c)** $f(x)+df+\frac{1}{2}d^2f$, **(d)** $f(x+dx)$, сравните значения **(c)** и **(d)** с помощью калькулятора, если **(1)** $f(x)=2x+3$, $x=2$, $dx=3$, **(2)** $f(x)=x^3$, $x=1$, $dx=1$, **(3)** $f(x)=\ln x$, $x=1$, $dx=1$, **(4)** $f(x)=\sqrt{x}$, $x=100$, $dx=21$, **(5)** $f(x)=\sin x$, $x=0$, $dx=1$, **(6)** $f(x)=\arcsin x$, $x=0$, $dx=\frac{1}{2}$.

28. Вычислите **(a)** df, **(b)** $f(x)+df$, **(c)** $f(x+dx)$, сравните значения **(b)** и **(c)** с помощью калькулятора, если **(1)** $f(x)=\sqrt{x}$, $x=100$, $dx=21$, **(2)** $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x=8$, $dx=19$, **(3)** $f(x)=\sin x$, $x=\frac{\pi}{6}$, $dx=\frac{\pi}{6}$, **(4)** $f(x)=\operatorname{arctg} x$, $x=0$, $dx=1$, **(5)** $f(x)=\arcsin x$, $x=\frac{1}{2}$, $dx=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$.

29. Найдите d^nf, если **(1)** $f(x)=x^3$, $n=2$, **(2)** $f(x)=x^3$, $n=3$, **(3)** $f(x)=x^3$, $n=4$, **(4)** $f(x)=x^4$, $n=3$, **(5)** $f(x)=\frac{1}{x}$, **(6)** $f(x)=\ln x$, **(7)** $f(x)=x\ln x$, **(8)** $f(x)=\sqrt{x}$, **(9)** $f(x)=\sqrt{x}$, $n=3$, $x=4$, $dx=5$, **(10)** $f(x)=e^x$, **(11)** $f(x)=e^x$, $n=2006$, $x=\ln 36$, $dx=\frac{1}{2}$, **(12)** $f(x)=\sin x$, $n=2004$, **(13)** $f(x)=\sin x$, $n=2005$, **(14)** $f(x)=\sin x$, $n=2006$, **(15)** $f(x)=\sin x$, $n=2007$, **(16)** $f(x)=\cos x$, $n=2007$, $x=\frac{\pi}{3}$, $dx=\frac{1}{2}$, **(17)** $f(x)=x\sin x$, $n=8$, **(18)** $f(x)=x^2\cos x$, $n=9$.

30. Используя формулу конечных приращений, дайте оценку величины
$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)\in\left[(b-a)\inf_{(a;b)}f'(x);\ (b-a)\sup_{(a;b)}f'(x)\right]$, если
(1) $f(x)=\frac{1}{x}$, $a=99$, $b=101$. **(2)** $f(x)=\frac{1}{x}$, $a=1$, $b=1{,}001$. **(3)** $f(x)=\sqrt{x}$, $a=16$, $b=25$.
(4) $f(x)=\operatorname{arctg} x$, $a=9$, $b=10$. **(5)** $f(x)=\operatorname{arctg} x$, $a=1000$, $b=1001$. **(6)** $f(x)=\sin x$, $a=\frac{\pi}{6}$, $b=\frac{\pi}{3}$.
(7) $f(x)=\arcsin x$, $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{\sqrt{2}}$. **(8)** $f(x)=\frac{\sin}{x}$, $a=0{,}1$, $b=0{,}2$. **(9)** $f(x)=x^{1001}$, $a=1$, $b=1{,}001$.

31. Найдите значение многочлена Тейлора с центром $x_0=0$ указанного порядка n в указанной точке x, если **(1)** $f(x)=(2+x)^3$, $x=1$, $n=3$. **(2)** $f(x)=(1+x)^{2006}$, $x=1$, $n=2005$. **(3)** $f(x)=e^x$, $x=2$, $n=4$.

(4) $f(x) = xe^x$, $x = 2$, $n = 4$. **(5)** $f(x) = \sin x$, $x = 1$, $n = 5$. **(6)** $f(x) = \cos x$, $x = 2$, $n = 4$.
(7) $f(x) = \sqrt{1-x}$, $x = 0{,}36$, $n = 2$. **(8)** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, $x = 0,64$, $n = 2$. **(9)** $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x = 1$, $n = 2006$.
(10) $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $x = 1$, $n = 2006$. **(11)** $f(x) = \ln(1-x)$, $x = 1$, $n = 5$. **(12)** $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$, $x = 1$, $n = 3$.
(13) $f(x) = \arcsin(x)$, $x = 1$, $n = 3$.

32. Найдите значение многочлена Тейлора с центром $x_0 = 0$ указанного порядка n в указанной точке x, если **(1)** $f(x) = (2+x)^2$, $x = 1$, $n = 2$. **(2)** $f(x) = x^7$, $x = 1$, $n = 5$. **(3)** $f(x) = e^{-x}$, $x = 2$, $n = 3$.
(4) $f(x) = xe^{-x}$, $x = 1$, $n = 2$. **(5)** $f(x) = \sin x$, $x = 3$, $n = 5$. **(6)** $f(x) = \cos x$, $x = \frac{1}{2}$, $n = 2$.
(7) $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x = 0{,}21$, $n = 2$. **(8)** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$, $x = 0,44$, $n = 2$. **(9)** $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x = \frac{1}{2}$, $n = 3$.
(10) $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $x = \frac{1}{3}$, $n = 7$. **(11)** $f(x) = \ln(1+x)$, $x = 1$, $n = 5$. **(12)** $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$, $x = \sqrt{3}$, $n = 3$.
(13) $f(x) = \arcsin(x)$, $x = \frac{1}{2}$, $n = 3$.

33. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x) = \frac{x}{x}$, **(2)** $f(x) = \frac{1}{x}$, **(3)** $f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-4)}$, **(4)** $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}$, **(5)** $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2+x+1}$, **(6)** $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$, **(7)** $f(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(x-3)(x-4)(x-5)}$,

34. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x) = \operatorname{tg} x$, **(2)** $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, **(3)** $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$, **(4)** $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$, **(5)** $f(x) = \frac{x}{\operatorname{tg} x}$, **(6)** $f(x) = \operatorname{tg} x \cos x$, **(7)** $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, **(8)** $f(x) = \operatorname{tg}\frac{3\pi x}{1+x^2}$,

35. Классифицируйте точки разрыва: **(1)** $f(x) = \sin\frac{1}{x} \cdot \ln|x|$, **(2)** $f(x) = e^{-1/x}$, **(3)** $f(x) = (1+x)^{1/x}$,
(4) $f(x) = (1+\frac{1}{x})^x$, **(5)** $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$, **(6)** $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$, **(7)** $f(x) = x^{17}e^{-1/x}$, **(8)** $f(x) = e^{\operatorname{tg} x}$,
(9) $f(x) = \operatorname{tg}(e^x)$, **(10)** $f(x) = \ln|x|$, **(11)** $f(x) = x\ln|x|$, **(12)** $f(x) = \frac{x^2-1}{\ln|x|}$.

36. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, найдите вторую производную, исследуйте направление выпуклости, найдите точки перегиба, нарисуйте эскиз графика функции. **(1)** $f(x) = 3x^2 - 2x^3$, **(2)** $f(x) = 2x^6 - 3x^4$, **(3)** $f(x) = 3x^5 - 5x^3$, **(4)** $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, **(5)** $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, **(6)** $f(x) = x(4-x)^3$, **(7)** $f(x) = x^2(5-x)^3$, **(8)** $f(x) = (x-2)^3(10-x)^5$. **(9)** $f(x) = x(x-1)(x+1)$. **(10)** $f(x) = (4-x)\sqrt[3]{x}$, **(11)** $f(x) = (3-x)\sqrt{x}$.

37. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, найдите вторую производную, исследуйте направление выпуклости, найдите точки перегиба, нарисуйте эскиз графика функции. **(1)** $f(x) = \sqrt{x(2-x)}$, **(2)** $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{2-x}$, **(3)** $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{6-x}$.

38. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, найдите вторую производную, исследуйте направление выпуклости, найдите точки перегиба, нарисуйте эскиз графика функции. **(1)** $f(x) = x\ln x$, **(2)** $f(x) = \begin{cases} x\ln|x| \text{ при } x \neq 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \end{cases}$
(3) $f(x) = \begin{cases} |x|\ln|x| \text{ при } x \neq 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \end{cases}$ **(4)** $f(x) = x^2\ln x$, **(5)** $f(x) = x(\ln x)^2$, **(6)** $f(x) = \begin{cases} x^2\ln|x| \text{ при } x \neq 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \end{cases}$
(7) $f(x) = \begin{cases} x|x|\ln|x| \text{ при } x \neq 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \end{cases}$ **(8)** $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, **(9)** $f(x) = \frac{x}{\ln x}$,

39. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, найдите вторую производную, исследуйте направление выпуклости, найдите точки перегиба, нарисуйте эскиз графика функции. **(1)** $f(x) = xe^{-x}$, **(2)** $f(x) = x^2e^{-x}$, **(3)** $f(x) = x^3e^{-x}$, **(4)** $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$, **(5)** $f(x) = \sqrt[3]{x}e^{-x}$.

40. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, найдите вторую производную, исследуйте направление выпуклости, найдите точки перегиба, нарисуйте эскиз графика функции. $f(x) = x + \frac{1}{x}$, **(1)** $f(x) = 4x + \frac{9}{x}$, **(2)** $f(x) = \frac{2}{x^2+1}$, **(3)** $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$, **(4)** $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$, **(5)** $f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$, **(6)** $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, **(7)** $f(x) = \frac{3}{x^2+x+1}$.

41. Найдите наклонные асимптоты (правостороннюю и левостороннюю), **(1)** $f(x) = x\ln\frac{x+2}{x}$, **(2)** $f(x) = x^2\ln\frac{x+2}{x}$,

42. Найдите множество всех предельных точек последовательности **(1)** $x_n = \frac{n-1}{n}$, **(2)** $x_n = \sin\frac{\pi n}{6}$, **(3)** $x_n = (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n}$, **(4)** $y_1 = 0$, $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{n}$, $x_n =$ дробная часть(y_n). **(5)** $x_n = \overline{a_1}$, если в десятичной записи $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}$. **(6)** $x_n = \overline{a_1 a_0}$, если в десятичной записи $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}$. **(7)** 1; 1; 2; 1; 2; 3; 1; 2; 3; 4;…. Найдите верхний и нижний пределы этих последовательностей.

43. Найдите **(1)** $\sum_{n=0}^{+\infty}(0{,}5)^n$, **(2)** $\sum_{n=0}^{+\infty}(-0{,}5)^n$, **(3)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$, **(4)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$, **(5)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, **(6)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

44. Найдите частичные суммы рядов **(1)** $\sum_{k=0}^{+\infty}2^k$, **(2)** $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$, **(3)** $\sum_{k=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{3}{3k-1}\right)$, **(4)** $\sum_{k=1}^{+\infty}(\sin(k+1) - \sin(k))$, докажите что эти ряды расходятся.

45. Используя интегральный признак сходимости, исследуйте сходимость **(1)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$, **(2)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, **(3)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$, **(4)** $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n}$, **(5)** $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$.

46. Найдите **(1)** $\int dx$, **(2)** $\int x dx$, **(3)** $\int x^7 dx$, **(4)** $\int\frac{dx}{x}$, **(5)** $\int\frac{dx}{x^2}$, **(6)** $\int\sqrt{x}\,dx$, **(7)** $\int\sqrt[3]{x}\,dx$, **(8)** $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}$, **(9)** $\int\frac{dx}{\cos^2 x}$, **(10)** $\int\frac{dx}{\cos x}$, **(11)** $\int\frac{dx}{\sin x}$, **(12)** $\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$, **(13)** $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$, **(14)** $\int\frac{dx}{4+x^2}$, **(15)** $\int\frac{x\,dx}{4+x^2}$.

47. Найдите, интегрируя по частям, **(1)** $\int x^3(1-x)^7\,dx$, **(2)** $\int xe^{-x}\,dx$, **(3)** $\int x^2e^x\,dx$, **(4)** $\int x\sin x\,dx$, **(5)** $\int x^2\cos x\,dx$, **(6)** $\int x\ln x\,dx$, **(7)** $\int\operatorname{arctg} x\,dx$, **(8)** $\int x\arcsin x\,dx$,

48. Найдите, используя метод замены переменной, **(1)** $\int\frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$, **(2)** $\int\frac{(\operatorname{arctg} x)^3}{1+x^2}dx$, **(3)** $\int\frac{\cos(\ln x)}{x}dx$, **(4)** $\int x\cos(x^2)\,dx$, **(5)** $\int\frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$, **(6)** $\int\frac{\sin(\operatorname{arctg} x)}{1+x^2}dx$, **(7)** $\int\frac{\ln x}{x}dx$, **(8)** $\int xe^{-x^2}dx$, **(9)** $\int\frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

49. Найдите **(1)** $\int\frac{dx}{1-x^2}$, **(2)** $\int\frac{x\,dx}{1-x^2}$, **(3)** $\int\frac{dx}{x^2-5x+6}$, **(4)** $\int\frac{xdx}{x^2-5x+6}$, **(5)** $\int\frac{(2x-3)dx}{x^2-5x+6}$, **(6)** $\int\frac{x^2dx}{x^2-5x+6}$, **(7)** $\int\frac{x^3dx}{x^2-5x+6}$, **(8)** $\int\frac{dx}{(x-2)^2}$, **(9)** $\int\frac{xdx}{(x-2)^2}$, **(10)** $\int\frac{dx}{x^2+x+1}$, **(11)** $\int\frac{xdx}{x^2+x+1}$, **(12)** $\int\frac{dx}{e^x-1}$, **(13)** $\int\frac{e^x dx}{e^x-1}$, **(14)** $\int\frac{e^x dx}{e^{2x}-1}$,

50. **(1)** Интегрируя по частям $\int\frac{1}{1+x^2}dx$, найдите $\int\frac{1}{(1+x^2)^2}dx$. **(2)** Интегрируя по частям $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, найдите $\int\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}dx$. **(3)** Интегрируя по частям $\int\frac{1}{(1+x^2)^2}dx$, найдите $\int\frac{1}{(1+x^2)^3}dx$. **(4)** Интегрируя по частям $\int\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}dx$, найдите $\int\frac{1}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}dx$.

51. Найдите, интегрируя по частям два раза, **(1)** $\int e^x\sin x\,dx$, **(2)** $\int e^x\cos x\,dx$, **(3)** $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$, **(4)** $\int e^{-3x}\cos 2x\,dx$, **(5)** $\int\sin(\ln x)\,dx$, **(6)** $\int\cos(\ln x)\,dx$. **(7)** $\int x\sin(\ln x)\,dx$, **(8)** $\int x\cos(\ln x)\,dx$.

52. Оцените значение выражения $(1+x)^m$, используя тождество $(1+x)^m = e^{m\ln(1+x)}$. Для оценки $\ln(1+x)$ используйте многочлен Тейлора $P_2 = x-\frac{x^2}{2}$. **(1)** $(1{,}01)^2$, **(2)** $(1{,}01)^{100}$, **(3)** $(0{,}99)^{200}$, **(4)** $(1{,}01)^{100}-(1{,}02)^{50}$, **(5)** $(0{,}99)^{100}-(0{,}98)^{50}$,

53. Оцените величину остаточного члена формулы Тейлора $R_{n+1}(x|x_0) = f(x)-P_n(x|x_0)$, $P_n(x|x_0) = f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, если **(1)** $f(x)=\sin x$, $x_0=0$, $x=1$, $n=5$. **(2)** $f(x)=\sin x$, $x_0=0$, $x=\frac{1}{2}$, $n=5$. **(3)** $f(x)=\sin x$, $x_0=0$, $x=2$, $n=5$. **(4)** $f(x)=e^x$, $x_0=0$, $x=2$, $n=6$. **(5)** $f(x)=\ln(1+x)$, $x_0=0$, $x=\frac{1}{2}$, $n=4$. **(6)** $f(x)=\frac{1}{1-x}$, $x_0=0$, $x=\frac{1}{2}$, $n=4$.

54. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым. Найдите **(e)** внутренность, **(f)** границу, **(g)** $\star$ множество всех предельных точек, **(h)** замыкание, **(i)** выпуклую оболочку указанного множества. Каждый раз мы указываем пространство, подмножеством которого является даное множество.

(1) Отрезок на плоскости (без концов), **(2)** Шар (вместе со сферой), **(3)** Звезда (пятиугольная) на плоскости (включая внутренность), **(4)** Отрезок на плоскости (с концами), **(5)** Круг на плоскости (вместе с окружностью), **(6)** Звезда (пятиугольная) на плоскости (без внутренности), **(7)** Круг на плоскости (без окружности), **(8)** Треугольник на плоскости (включая внутренность), **(9)** Треугольник на плоскости (без внутренности), **(10)** Шар (без сферы). **(11)** Буква М русского алфавита. **(12)** Буква Г русского алфавита.

55. Является ли указанное множество точек **(a)** связным, **(b)** ограниченным, **(c)** открытым, **(d)** замкнутым. Найдите **(e)** внутренность, **(f)** границу, **(g)** $\star$ множество всех предельных точек, **(h)** замыкание, **(i)** выпуклую оболочку указанного множества.

Множество, состоящее из всех точек на поскости с координатами $(x;y)$, для которых **(1)** $x^2+y^2=1$, **(2)** $x^2+y^2>1$, **(3)** $|x|+|y|\leqslant 1$, **(4)** $\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 2,\\ -1<x<1,\end{cases}$ **(5)** $x^2+y^2<1$, **(6)** $|x|+|y|\geqslant 1$, **(7)** $1\leqslant|x|+|y|<2$, **(8)** $\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 2,\\ -|x|\leqslant y\leqslant|x|,\end{cases}$ **(9)** $x^2+y^2\leqslant 1$, **(10)** $x^2+y^2\geqslant 1$, **(11)** $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$, **(12)** $1<x^2+y^2<4$, **(13)** $1\leqslant x^2+y^2<4$, **(14)** $|x|+|y|=1$, **(15)** $|x|+|y|<1$, **(16)** $|x|+|y|>1$, **(17)** $1\leqslant|x|+|y|\leqslant 2$, **(18)** $x+y=1$, **(19)** $\begin{cases}x+y=1,\\ -1\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$ **(20)** $\begin{cases}x+y=1,\\ -1<x<1,\end{cases}$ **(21)** $\begin{cases}x^2+y^2=2,\\ -1<x<1,\end{cases}$ **(22)** $\begin{cases}x^2+y^2=2,\\ -1\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$ **(23)** $\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 2,\\ -|x|<y<|x|,\end{cases}$ **(24)** $x^2+9y^2=9\bigcup 9x^2+y^2=9$, **(25)** $\begin{cases}x^2+9y^2\leqslant 9,\\ 9x^2+y^2\leqslant 9,\end{cases}$ **(26)** $\begin{cases}x^2+9y^2<9,\\ 9x^2+y^2\leqslant 9,\end{cases}$ **(27)** $\begin{cases}x^2+9y^2<9,\\ 9x^2+y^2<9,\end{cases}$

56. Является ли указанное множество точек **(a)** ограниченным, **(b)** открытым, **(c)** замкнутым. Найдите **(d)** внутренность, **(e)** границу, **(f)** Множество всех предельных точек, **(g)** замыкание, **(h)** выпуклую оболочку указанного множества.

Множество точек $(x_n;y_n)$, $n\in N$ (все натуральные числа), если **(1)** $x_n=\cos\frac{\pi}{n}$, $y_n=\sin\frac{\pi}{n}$. **(2)** $x_n=\cos\frac{\pi n}{2}$, $y_n=\sin\frac{\pi n}{2}$. **(3)** $x_n=\frac{1}{n}$, $y_n=\frac{1}{n}$. **(4)** $x_n=\cos\frac{\pi n}{3}$, $y_n=\sin\frac{\pi n}{3}$. **(5)** $x_n=\cos\frac{\pi n}{4}$, $y_n=\sin\frac{\pi n}{4}$. **(6)** $x_n=\cos\frac{\pi n}{6}$, $y_n=\sin\frac{\pi n}{6}$. **(7)** $x_n=\cos\frac{\pi n}{8}$, $y_n=\sin\frac{\pi n}{8}$. **(8)** $x_n=\cos\frac{2\pi n}{5}$, $y_n=\sin\frac{2\pi n}{5}$. **(9)** $x_n=\cos\frac{\pi n}{4}$, $y_n=\sin\frac{\pi n}{8}$. **(10)** $x_n=\cos n$, $y_n=\sin n$. **(11)** $x_1=1$, $y_1=0$, **(12)** $x_{n+1}=-y_n$, $y_{n+1}=x_n$.

57. Найдите **(a)** Предел, если таковой существует, **(b)** Множество всех предельных точек указанной последовательности.

(1) $x_n = \frac{n+1}{n}$, $y_n = \frac{n-1}{n}$. **(2)** $x_n = n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$, $y_n = \sqrt{n} \operatorname{tg} \frac{2}{\sqrt{n}}$. **(3)** $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $y_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.
(4) $x_n = \sin\frac{1}{n}$, $y_n = \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}$, $n > 1$. **(5)** $x_n = \frac{3n+2}{2n+3}$, $y_n = \frac{4n-1}{3n+1}$. **(6)** $x_n = n \sin\frac{1}{n}$, $y_n = n^2 \sin\frac{1}{n^2}$.
(7) $x_n = \left(1-\frac{2}{n}\right)^{3n}$, $y_n = \left(1+\sin\frac{1}{3n}\right)^{2n}$. **(8)** $x_n = \operatorname{tg}\frac{\pi n+1}{4n-1}$, $y_n = 2^{x_n}$. **(9)** $x_n = \frac{5n+6}{6n+5}$, $y_n = \frac{n-1}{n+2}$.
(10) $x_n = n^2 \operatorname{tg}\frac{1}{n^2}$, $y_n = n \sin\frac{1}{n^2}$. **(11)** $x_n = \left(1-\sin 5n\right)^{3n}$, $y_n = \left(1+\operatorname{tg}\frac{1}{n}\right)^{2n}$. **(12)** $x_n = \sqrt[n]{n}$, $y_n = \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$.
(13) $x_n = \cos\frac{\pi}{n}$, $y_n = \sin\frac{\pi}{n}$. **(14)** $x_n = \cos\frac{\pi n}{4}$, $y_n = \sin\frac{\pi n}{4}$. **(15)** $x_n = \frac{2n+3}{2n-1}$, $y_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}$, $n > 3$.
(16) $x_n = \operatorname{tg}\frac{\pi n+1}{3n-1}$, $y_n = \log_3(x_n)$. **(17)** $x_n = \cos\frac{\pi n}{4}$, $y_n = \sin\frac{\pi n}{8}$. **(18)** $x_n = \cos n$, $y_n = \sin n$.
(19) $x_n = \left(\frac{1+n}{en}\right)^{n^2}$, $y_n = \left(\frac{1-n}{en}\right)^{n^2}$. **(20)** $x_n = \cos\left(\frac{\pi n}{4}+\frac{1}{n}\right)$, $y_n = \sin\left(\frac{\pi n}{4}+\frac{1}{n}\right)$.
(21) $x_n = \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)+\frac{1}{n}$, $y_n = \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)+\frac{1}{n}$. **(22)** $x_n = \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)+\frac{1}{n}\cos n$, $y_n = \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)+\frac{1}{n}\sin n$.

58. Нарисуйте семейство линий равного уровня функции **(1)** $u = x+y$, **(2)** $u = \frac{y}{x}$, **(3)** $u = xy$, **(4)** $u = \frac{x^2+y^2}{2x}$, **(5)** $u = 2x+3y$, **(6)** $u = \frac{x^2}{y}$, **(7)** $u = \frac{x^2+y^2}{2y}$, **(8)** $u = x^2+y^2$, **(9)** $u = x-y$, **(10)** $u = \frac{y^2}{x}$, **(11)** $u = x^2+xy+y^2$, **(12)** $u = x^2+2xy+y^2$, **(13)** $u = x^2+3xy+y^2$, **(14)** $u = \frac{x^2+y^2}{2x+2y}$, Значения уровней подберите самостоятельно.

59. Нарисуйте семейство линий равного уровня функции **(1)** $u = |x|+|y|$, **(2)** $u = |x|+y$, **(3)** $u = x-|y|$, **(4)** $u = |x|-|y|$, **(5)** $u = |x+y|+|x-y|$, **(6)** $u = |x+y|-|x-y|$,
Значения уровней подберите самостоятельно.

60. Нарисуйте семейство линий равного уровня функции **(1)** $u = \min(x, y+y)$, **(2)** $u = \min(x^2+y^2,\ 2xy)$, **(3)** $u = \max(x^2-2xy+y^2,\ 1-2xy)$. **(4)** $u = \min(x, x-y)$, **(5)** $u = \min(x^2+2xy+y^2,\ 2xy+1)$, **(6)** $u = \max(x^2-2xy+y^2,\ x^2-1+y^2)$. **(7)** $u = \min(y-x, y)$, **(8)** $u = \min(y+y^2, x^2+y^2)$, **(9)** $u = \min(2y+2x, x^2+2x+y)$, **(10)** $u = \min(x+y, x-y)$, **(11)** $u = \min(x^2+y^2,\ 1-2xy)$, Значения уровней подберите самостоятельно.

61. Найдите (если существуют) повторные пределы $\lim_{x\to a}\left[\lim_{y\to b} u(x,y)\right]$, $\lim_{y\to b}\left[\lim_{x\to a} u(x,y)\right]$, если $a = 0$, $b = 0$, **(1)** $u(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$, **(2)** $u(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$, **(3)** $u(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, **(4)** $u(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, **(5)** $u(x,y) = \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$, **(6)** $u(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$, **(7)** $u(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$, **(8)** $u(x,y) = y\ln(x^2+y^2)$, **(9)** $u(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$, **(10)** $u(x,y) = \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}$, **(11)** $u(x,y) = (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$, **(12)** $u(x,y) = \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$, **(13)** $u(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\ln(x^2+y^2)}$, **(14)** $u(x,y) = \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$, **(15)** $u(x,y) = \frac{e^{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$, **(16)** $u(x,y) = \frac{\sin(xy)}{xy}$, **(17)** $u(x,y) = \frac{\sin(xy)}{x}$, **(18)** $u(x,y) = \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$, **(19)** $u(x,y) = (x^2+y^2)\cdot\sin\frac{1}{x^2+y^2}$, **(20)** $u(x,y) = x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}$,

62. Найдите предел в бесконечно удаленной точке или докажите, что предел не существует, **(1)** $u(x,y) = xe^{-x}+ye^{-y}$, **(2)** $u(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$, **(3)** $u(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, **(4)** $u(x,y) = e^{-x}+e^{-y}$, **(5)** $u(x,y) = \frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$, **(6)** $u(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$, **(7)** $u(x,y) = ye^{-x}+xe^{-y}$, **(8)** $u(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^4+y^4}$, **(9)** $u(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$, **(10)** $u(x,y) = \frac{xy}{x^2+xy+y^2}$, **(11)** $u(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$, **(12)** $u(x,y) = e^{-x^2}$, **(13)** $u(x,y) = ye^{-x^2}$, **(14)** $u(x,y) = \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$, **(15)** $u(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$, **(16)** $u(x,y) = (x^2+y^2)\operatorname{tg}\frac{1}{x^2+y^2}$, **(17)** $u(x,y) = (x^2+y^2)\arcsin\frac{1}{x^2+y^2}$, **(18)** $u(x,y) = (x^2+y^2)\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2+y^2}$,

63. Найдите частные производные первого порядка, градиент. Найдите первый дифференциал. Напишите уравнение нормали и уравнение касательной плоскости к поверхности $z = u(x,y)$ в точке M_0 с координатами $(x_0; y_0)$. Найдите производную по направлению вектора $\vec{L}$ в точке M_0. **(1)** $u = 2x+3y$, $M_0 = (1;\ 1)$, $\vec{L}_1 = (3; -2)$, $\vec{L}_2 = (2; 3)$. **(2)** $u = xy$, $M_0 = (1; 1)$, $\vec{L}_1 = (1;\ 1)$, $\vec{L}_2 = (1;\ -1)$, **(3)** $u = x^3+y^3-3xy$, $M_0 = (1; 1)$, $\vec{L} = (1;\ 2)$. **(4)** $u = 3x-2y$, $M_0 = (1;\ 1)$, $\vec{L}_1 = (3; -2)$, $\vec{L}_2 = (2; 3)$. $\vec{L}_3 = (-3; 2)$, **(5)** $u = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $M_0 = (2; 3)$, $\vec{L}_1 = (3; -2)$, $\vec{L}_2 = (2; 3)$. **(6)** $u = xy(3-x-y)$, $M_1 = (1; 1)$, $\vec{L}_1 = (1; 1)$. $M_2 = (0; 0)$, $\vec{L}_{2a} = (1; 1)$, $\vec{L}_{2b} = (1; -1)$, $\vec{L}_{2c} = (1; 0)$. **(7)** $u = x^y$, $M_0 = (1; 1)$, $\vec{L} = (3; -2)$; **(8)** $u = xy^2(4-x-2y)$, $M_0 = (1; 1)$, $\vec{L} = (1; 1)$. **(9)** $u = xy(3-x-y)$, $M_0 = (2; 3)$, $\vec{L} = (1; -1)$. **(10)** $u = x^2+2y^2-2x^4-y^4$, $M_1 = (1; 0{,}5)$, $\vec{L}_1 = (1; -1)$. $M_2 = (1; 1)$, $\vec{L}_2 = (1; 1)$. **(11)** $u = xy\ln(x^2+y^2)$, $M_0 = ((2e)^{-0{,}5};\ (2e)^{-0{,}5})$, $\vec{L} = (3;\ -2)$; $M_0 = (2^{-0{,}5};\ 2^{-0{,}5})$, $\vec{L} = (1;\ -1)$; **(12)** $u = (x^2+y^2)^2e^{-x^2-y^2}$, $M_0 = (1;\ 1)$, $\vec{L} = (3;\ -2)$.

64. Найдите частные производные первого порядка, градиент. Найдите первый дифференциал. Найдите производную по направлению вектора $\vec{L}$ в точке с заданными координатами (x_0, y_0, z_0).
(1) $u = 2x+3y+4x$, $M_0 = (1; 1; 1)$, $\vec{L}_1 = (2; 3; 4)$, $\vec{L}_2 = (1; 6; -5)$. **(2)** $u = x^2+y^2+z^2$, $M_0 = (2; 3; 4)$, $\vec{L}_1 = (2; 3; 4)$, $\vec{L}_2 = (1; 6; -5)$. **(3)** $u = x^3+x+y+xyz$, $M_0 = (1; 1; -1)$, $\vec{L} = (1; 1; 1)$, **(4)** $u = xy^2z^3(7-x-2y-3z)$, $M_0 = (1; 1; 1)$, $\vec{L} = (1; 1; 1)$.

65. Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x)$, если $f(t)$ – дифференцируемая функция, **(1)** $u(x) = f(2x+1)$, **(2)** $u(x) = f(x^2)$, **(3)** $u(x) = e^{f(x)}$, **(4)** $u(x) = f(3x-2)$, **(5)** $u(x) = f(e^x)$, **(6)** $u(x) = \ln f(x)$, **(7)** $u(x) = f(\ln x)$, **(8)** $u(x) = f(f(x))$, **(9)** $u(x) = \sqrt{f(x)}$,

66. Найдите дифференциал первого порядка функции **(1)** $p^{\ln(x^2+y^2)\cdot\arcsin\frac{y}{x}}$, **(2)** $(\sin x)^q$, **(3)** $(\sin x)^{\ln(x^2+y^2)\cdot\arcsin\frac{y}{x}}$, **(4)** $p^{(x^2+y^2)\cdot\sin\ln\frac{y}{x}}$, **(5)** $(\arcsin x)^q$, **(6)** $(\arcsin x)^{(x^2+y^2)\cdot\sin\ln\frac{y}{x}}$, **(7)** $p^{\cos(x^2+y^2)\cdot\ln\frac{2xy}{x^2+y^2}}$, **(8)** $(\operatorname{arctg} x)^q$, **(9)** $(\operatorname{arctg} x)^{\cos(x^2+y^2)\cdot\ln\frac{2xy}{x^2+y^2}}$,

67. Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x)$, если $f(t,s)$ – дифференцируемая функция, **(1)** $u(x)=f(x,2x)$, **(2)** $u(x)=\ln f(x,2x)$, **(3)** $u(x)=f(x^2,x^3)$, **(4)** $u(x)=e^{f(2x,x)}$, **(5)** $u(x)=f(3x-2,e^x)$, **(6)** $u(x)=\sin\big(f(3x-2,e^x)\big)$, **(7)** $u(x)=f(\sqrt{x},x)$,

68. Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x,y)$, если $f(t)$ – дифференцируемая функция, **(1)** $u(x,y)=f(x)+f(y)$, **(2)** $u(x,y)=f(x+y)$, **(3)** $u(x,y)=\frac{f(x)}{f(y)}$, **(4)** $u(x,y)=f(x^2+y^2)$, **(5)** $u(x,y)=f(xy)$, **(6)** $u(x,y)=f(x)f(y)$, **(7)** $u(x,y)=f(x)^{f(y)}$, **(8)** $u(x,y)=\log_{f(x)}f(y)$,

69. Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x,y)$, если $f(t,s)$ – дифференцируемая функция, **(1)** $u(x,y)=f(2x,3y)$, **(2)** $u(x,y)=f(x,y)\cdot f(y,x)$, **(3)** $u(x,y)=f(x+y,x-y)$, **(4)** $u(x,y)=f(x+y,x-y)\cdot f(x-y,x+y)$, **(5)** $u(x,y)=f(x,y)+f(y,x)$, **(6)** $u(x,y)=f(x,y)-f(y,x)$, **(7)** $u(x,y)=f(f(x,y),f(y,x))$, **(8)** $u(x,y)=f(x,y)^{f(x,y)}$, **(9)** $u(x,y)=\log_{f(x,y)}f(x,y)$,

70. Найдите дифференциалы первого и второго порядка сложной функции $u(...)$, если f – дважды число раз дифференцируемая функция всех своих переменных, **(1)** $u(x,y)=f(xy)$, **(2)** $u(x,y)=f(x+y)$, **(3)** $u(x,y)=\frac{f(x)}{f(y)}$, **(4)** $u(x,y)=f(x^2+y^2)$, **(5)** $u(x,y)=f(x+y,x-y)$, **(6)** $u(x)=f(x,x)$, **(7)** $u(x)=f(x,x^2,x^3)$, **(8)** $u(x,y)=f(x-y)+f(x+y)$. **(9)** $u(x,y)=f(x,y)-f(y,x)$. **(10)** $u(x,y)=\frac{f(x,y)}{f(y,x)}$.

71. Найдите дифференциал первого порядка сложной функции $u(...)$, если f,g,h – нужное число раз дифференцируемые функции всех своих переменных, **(1)** $u(x,y)=f(x)+g(y)$, **(2)** $u(x,y,z)=f(x,y)+f(y,z)+f(z,x)$, **(3)** $u(x,y,z)=f(x)+g(y)+h(z)$, **(4)** $u(x,y)=\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$. **(5)** $u(x,y)=f(x)g(y)$, **(6)** $u(x,y,z)=f(x)g(y)h(z)$, **(7)** $u(x,y)=f(x-y)+g(x+y)$. **(8)** $u(x,y)=f(x,y)+g(x,y)$. **(9)** $u(x,y)=f(x,y)\cdot g(x,y)$.

72. Найдите дифференциалы первого и второго порядка сложной функции $u(...)$, если f,g,h – нужное число раз дифференцируемые функции всех своих переменных, **(1)** $u(x,y)=f(x)g(y)$, **(2)** $u(x,y)=f(x)+g(y)$, **(3)** $u(x,y,z)=f(x)+g(y)+h(z)$, **(4)** $u(x,y,z)=f(x)g(y)h(z)$, **(5)** $u(x,y)=f(x-y)+g(x+y)$. **(6)** $u(x,y)=f(x,y)+g(x,y)$. **(7)** $u(x,y)=f(x,y)+g(y,x)$.

73. Найдите все точки возможного экстремума, проверьте выполнение достаточных условий: **(1)** $u(x,y)=x^2+y^2$, **(2)** $u(x,y)=x^2-y^2$, **(3)** $u(x,y)=x^2-xy+y^2$, **(4)** $u(x,y)=x^2-2xy+y^2$, **(5)** $u(x,y)=x^2-3xy+y^2$, **(6)** $u(x,y)=xy$, **(7)** $u(x,y)=xy^2$, **(8)** $u(x,y)=x^2y^2$, **(9)** $u(x,y)=x^3+y^3-3xy$, **(10)** $u(x,y)=xy(3-x-y)$, **(11)** $u(x,y)=x^2y^3(6-x-y)$, **(12)** $u(x,y)=xy\ln(1-x^2-y^2)$, **(13)** $u(x,y)=xy+\frac{50}{x}+\frac{20}{y}$, **(14)** $u(x,y)=(5-2x+y)e^{x^2-y}$, **(15)** $u(x,y)=(x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$, **(16)** $u(x,y)=xye^{-x^2/2-y^2/2}$, **(17)** $u(x,y)=x^3y^4e^{-x-y}$, **(18)** $u(x,y)=x^3y^4e^{-x-y^2}$, **(19)** $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, **(20)** $u(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$, **(21)** $u(x,y,z)=xyz$, **(22)** $u(x,y,z)=x^2y^2z^2$, **(23)** $u(x,y,z)=2x^2+2y^2+2z^2-xy-xz-yz$, **(24)** $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz$, **(25)** $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz$, **(26)** $u(x,y,z)=xy^2z^3(7-x-2y-3z)$, **(27)** $u(x,y,z)=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}$.

74. Найдите первую и вторую производные неявной функции $y=f(x)$, заданной уравнением $u(x,y)=0$. Найдите все точки возможного экстремума функции $f(x)$. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума в каждой точке возможного экстремеума (если таковые существуют). Не следует явно выражать y через x, даже если это возможно. **(1)** $u(x,y)=2x+3y-5$, **(2)** $u(x,y)=x^3+y^3-3xy$, **(3)** $u(x,y)=x^2+y^2-1$, **(4)** $u(x,y)=(x^2+y^2)^2-x^2y$, **(5)** $u(x,y)=x^4+y^4-1$, **(6)** $u(x,y)=xy-1$, **(7)** $u(x,y)=x^4+y^4+y-2$, $y>0$, **(8)** $u)x,y)=e^{x+y}+x+y-1$, **(9)** $u(x,y)=y^4+x^4+4x-5$, **(10)** $u(x,y)=(x^2+y^2)^2-xy^2$, **(11)** $u(x,y)=(x^2+y)^2-8(x^2-y)$, **(12)** $u(x,y)=x^3+y^3+y-2$, $y>0$, **(13)** $u(x,y)=(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)$, $x>0$, **(14)** $u(x,y)=(x^2+y^2)^2-4xy$, $x>0$, **(15)** $u(x,y)=8x^2y-x^4-y^4$, **(16)** $u(x,y)=x^y-y^x$. Не следует пытаться получить решение уравнения $u(x,y)=0$ в явном виде, даже если это возможно.

75. Найдите первые и вторые производные неявной функции $z=f(x,y)$, заданной уравнением $u(x,y,z)=0$. Найдите все точки возможного экстремума функции $f(x,y)$. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума в каждой точке возможного экстремума (если таковые существуют). **(1)** $u=x^2+y^2-z$, **(2)** $u=x^2+y^2+z^2-1$, **(3)** $u=z^3+x+y+xyz$, **(4)** $u=x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2$, **(5)** $u=(x^2+y^2+z^2)^2-8(x^2+y^2-z^2)$, **(6)** $u=(x^2+y^2+z^2)^3-27x^2y^2z$. Не следует пытаться получить решение уравнения $u(x,y,z)=0$ в явном виде, даже если это возможно.

76. Используя метод Лагранжа, найдите все точки экстремума функции $u(x,y)$ при условии $f(x,y)=0$. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума: **(1)** $u=x+y$, $f=x^2+y^2-2$; **(2)** $u=x^2+y^2$, $f=x+y-2$; **(3)** $u=xy$, $f=x+y-2$; **(4)** $u=x+y$, $f=xy-1$; **(5)** $u=x+y$, $f=x^2+y^2-2x$; **(6)** $u=x+y$,

$f = x^2 - 2y$; **(7)** $u = y - x^2$, $f = x^2 + y^2 - 4$. **(8)** $u = xy$, $f = x^3 + y^3 - 2xy$. **(9)** $u = xy^2$, $f = x + 2y - 3$. **(10)** $u = xy^2$, $f = x + y - 3$. **(11)** $u = x^2y^3$, $f = 2x + 3y - 5$. **(12)** $u = x^2y^3$, $f = x + y - 900$.

77. Используя метод Лагранжа, найдите все точки экстремума функции $u(x,y,z)$ при условии $f(x,y,z) = 0$. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума: **(1)** $u = x^2y^3z^4$, $f = 2x + 3y + 4z - 9$. **(2)** $f = x + y + z$, $u = xyz - 1$. **(3)** $u = x + y + z$, $f = x^2 + y^2 + z^2 - 3$. **(4)** $u = xyz$, $f = x + y + z - 3$. **(5)** $u = x^2 + y^2 + z^2$, $f = x + y + z - 3$. **(6)** $u = x^2 + y^2 + z^2$, $f = xyz - 1$. **(7)** $u = xyz$, $f = x^2 + y^2 + z^2 - 3$. **(8)** $u = x + y + z$, $f = x^2 + y^2 + z^2 - 3$. **(9)** $u = 2x + 3y + 4z$, $f = x^2y^3z^4 - 1$. **(10)** $u = x^2y^3z^4$, $f = x + y + z - 18$, $x > 0 \bigcap y > 0 \bigcap z > 0$.

78. Найдите производную функции **(1)** $f(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,dt$, **(2)** $f(x) = \int_x^1 \arcsin\sqrt{t}\,dt$, **(3)** $f(x) = \int_0^{x^2} \ln(\frac{\cos t}{1+t^3})\,dt$, **(4)** $f(x) = \int_{\mathrm{arctg}\,x}^{\cos x} e^{-t^2}\,dt$.

79. Найдите **(1)** $\int_0^2 x(2-x)\,dx$, **(2)** $\int_0^2 x^3(2-x)^2\,dx$, **(3)** $\int_0^\pi x\sin x\,dx$, **(4)** $\int_1^e x\ln x\,dx$, **(5)** $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$, **(6)** $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, **(7)** $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$, **(8)** $\int_2^3 \frac{dx}{x^2-6x+5}$, **(9)** $\int_0^\pi e^x \sin x\,dx$, **(10)** $\int_1^{e^\pi} \sin\ln x\,dx$, **(11)** $\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \frac{dx}{\sin x}$,

80. Запишите указанный повторный интеграл в виде двойного интеграла, нарисуйте область интегрирования, запишите в виде повторного интеграла, поменяв порядок интегрирования, найдите значение:
(1) $\int_0^1 \left(\int_0^x x^2y\,dy\right)dx$, **(2)** $\int_0^1 \left(\int_y^1 xy\,dx\right)dy$, **(3)** $\int_0^\pi \left(\int_0^{\sin x} 2y\,dy\right)dx$, **(4)** $\int_0^2 \left(\int_0^{x(2-x)} xy\,dy\right)dx$,
(5) $\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} 2y\,dy\right)dx$, **(6)** $\int_0^1 \left(\int_{\arcsin x}^{\pi/2} \cos y\,dy\right)dx$.

81. Найдите значение, интегрируя в полярных координатах, **(1)** $\iint_G (x^2+y^2)\,dx\,dy$, $G = \{x^2+y^2 \leqslant 6\}$, **(2)** $\iint_G xy\,dx\,dy$, $G = \{1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\} \bigcap \{\frac{\pi}{6} \leqslant \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} \leqslant \frac{\pi}{3}\} \bigcap x > 0$, **(3)** $\iint_G (x^2+y^2)\,dx\,dy$, $G = \{1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\} \bigcap \{\frac{\pi}{6} \leqslant \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} \leqslant \frac{\pi}{3}\} \bigcap x > 0$, **(4)** $\iint_G (x^2-y^2)\,dx\,dy$, $G = \{1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\} \bigcap \{\frac{\pi}{6} \leqslant \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} \leqslant \frac{\pi}{4}\} \bigcap x > 0$,

82. Найдите площадь фигуры, ограниченной линией **(1)** $x^2+y^2 = 2x$, **(2)** $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2 \bigcap x > 0$, **(3)** $(x^2+y^2)^2 = 4xy \bigcap x > 0 \bigcap y > 0$.

83. Пусть $y_1(x) \leqslant y_2(x)$ при $x \in [a;\, b]$, область D определена неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$,
$M[1] \stackrel{\text{def}}{=} \int_D 1dxdy$, $M[1] = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy$, $M[1] = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))dx$, $M[x] \stackrel{\text{def}}{=} \int_D xdxdy$,
$M[x] = \int_a^b x\big(y_2(x) - y_1(x)\big)dx$, $M[x^2] = \int_a^b x^2\big(y_2(x) - y_1(x)\big)dx$, $\langle x\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M[x]}{M[1]}$, $\langle x^2\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M[x^2]}{M[1]}$, $Dx \stackrel{\text{def}}{=} \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$,
$M[y] \stackrel{\text{def}}{=} \int_D ydxdy$, $M[y] = \frac{1}{2}\int_a^b \big(y_2^2(x) - y_1^2(x)\big)dx$, $\langle y\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M[y]}{M[1]}$, $\mathrm{VOX}[1] \stackrel{\text{def}}{=} \int_D 2\pi ydxdy$,
$\mathrm{VOX}[1] = \pi\int_a^b \big(y_2^2(x) - y_1^2(x)\big)dx$, $\mathrm{VOX}[x] \stackrel{\text{def}}{=} \int_D 2\pi xydxdy$, $\mathrm{VOX}[x] = \pi\int_a^b x\big(y_2^2(x) - y_1^2(x)\big)dx$, $\mathrm{VOX}\,\langle x\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{VOX[x]}{VOX[1]}$,
$\mathrm{VOX}[y] = 0$, $\mathrm{VOX}[y^2] \stackrel{\text{def}}{=} \int_D 2\pi y^3dxdy$, $\mathrm{VOX}[y^2] = \frac{\pi}{2}\int_a^b \big(y_2^4(x) - y_1^4(x)\big)dx$, $\mathrm{VOY}[1] \stackrel{\text{def}}{=} \int_D 2\pi xdxdy$,
$\mathrm{VOY}[1] = 2\pi\int_a^b x\big(y_2(x) - y_1(x)\big)dx$, $\mathrm{VOY}[y] \stackrel{\text{def}}{=} \int_D 2\pi xydxdy$, $\mathrm{VOY}[y] = \pi\int_a^b x\big(y_2^2(x) - y_1^2(x)\big)dx$,
$\mathrm{VOY}\,\langle y\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{VOY}[y]}{\mathrm{VOY}[1]}$, $\mathrm{VOY}[x] = 0$, $\mathrm{VOY}[x^2] \stackrel{\text{def}}{=} \int_D 2\pi x^3dxdy$, $\mathrm{VOY}[x^2] = 2\pi\int_a^b x^3\big(y_2(x) - y_1(x)\big)dx$. Вычислите все указанные величины для **(1)** $\rho(x) = 1$, $x \in [0;\, 1]$, **(2)** $\rho(x) = x$, $x \in [0;\, 1]$, **(3)** $\rho(x) = x^2$, $x \in [0;\, 12]$, **(4)** $\rho(x) = x(2-x)$, $x \in [0;\, 2]$, **(5)** $\rho(x) = x^2(3-x)$, $x \in [0;\, 3]$, **(6)** $\rho(x) = x^2(1-x^2)$, $x \in [0;\, 1]$, **(7)** $\rho(x) = \sin x$, $x \in [0;\, \pi]$, **(8)** $\rho(x) = \frac{3}{x^4}$, $x \in [1;\, 10^8]$, **(9)** $\rho(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x \in [10^{-8};\, 1]$, **(10)** $\rho(x) = e^{-x}$, $x \in [0;\, 1000]$,

84. Пусть интегрируемая функция $\rho(x)$ определена на $[a;\, b]$, $\rho(x) \geqslant 0$, $M[1] = \int_a^b \rho(x)dx$, $M[1] > 0$,
$M[x] \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b x\rho(x)dx$, $M[x^2] \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b x^2\rho(x)dx$, $\langle x\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M[x]}{M[1]}$, $\langle x^2\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M[x^2]}{M[x]}$, $Dx \stackrel{\text{def}}{=} \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$. Вычислите все указанные величины для **(1)** $\rho(x) = \sin x$, $x \in [0;\, \pi/2]$, **(2)** $\rho(x) = \mathrm{arctg}\,x$, $x \in [0;\, 1]$, **(3)** $\rho(x) = \arcsin x$, $x \in [0;\, 1]$, **(4)** $\rho(x) = e^{-x}$, $x \in [0;\, 1]$, **(5)** $\rho(x) = e^{-x}$, $x \in [0;\, 10^{12}]$, **(6)** $\rho(x) = \ln x$, $x \in [e^{-4};\, 1]$,

85. Пусть $f(x)$ - непрерывная функция на $[a;\, b]$, $f(x) > 0$, $x \in (a;\, b)$, область G на плоскости задана неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$. Определим числа $M[1] = \iint_G dx\,dy$, $M[x] = \iint_G x\,dx\,dy$, $M[x^2] = \iint_G x^2\,dx\,dy$, $M[y] = \iint_G y\,dx\,dy$, $M[y^2] = \iint_G y^2\,dx\,dy$, $< x > \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M[x]}{M[1]}$, $< y > \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M[y]}{M[1]}$. Запишите величины $M[1]$, $M[x]$, $M[x^2]$ в виде определенного интеграла. Вычислите все указанные величины для **(1)** $f(x) = 1$, $x \in [0;\, 1]$, **(2)** $f(x) = x$, $x \in [0;\, 2]$, **(3)** $f(x) = x(4-x)$, $x \in [0;\, 4]$, **(4)** $f(x) = \sin x$, $x \in [0;\, \pi]$, **(5)** $f(x) = \ln x$, $x \in [10^{-3};\, 1]$, **(6)** $f(x) = x^{-1}$, $x \in [10^{-3};\, 1]$, **(7)** $f(x) = e^{-x}$, $x \in [0;\, 1000]$. Обьясните физический смысл.

86. Пусть $f(x)$ – непрерывная функция на $[a;\, b]$, $f(x) > 0$, $x \in (a;\, b)$, область G на плоскости задана неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$, $\rho(x,y)$ – непрерывная функция в области G, $\rho(x,y) > 0$ внутри G. Определим числа $M[1] = \iint_G \rho(x,y)\,dx\,dy$, $M[x] = \iint_G x\cdot\rho(x,y)\,dx\,dy$, $M[x^2] = \iint_G x^2\cdot\rho(x,y)\,dx\,dy$, $M[y] = \iint_G y\cdot\rho(x,y)\,dx\,dy$, $M[y^2] = \iint_G y^2\cdot\rho(x,y)\,dx\,dy$, $< x > \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M[x]}{M[1]}$, $< y > \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M[y]}{M[1]}$. Вычислите все указанные величины для **(1)** $f(x) = 1$, $x \in [0;\, 1]$, $\rho(x,y) = x$; **(2)** $f(x) = x$, $x \in [0;\, 1]$, $\rho(x,y) = y$; **(3)** $f(x) = x$, $x \in [0;\, 2]$, $\rho(x,y) = xy$; **(4)** $f(x) = x(4-x)$, $x \in [0;\, 4]$, $\rho(x,y) = y$; Обьясните физический смысл.

Методические материалы по курсу математического анализа

А.А.Быков, boombook@yandex.ru, boombook.narod.ru

Т572 (2007-2008) **Модуль 1, неделя 8** **Вариант 1108-11**

Итоговая контрольная работа 1 модуля 1 курса

Контрольная работаvвариант 1108-11

1. Найдите производную функции $f(x) = \sin(3x)$.

2. Найдите производную функции $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{x-1}$ в точке $x = 5$.

3. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = x^4$ в точке $x = 2$ и найдите абсциссу точки, в которой касательная пересекает ось абсцисс.

4. Вычислите первый и второй дифференциалы функции $f(x) = \sqrt{15 + x}$, если $x = 10,\ dx = 3$.

5. Найдите $\lim_{n\to+\infty} \frac{8n+5}{2n+1}$.

6. Найдите $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$.

7. Найдите $\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+9}-4}{x-7}$.

8. Найдите $\lim_{x\to 0} \frac{3\sin x - \operatorname{tg} 3x}{x^3}$.

9. Найдите $\lim_{x\to 0}\left(1 + \sin 2x\right)^{\frac{3}{x}}$.

10. Укажите наибольшее значение параметра δ, при котором $\forall x : 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$. Сделайте это для следующих функции и параметров: $f(x) = 3^x,\ a = 4,\ b = f(a),\ \varepsilon = 1$.

11. Пусть $f(x) = \sin x - x$ и $x \to 0$, $f(x) = o(x^\alpha)$ означает $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0$, или, что то же самое, $\frac{f(x)}{x^\alpha} = o(1)$. Укажите все верные утверждения: **(a)** $f(x) = o(1)$. **(b)** $f(x) = o(x)$. **(c)** $f(x) = o(x^2)$. **(d)** $f(x) = o(x^3)$. **(e)** $f(x) = o(x^4)$. **(f)** $f(x) = o(x^5)$.

12. Сформулируйте определение: "Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$".

Методические материалы по курсу математического анализа

А.А.Быков, boombook@yandex.ru, boombook.narod.ru

Т577 (2007-2008) **Итоговая контрольная работа 2 модуля 1 курса** **Курс 1 Модуль 2 w16–v1**

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

1. Найдите $f'(x)$, если $f(x) = \left(\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}\right)^2$.

2. Найдите производную порядка n функции $f(x) = x^2 \ln x$.

3. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt[3]{4x}$, касающейся графика этой функции в точке с абсциссой $x = 16$. Найдите точки пересечения касательной с осями абсцисс и ординат.

4. Найдите df и $d^2 f$, если $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x = 16$ и $dx = 9$.

5. Найдите, используя правило Лопиталя, $\lim_{x\to e} \frac{e^{ex} - x^{e^2}}{(x-e)^2}$

6. Используя формулы Тейлора, найдите $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{arctg} 3x - 5x}{x^3}$

7. Используя формулу конечных приращений, оцените $f(b) - f(a)$, если $f(x) = \frac{30}{11}\sqrt{x}$, $a = 25$, $b = 36$.

8. Напишите выражение для многочлена Тейлора n-го порядка для функции $f(x) = e^x$ с центром $x_0 = 0$. Оцените величину остаточного члена в форме Лагранжа для $n = 6$, $x = 3$.

9. Нарисуйте эскиз графика функции $f(x) = 6x^2 - 2x^6$, найдите точки экстремума и точки перегиба.

10. Нарисуйте эскиз графика функции $f(x) = x^3 \ln x$.

11. Нарисуйте эскиз графика функции $f(x) = \sqrt[5]{\frac{(x-5)^7}{x^2}}$, найдите точки экстремума и наклонную асимптоту.

12. Банк начисляет $n\%$ на вложенный капитал каждый месяц на протяжении m месяцев. Найдите приближенно капитал в конце указанного периода, если в начале периода капитал составлял 10 тысяч условных единиц и заданы значения $n = 0{,}6$; $m = 50$. Используйте при необходимости таблицу (в которой проведено округление с точностью не хуже единицы последнего указанного десятичного разряда),

x	0,3	0,4	0,5	0,75	1	1,5	2	2,5	3	5
e^x	1,3499	1,4918	1,6487	2,1170	2,7183	4,4817	7,3891	12,182	20,086	148,41

Выполните оценку погрешности.

Методические материалы по курсу математического анализа

А.А.Быков, boombook@yandex.ru, boombook.narod.ru

Т601 (2007-2008) **Вариант 1407-21**

Государственный университет Высшая школа экономики Факультет бизнес-информатики
Экзамен за 3 и 4 модули 1 курса, январь-апрель 2008
Функции нескольких переменных и интегрирование (3 и 4 модули) Вариант 1407-21

1. Пусть $u(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2x}$, $u(0,y) = 0$. **(1)** Нарисуйте семейство линий равного уровня функции $u(x,y)$. **(2)** Является ли функция $u(x,y)$ непрерывной в точке $x = 0$, $y = 0$?

2. Пусть $u(x,y) = x^3 + y^6 - 3xy^2$. Найдите частные производные первого и второго порядков функции $u(x,y)$. Найдите du и d^2u. Напишите уравнение касательной плоскости к поверхности $z = u(x,y)$ в точке $M_0 = (x_0;\ y_0)$, $x_0 = 3$, $y_0 = 1$. Найдите все точки локального экстремума функции $u(x,y)$. Найдите du и d^2u в одной из точек локального экстремума.

3. Пусть $u(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^2y$. Найдите первый и второй дифференциалы функции $y = f(x)$, определяемой уравнением $u(x,y) = 0$. Найдите все точки возможного экстремума функции $y = f(x)$, расположенные в области $x^2 + y^2 > 0$. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума.

4. Решите методом Лагранжа задачу об экстремуме функции $u(x,y) = x^4 + y^2$ при условии $x^2y = 1$ в области $G = \{x > 0;\ y > 0\}$

5. **(1)** Найдите $\int 9\sqrt{x}\,\ln x\,dx$. **(2)** Найдите $\int_1^{e^2} 9\sqrt{x}\,\ln x\,dx$.

6. **(1)** Нарисуйте фигуру D на плоскости $(x;y)$, для которой $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} dy \int_y^{2y+1} dx\, f(x,y)$. **(2)** Найдите указанный интеграл для $f(x,y) = y^3$. **(3)** Выполните операцию перемены порядка интегрирования.

7. Пусть функция $z = f(x,y)$ задана уравнением $z^3 + 5xyz = x^5 + y^5 + 4z^5$. Найдите dz. Найдите все точки возможного экстремума функции $z = f(x,y)$. Найдите d^2z. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума.

8. Найдите $\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} (x^4 + y^4)\,dxdy$.

9. Найдите $M[1] = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $M[x] = \int_a^{+\infty} x f(x)\,dx$, $<x> = \frac{M[x]}{M[1]}$, для $f(x) = x^2e^{-3x}$, $a = 0$.

10. Найдите методом Лагранжа все точки экстремума функции $u(x,y,z)$ с условием $f(x,y,z) = 0$ для $u = x^2y^3z^4$, $f = x + y + z - 9$ в области $\{x > 0 \bigcap y > 0 \bigcap z > 0\}$.

11. Пусть $u(x,y) = \sqrt[3]{xy(x+y)}$. **(1)** Является ли данная функция непрерывной в точке $(0;\ 0)$? **(2)** Имеет ли данная функция частные производные первого порядка в точке $(0;\ 0)$? Если имеет, найдите их. **(3)** Верно ли, что данная функция имеет производную по любому направлению в точке $(0;\ 0)$? Если имеет, найдите производную по направлению $\vec{l} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$. **(4)** Верно ли, что производная по направлению $\vec{l}$ в точке $(0;\ 0)$ равна $(\operatorname{grad} u, \vec{l})$? **(5)** Верно ли, что $u(x,y) - x\frac{\partial u}{\partial x}(0;0) - y\frac{\partial u}{\partial y}(0;0) = o(\rho)$, где $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$? **(6)** Является ли функция $u(x,y)$ дифференцируемой в точке $(0;0)$?

12. Руководитель дома моды может нанять x менеджеров, y дизайнеров и z портных, при этом его прибыль пропорциональна величине $x^5y^3z^2$, если x,y,z выражены в сотнях человек. Однако, общая площадь помещения ограничена и при большом количестве работников они мешают друг другу. Поэтому его прибыль пропорциональна также величине $11 - 5x - 3y - 2z$, т.е. в конечном счете прибыль равна $x^5y^3z^2(11 - 5x - 3y - 2z)$. **(1)** Докажите, что максимальная прибыль получится при $x = y = z = 1$. **(2)** Используя первый и второй дифференциалы, оцените прибыль при $x = y = z = 1{,}02$. **(3)** В данный момент в доме моды работают 30 менеджеров, 30 дизайнеров и 30 портных, т.е. $x = y = z = 0{,}3$. Можно нанять еще Δx менеджеров, Δy дизайнеров и Δz портных, причем по финансовым соображениям $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = r^2$, где r – некоторое небольшое число. Какие значения должно иметь отношение $\Delta x : \Delta y : \Delta z$, чтобы прирост прибыли был максимален?

Методические материалы по курсу математического анализа

А.А.Быков, boombook@yandex.ru, boombook.narod.ru

Т706 (2008-2009) **Интегралы и ряды** **Вариант 0**

Государственный университет Высшая школа экономики

Факультет бизнес-информатики

Экзамен, курс 2 модуль 2, dec 2008 v11

1. При каких значениях α сходится $\int_1^{+\infty} x^{3-\alpha}dx$? Найдите этот интеграл.

2. **(1)** Найдите $\int 8x(\ln x)^2\,dx$. **(2)** Найдите $\int_0^1 8x(\ln x)^2\,dx$.

3. Найдите $\int_0^{+\infty} x^{41}e^{-x^6}\,dx$.

4. **(1)** При каких x сходится ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$? **(2)** Найдите сумму этого ряда.

5. Разложите функцию $\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ в степенной ряд с центром $x_0 = 0$.

6. Найдите $\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\,dx$ методом двукратного интегрирования по частям.

7. Найдите $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\sin x\,dx$ методом дифференцирования по параметру (предварительно введите параметр в нужном месте).

8. **(1)** Нарисуйте фигуру D на плоскости $(x;y)$, для которой $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^1 dy\int_{-2y}^{1-y} dx\,f(x,y)$.
(2) Найдите указанный интеграл для $f(x,y) = y^4$. **(3)** Выполните операцию перемены порядка интегрирования.

9. Найдите площадь фигуры $(x^2+y^2)^{12} \leqslant x^2y^{18}$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$

10. Пусть $\rho(x) = x^9(\ln x)^{20}$, $0 < x < 1$. **(1)** Найдите значение $M1 = \int_0^1 \rho(x)\,dx$, $Mx = \int_0^1 x\rho(x)\,dx$, $Mx^2 = \int_0^1 x^2\rho(x)\,dx$. **(2)** Найдите $<x>=\frac{Mx}{M1}$. **(3)** Найдите $<x^2>=\frac{Mx^2}{M1}$. **(4)** Найдите Dx. Оцените с точностью не хуже 5% без калькулятора.

11. Докажите, что функциональная последовательность $f_n(x) = \arcsin(x^n)$ на промежутке $x \in [-1;\,1]$ не является равномерно сходящейся

12. Докажите, что $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x$.

9 Порядок формирования оценок по дисциплине

Оценки за работу на семинарских и практических занятиях преподаватель выставляет в рабочую ведомость. Накопленная оценка по 10-ти балльной шкале за работу на семинарских занятиях определяется перед рубежным и итоговым контролем - $O_{аудиторная}$.

Оценки за самостоятельную работу студента (включая оценки за домашнее задание) преподаватель выставляет в рабочую ведомость. Накопленная оценка по 10-ти балльной шкале за самостоятельную работу определяется перед итоговым контролем – $O_{сам.\ работа}$.

Накопленная оценка за текущий контроль учитывает результаты студента по текущему контролю следующим образом:

$$O_{текущий} = 0{,}5 \cdot O_{аудиторная} + 0{,}5 \cdot O_{сам.\ работа}\ .$$

Способ округления накопленной оценки текущего контроля производится по правилам арифметики округления.

Результирующая оценка за рубежный контроль в форме зачета выставляется по следующей формуле, где $O_{зачет}$ – оценка за работу непосредственно на зачете:

$$O_{рубежный} = 0{,}8 \cdot O_{зачет} + 0{,}2 \cdot O_{текущий}.$$

Результирующая оценка за промежуточный контроль выставляется по следующей формуле:

$$O_{промежуточный} = 0{,}3 \cdot O_{кр1} + 0{,}3 \cdot O_{кр2} + 0{,}3 \cdot O_{кр3} + 0{,}1 \cdot O_{текущий}.$$

Способ округления накопленной оценки промежуточного контроля производится по правилам арифметики округления.

Результирующая оценка за итоговый контроль в форме экзамена выставляется по следующей формуле, где $O_{экзамен}$ – оценка за работу непосредственно на экзамене:

$$O_{итоговый} = 0{,}6 \cdot O_{экзамен} + 0{,}2 \cdot O_{рубежный} + 0{,}2 \cdot O_{промежуточный}$$

Способ округления накопленной оценки итогового контроля производится по правилам арифметики округления.

На пересдаче студенту не предоставляется возможность получить дополнительный балл для компенсации оценки за текущий контроль.

В диплом выставляется результирующая оценка по учебной дисциплине.

Уважаемые студенты, доброго времени суток!

Высылаю результаты вашей работы в прошедшем семестре.

Принципы выставления оценок были теми же, что и в первом семестре.

Оценка за контрольные работы - это среднее арифметическое 10-балльных оценок за мини-контрольные, округленное до ближайшего целого числа.

Оценка за работу в классе равна сумме баллов, выставлявшихся следующим образом: за первый полученный плюс студент получал плюс два балла (к изначальной единице), за каждый следующий плюс - плюс один балл (сумма, достигавшая 10, дальше не увеличивалась), каждый минус означал потерю одного балла.

Накопленная оценка равна округлённой до ближайшего целого значения взвешенной сумме 10-бальных оценок за контрольные работы и работу в классе с весами 0,7 и 0,3, соответственно.

Результаты лекционной контрольной работы учитывались следующим образом. За каждую из двух задач ставилось от 0 до 10 баллов. Если сумма этих баллов превышала 10, то накопленная оценка увеличивалась на 1 балл.

Оценка за экзаменационную контрольную работу формировалась следующим образом. Максимальное количество баллов, которое можно было получить за 4 задачу равно 20, за любую другую задачу - 10. Баллы суммировались. Оценка за экзамен равна частному от деления полученной суммы баллов на 10, округленному до ближайшего целого числа.

Итоговая оценка равна округлённой до ближайшего целого значения взвешенной сумме оценки за экзаменационную контрольную работу и накопленной оценки с весами 0,7 и 0,3, соответственно, при условии, что оценка за экзамен является зачетной (т.е. не ниже <4>). Если оценка за экзамен ниже зачетной, то итоговая оценка равна минимуму двух чисел: экзаменационной оценки и округленного значения взвешенной суммы экзаменационной и накопленной оценок.

В приложенном к настоящему письму файле вы найдет все свои оценки за все виды работ. Красным цветом выделены пропуски семинаров и неудовлетворительные итоги.

Проставление оценок будет проводиться в понедельник 25 июня. Во время проставления никаких дополнительных заданий для повышения оценок никому дано не будет. Присутствовать на проставлении необязательно.

Пересдача будет проходить в том же формате, что и экзамен. Промежуточная оценка не пересдается.

С уважением,

А.Н. Субочев

10 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

10.1 Основная литература

Базовые учебники

1. [МАВЗ] Математический анализ в вопросах и задачах, В.Ф.Бутузов, Н.Ч.Крутицкая, Г.Н.Медведев, А.А.Шишкин, 5 изд., М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 480с.
2. [ЗУМА] Задачи и упражнения по математическому анализу, И.А.Виноградова, С.Н.Олехник, А.А.Садовничий, изд-во МГУ, 1988.: – 416с.
3. *Романко В.К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления.– М.-С.Пб.: Физматлит, 2001.
4. *Романко В.К.*. Разностные уравнения – М.-С.Пб.: Физматлит, 2006.
5. *Романко В.К.*. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению *под редакцией* – М.-С.Пб.: Физматлит, 2002.
6. [Ф] *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 2000.

7. [Ильин Садовничий Сендов 1] Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ 1. М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1985.-662с.
8. [Ильин Садовничий Сендов 2] Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ 2. М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1987.-358с.

10.2 Дополнительная литература

9. [KL–1] W.Kaplan, D.Lewis. Calculus and linear algebra, Vol.1. University of Michigan, 2007.
10. [KL–2] W.Kaplan, D.Lewis. Calculus and linear algebra, Vol.2. University of Michigan, 2007.
11. [Stewart] J.Stewart. Calculus. University of Toronto, Brooks/Cole, 2008, 7-th.ed.
12. [Apostol-1] T.Apostol. Calculus, Vol.1. John Wiley, 1967, 7-th.ed.
13. [Apostol-2] T.Apostol. Calculus, Vol.2. John Wiley, 1969, 7-th.ed.
14. [Кудрявцев–1] Математический анализ в двух томах, том 1. 571 с.
15. [Кудрявцев–2] Математический анализ в двух томах, том 2. 409 с.
16. [Ильин, Позняк–1] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч.I, М.: Наука, 1999.
17. [Ильин, Позняк–2] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч.II, М.: Наука, 1999.
18. [Кудрявцев–К] Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. М.: Наука, 1989.
19. [Демидович] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1999.
20. [Ефимов, Демидович] под ред. Ефимова А.А., Демидовича Б.П. Сборник задач по математике ждя ВТУЗов, часть 1: 3-е изд. Наука, 1993.
21. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.