

## 1.13. Теоремы о непрерывных и дифференцируемых функциях

### 1.13.1. Формула Лагранжа

**С** Простые задачи для разбора на семинаре.

1. Используя формулу конечных приращений, дайте оценку величины

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi) \in [(b - a) \inf_{(a;b)} f'(x); (b - a) \sup_{(a;b)} f'(x)], \text{ если}$$

(1)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $a = 99$ ,  $b = 101$ . (2)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $a = 16$ ,  $b = 25$ . (3)  $f(x) = \ln x$ ,  $a = e^2$ ,  $b = e^3$ .

(4)  $f(x) = \sin x$ ,  $a = \frac{\pi}{6}$ ,  $b = \frac{\pi}{3}$ . (5)  $f(x) = \arcsin x$ ,  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

**Д** Простые задачи для самостоятельного решения.

2. Используя формулу конечных приращений, дайте оценку величины

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi) \in [(b - a) \inf_{(a;b)} f'(x); (b - a) \sup_{(a;b)} f'(x)], \text{ если}$$

(1)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ,  $a = \frac{10}{11}$ ,  $b = \frac{10}{9}$ . (2)  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $a = 8$ ,  $b = 27$ . (3)  $f(x) = \ln x$ ,  $a = 10$ ,  $b = 12,5$ .

(4)  $f(x) = \cos x$ ,  $a = \frac{\pi}{6}$ ,  $b = \frac{\pi}{3}$ . (5)  $f(x) = \arctg x$ ,  $a = 9$ ,  $b = 10$ .

**С** Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

3. Используя формулу конечных приращений, оцените  $f(b) - f(a)$ , если  $f(x) = 3x - x^3$ ,  $a = -1$ ,  $b = 1$ .

4. Используя формулу конечных приращений, оцените  $f(b) - f(a)$ , если  $f(x) = \frac{e^2}{e^2 - 1} \ln x$ ,  $a = e^3$ ,  $b = e^5$ .

5. Используя формулу конечных приращений, оцените  $f(b) - f(a)$ , если  $f(x) = \ln(1 + x^2)$ ,  $a = \frac{3}{4}$ ,  $b = \frac{3}{2}$ .

**Д** Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

6. Используя формулу конечных приращений, оцените  $f(b) - f(a)$ , если  $f(x) = 5x^3 - 3x^5$ ,  $a = -1$ ,  $b = 1$ .

7. Используя формулу конечных приращений, оцените  $f(b) - f(a)$ , если  $f(x) = 24 \arcsin x$ ,  $a = \frac{3}{5}$ ,  $b = \frac{4}{5}$ .

8. Используя формулу конечных приращений, оцените  $f(b) - f(a)$ , если  $f(x) = 3x^2 - x^3$ ,  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = \frac{3}{2}$ .

**С** Сложные задачи для разбора на семинаре.

9. Используя формулу конечных приращений, оцените  $f(b) - f(a)$ , если  $f(x) = x^2(5 - x)^3$ ,  $a = 0$ ,  $b = 5$ .

**Д** Сложные задачи для самостоятельного решения.

10. Используя формулу конечных приращений, оцените  $f(b) - f(a)$ , если  $f(x) = x^5(11 - x)^6$ ,  $a = 0$ ,  $b = 11$ .

### 1.13.2. Формула Коши

**С** Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

1. Используя обобщенную формулу конечных приращений (Коши),

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in \left[ \inf_{(a;b)} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}; \sup_{(a;b)} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \right]; \text{ дайте оценку величины (1) } \frac{b^3 - a^3}{b^2 - a^2}; a = 5, b = 6.$$

(2)  $\frac{\arctg b - \arctg a}{\ln(1+b^2) - \ln(1+a^2)}$ ,  $a = 10$ ,  $b = 11$ . (3)  $\frac{\ln b - \ln a}{b^2 - a^2}$ ,  $a = 101$ ,  $b = 99$ .

**Д** Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

2. Используя обобщенную формулу конечных приращений (Коши),

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in \left[ \inf_{(a;b)} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}; \sup_{(a;b)} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \right]; \text{ дайте оценку величины (1) } \frac{b^4-a^4}{b^2-a^2}; a = 5, b = 6.$$

(2)  $\frac{\ln b - \ln a}{\sqrt{b} - \sqrt{a}}$ ,  $a = 9, b = 16$ . (3)  $\frac{\ln b - \ln a}{\arctg b - \arctg a}$ ,  $a = \frac{3}{5}, b = \frac{4}{5}$ .

**1.13.3. Асимптотические формулы (повторение темы)**

**С** Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

1. Является ли верным утверждение: (1)  $(\ln x)^{-1} = o(x)$  при  $x \rightarrow 0$ , (2)  $x^{-1} = o((\ln x)^{-1})$  при  $x \rightarrow +\infty$ , (3)  $\ln(1-x) = -x + o(1)$  при  $x \rightarrow 0$ , (4)  $\ln(1-x) = -x + o(x^2)$  при  $x \rightarrow 0$ , (5)  $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$  при  $x \rightarrow 0$ , (6)  $\ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + o(x)$  при  $x \rightarrow 0$ , (7)  $\ln(1+x) = x + o(x^2)$  при  $x \rightarrow +\infty$ ,

**Д** Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

2. Является ли верным утверждение: (1)  $(\ln x)^{-1} = o(x^{-1})$  при  $x \rightarrow +\infty$ , (2)  $\frac{1}{x \ln x} = o(\frac{1}{x})$  при  $x \rightarrow +\infty$ , (3)  $\ln(1-x) = -x + o(x)$  при  $x \rightarrow 0$ , (4)  $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$  при  $x \rightarrow 0$ , (5)  $\ln(1+x) = 2x + 3x^2 + o(1)$  при  $x \rightarrow 0$ , (6)  $\frac{\ln(1+x)}{1+x} = o(1)$  при  $x \rightarrow +\infty$ ,

**1.13.4. Применение асимптотических формул для вычисления пределов**

**Соглашение об асимптотических формулах.** При решении задач этого и всех последующих разделов можно использовать формулы (везде  $x \rightarrow 0$ )

(1)  $\sin x = x + o(x)$ ,  $\sin x = x + o(x^2)$ ,  $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ ,  $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ ,

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$ ,  $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$ ,

(2)  $\arcsin x = x + o(x^2)$ ,  $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ ,  $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^6)$ ,

(3)  $\cos x = 1 + o(x)$ ,  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ ,  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$ ,

(4)  $\operatorname{tg} x = x + o(x^2)$ ,  $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$ ,  $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$ ,

(5)  $\operatorname{arctg} x = x + o(x^2)$ ,  $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$ ,  $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$ ,

(6)  $\frac{1}{1-x} = 1 + o(1)$ ,  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$ ,  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$ ,  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$ ,

(7)  $\frac{1}{1+x} = 1 + o(1)$ ,  $\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$ ,  $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$ ,  $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$ ,

(8)  $\sqrt{1+x} = 1 + o(1)$ ,  $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$ ,  $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ ,

(9)  $\sqrt{1-x} = 1 + o(1)$ ,  $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$ ,  $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ ,

(10)  $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} + o(x)$ ,  $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{2x^2}{27} + o(x^2)$ ,

(11)  $\sqrt[3]{1-x} = 1 - \frac{x}{3} + o(x)$ ,  $\sqrt[3]{1-x} = 1 - \frac{x}{3} - \frac{2x^2}{27} + o(x^2)$ ,

(12)  $\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} + o(x)$ ,  $\sqrt[n]{1-x} = 1 - \frac{x}{n} + o(x)$ ,  $\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} - \frac{(n-1)x^2}{2n^2} + o(x^2)$ ,

$\sqrt[n]{1-x} = 1 - \frac{x}{n} - \frac{(n-1)x^2}{2n^2} + o(x^2)$ ,

(13)  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ ,  $-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ ,

(14)  $e^x = 1 + x + o(x)$ ,  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ ,  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ ,  $e^{-x} = 1 - x + o(x)$ ,

$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ ,  $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ ,

(15)  $(1+x)^p = 1 + px + o(x)$ ,  $(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + o(x^2)$ ,

$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{6}x^3 + o(x^3)$  при  $x \rightarrow 0$ .

Эти формулы называются "асимптотическими формулами". Каждая из этих формул является также "формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано". Можно использовать формулы первого и второго замечательных пределов,  $\frac{\sin x}{x} = 1 + o(1)$  при  $x \rightarrow 0$ ,

$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e + o(1)$  при  $x \rightarrow 0$ ,  $(1+\frac{1}{x})^x = e + o(1)$  при  $x \rightarrow +\infty$ , а также формулы

$(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1 + o(1)$  при  $x \rightarrow +\infty$ ,  $x^{\frac{1}{x}} = 1 + o(1)$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Доказательство каждой из этих формул будет дано в соответствующем месте нашего курса.

**С Простые задачи для разбора на семинаре.**

1. Найдите, используя асимптотические формулы, (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$ , (2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2 \sin 3x)}{\sin(3 \sin 2x)}$ ;  
(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$ , (4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}$ , (5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin x}{x}$ , (6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x}{\sin 3x + \sin 2x}$ .  
2. Найдите, используя асимптотические формулы, (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - 2 \cos 2x + \cos x}{x^2}$ ,  
(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 5x - 5 \sin 3x}{x^3}$ , (3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 5x + 5 \sin 3x - \sin 30x}{x^3}$ , (4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$ , (5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x + \sin x - \sin 2x}{x^3}$ .

**Д Простые задачи для самостоятельного решения.**

3. Найдите, используя асимптотические формулы, (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{x}$ , (2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x}{x^2}$ ,  
(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 6x}{\operatorname{tg} 3x}$ , (4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(12x^2)}{\operatorname{tg}(3x^2)}$ , (5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin 2x}{x}$ , (6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x}$ .  
4. Найдите, используя асимптотические формулы, (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x + \cos 4x - \cos x - \cos 3x}{x^2}$ ,  
(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 2x + 2 \sin 3x - 12x \cos x}{x^3}$ , (3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x - \sin x - \sin 2x}{x^3}$ , (4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$ .

**С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

5. Используя асимптотические формулы, найдите  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 7x^2} - \sqrt[3]{x^3 + 3x^2})$ .  
6. Найдите, используя асимптотические формулы,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(3x) - 3 \arcsin x}{\operatorname{tg}(2x) - 2 \operatorname{tg} x}$ .

**Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

7. Используя асимптотические формулы, найдите  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt[3]{x^3 + x^2})$   
8. Найдите, используя асимптотические формулы,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(3x) - 3 \operatorname{arctg} x}{\sin(2x) - 2 \sin x}$ .  
9. Найдите, используя асимптотические формулы, (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$ ,  
(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1+2x}}{x}$ , (3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x})$ .

**С Задачи средней сложности для разбора на семинаре.**

10. Найдите, используя асимптотические формулы, (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \arcsin x - 2x}{x^5}$ ,

**Д Задачи средней сложности для самостоятельного решения.**

11. Найдите, используя асимптотические формулы, (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{arctg} x - 2x}{x^5}$ .

**С Сложные задачи для разбора на семинаре.**

12. Найдите, используя асимптотические формулы, (1)  $\lim_{x \rightarrow e} \frac{e^x - x^e}{x - e}$ , (2)  $\lim_{x \rightarrow e} \frac{e^{2x} - x^{2e}}{(x - e)^2}$ ,  
(3)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{e^2 x} - (ex)^{e^2}}{(x - 1)^2}$ . (4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}$ , (5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} - e}{x^2}$ .

**Д Сложные задачи для самостоятельного решения.**

13. Найдите, используя асимптотические формулы, (1)  $\lim_{x \rightarrow e} \frac{e - x}{e^x - x^e}$ , (2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{ex} - (ex)^e}{(x - 1)^2}$ ,  
(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}$ , (4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}$ , (5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1 - x}{x^2}$ ,

**С Сложные задачи для разбора на семинаре.**

14. Используя асимптотические формулы, представьте функцию  $f(x)$  в виде  $f(x) = \sum_{k=0}^n C_k x^k + o(x^n)$  для  $f(x) = \sin(\sin x)$  и  $n = 6$ .

15. Используя асимптотические формулы, представьте функцию  $f(x)$  в виде  $f(x) = \sum_{k=0}^n C_k x^k + o(x^n)$  для  $f(x) = \sin(2 \operatorname{tg} x)$  и  $n = 6$ .

**Д Сложные задачи для самостоятельного решения.**

16. Используя асимптотические формулы, представьте функцию  $f(x)$  в виде  $f(x) = \sum_{k=0}^n C_k x^k + o(x^n)$  для  $f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)$  и  $n = 6$ .

17. Используя асимптотические формулы, представьте функцию  $f(x)$  в виде  $f(x) = \sum_{k=0}^n C_k x^k + o(x^n)$  для  $f(x) = \operatorname{tg}(2 \sin x)$  и  $n = 6$ .

## 1.14. Исследование монотонности, точки локального экстремума

### 1.14.1. Степенные функции

**С** Простые задачи для разбора на семинаре.

1. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума. (1)  $f(x) = 3x^2 - 2x^3$ , (2)  $f(x) = 2x^6 - 3x^4$ , (3)  $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ , (4)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ , (5)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ , (6)  $f(x) = x^6 - 39x^4 + 216x^2$ , (7)  $f(x) = x(4-x)^3$ , (8)  $f(x) = x^2(5-x)^3$ , (9)  $f(x) = (x-2)^3(10-x)^5$ , (10)  $f(x) = x(x-1)(x+1)$ , (11)  $f(x) = (3-x)\sqrt{x}$ .

**Д** Простые задачи для самостоятельного решения.

2. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума. (1)  $f(x) = 6x^5 - 5x^6$ , (2)  $f(x) = x^4 - 2x^2$ , (3)  $f(x) = x^3 - 3x$ , (4)  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ , (5)  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ , (6)  $f(x) = x^6 - 6x^4 + 9x^2$ , (7)  $f(x) = x(6-x)^2$ , (8)  $f(x) = x^2(4-x)^2$ , (9)  $f(x) = (x-3)^3(10-x)^4$ , (10)  $f(x) = (4-x)\sqrt[3]{x}$ , (11)  $f(x) = x(x-3)(x+2)$ .

**С** Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

3. Найдите первую и вторую производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума. Найдите точки минимума и максимума первой производной, если  $f(x) = x^5(11-x)^6$ .

4. Найдите первую и вторую производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума. Найдите точки, в которых вторая производная обращается в нуль, если  $f(x) = x(12-x)^3$ .

**Д** Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

5. Найдите первую и вторую производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума. Найдите точки минимума и максимума первой производной, если  $f(x) = x^5(11-x)^6$ .

6. Найдите первую и вторую производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума. Найдите точки, в которых вторая производная обращается в нуль, если  $f(x) = x(10-x)^4$ .

### 1.14.2. Дробно-степенные функции

**С** Простые задачи для разбора на семинаре.

1. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, если (1)  $f(x) = 4x + \frac{9}{x}$ , (2)  $f(x) = \frac{2}{x^2+1}$ , (3)  $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ , (4)  $f(x) = \frac{1}{x^2-8x+15}$ , (5)  $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ , (6)  $f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$ , (7)  $f(x) = \frac{3}{x^2+x+1}$ .

**Д** Простые задачи для самостоятельного решения.

2. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, если (1)  $f(x) = 25x + \frac{36}{x}$ , (2)  $f(x) = \frac{2}{x^4+1}$ , (3)  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+36}$ , (4)  $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ , (5)  $f(x) = \frac{x}{x^2-5x+4}$ , (6)  $f(x) = \frac{x^3}{1-x^3}$ , (7)  $f(x) = \frac{3}{x^2-x+1}$ .

**С** Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

3. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, если (1)  $f(x) = \frac{x^5}{1-x}$ , (2)  $f(x) = \frac{1-x}{x^5}$ , (3)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ , (4)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ ,

**Д** Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

4. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, если (1)  $f(x) = \frac{x^7}{1-x}$ ; (2)  $f(x) = \frac{1-x}{x^7}$ ; (3)  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ , (4)  $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$ .

**1.14.3. Показательные и логарифмические функции****С** Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

1. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, (1)  $f(x) = x^2 \ln x$ , (2)  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ , (3)  $f(x) = xe^{-x}$ , (4)  $f(x) = x^2 e^{-x}$ , (5)  $f(x) = x^3 e^{-x}$ , (6)  $f(x) = \sqrt[3]{x} e^{-x}$ .

**Д** Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

2. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, (1)  $f(x) = x \ln x$ , (2)  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ , (3)  $f(x) = xe^x$ , (4)  $f(x) = x^2 e^x$ , (5)  $f(x) = x^3 e^x$ , (6)  $f(x) = \sqrt{x} e^{-x}$ .

**С** Сложные задачи для разбора на семинаре.

3. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума,  $f(x) = x^2 \ln |x|$ ,  $f(0) = 0$ .

**Д** Сложные задачи для самостоятельного решения.

4. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума,  $f(x) = x \ln |x|$ ,  $f(0) = 0$ .

**1.14.4. Тригонометрические функции****С** Простые задачи для разбора на семинаре.

1. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, (1)  $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ , (2)  $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$ , (3)  $f(x) = 4 \sin^3 x - 3 \sin x$ .

**Д** Простые задачи для самостоятельного решения.

2. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, (1)  $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$ , (2)  $f(x) = \sin^5 x + \cos^5 x$ , (3)  $f(x) = 2 \cos^3 x - 3 \cos x$ .

**С** Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

3. Найдите значение выражения  $x \operatorname{tg} x$  в наименьшей положительной точке локального экстремума функции  $f(x) = x^2 \cos x$ .

**Д** Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

4. Найдите значение выражения  $x \operatorname{tg} x$  в наименьшей положительной точке локального экстремума функции  $f(x) = x^5 \cos x$ .

**С** Сложные задачи для разбора на семинаре.

5. Не пользуясь компьютером, найдите наименьшую положительную точку локального экстремума функции  $f(x) = x^{0,01} \cos x$  с точностью не хуже  $10^{-6}$ .

**Д** Сложные задачи для самостоятельного решения.

6. Не пользуясь компьютером, найдите наименьшую положительную точку локального экстремума функции  $f(x) = x^{0,0001} \cos x$  с точностью не хуже  $10^{-8}$ .

### 1.14.5. Вычисление предела

#### С Простые задачи для разбора на семинаре.

1. Найдите, (1) используя правило Лопитала, (2) используя асимптотические формулы,  
 (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$ , (2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2 \sin 3x)}{\sin(3 \sin 2x)}$ , (3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$ , (4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}$ ; (5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin x}{x}$ ;  
 (6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x}{\sin 3x + \sin 2x}$ .  
 2. Найдите, (1) используя правило Лопитала, (2) используя асимптотические формулы,  
 (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - 2 \cos 2x + \cos x}{x^2}$ ; (2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 5x - 5 \sin 3x}{x^3}$ ; (3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 5x + 5 \sin 3x - \sin 30x}{x^3}$ ;  
 (4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$ , (5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x + \sin x - \sin 2x}{x^3}$ .

#### Д Простые задачи для самостоятельного решения.

3. Найдите, (1) используя правило Лопитала, (2) используя асимптотические формулы,  
 (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{x}$ ; (2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x}{x^2}$ , (3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 6x}{\operatorname{tg} 3x}$ ; (4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(12x^2)}{\operatorname{tg}(3x^2)}$ ; (5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin 2x}{x}$ ;  
 (6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x}$ .  
 4. Найдите, (1) используя правило Лопитала, (2) используя асимптотические формулы,  
 (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x + \cos 4x - \cos x - \cos 3x}{x^2}$ , (2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 2x + 2 \sin 3x - 12x \cos x}{x^3}$ , (3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x - \sin x - \sin 2x}{x^3}$ ;  
 (4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$ .

#### С Простые задачи для разбора на семинаре.

5. Найдите  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 10x + 21}{x^2 - 12x + 35}$ .  
 6. Найдите  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$ .  
 7. Найдите  $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\sqrt{3x+19} - 7}{x - 10}$ .  
 8. Найдите  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - \sqrt[2]{1+3x}}{x}$ .  
 9. Найдите  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(12x) \sin(9x)}{\sin^2(6x)}$ .  
 10. Найдите (1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$ , (2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^{0,1}}$ , (3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^{2008}}{x}$ ; (4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{0,001}}{1,001^x}$ ;  
 (5)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2008}}{2^x}$ .  
 11. Найдите, используя правило Лопитала. (1)  $\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x$ , (2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$ ; (3)  $\lim_{x \rightarrow +0} x^{1/x}$ ;  
 (4)  $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\arcsin x - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x}}$ , (5)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - x^2}{x - 2}$ .  
 12. Найдите, используя правило Лопитала,  $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{6\sqrt{x+3} - x - 12}{(x-6)^2}$ .  
 13. Найдите, используя правило Лопитала,  $\lim_{x \rightarrow e} \frac{e^x - x e^2}{(x-e)^2}$ .

#### Д Простые задачи для самостоятельного решения.

14. Найдите  $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 9x + 18}{x^2 - 11x + 30}$ .  
 15. Найдите  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[2]{x} - 1}{\sqrt[2]{x} - 1}$ .  
 16. Найдите  $\lim_{x \rightarrow 11} \frac{x - 11}{\sqrt{4x+5} - 7}$ .  
 17. Найдите  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x} \cdot \sqrt[2]{1+3x} - 1}{x}$ .  
 18. Найдите  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(18x) \sin(12x)}{\sin^2(3x)}$ .  
 19. Найдите (1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x}$ ; (2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ , (3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^{123}}{x^{123}}$ ; (4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{2^x}$ ;  
 (5)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2}$ .  
 20. Найдите, используя правило Лопитала. (1)  $\lim_{x \rightarrow +0} x^2 \ln x$ ; (2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$ ; (3)  $\lim_{x \rightarrow +0} x^x$ ;  
 (4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} \right)$ , (5)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2^x - x^2}{x - 4}$ .

21. Найдите, используя правило Лопиталя,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} - e}{x^2}$

22. Найдите, используя правило Лопиталя,  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4\sqrt{x+1} - x - 5}{(x-3)^2}$ .

**С** Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

23. Найдите, (1) используя правило Лопиталя, (2) используя асимптотические формулы,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(3x) - 3 \arcsin x}{\operatorname{tg}(2x) - 2 \operatorname{tg} x}$ .

**Д** Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

24. Найдите, (1) используя правило Лопиталя, (2) используя асимптотические формулы,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(3x) - 3 \operatorname{arctg} x}{\sin(2x) - 2 \sin x}$ .

25. Найдите, (1) используя правило Лопиталя, (2) используя асимптотические формулы, (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$ ; (2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1+2x}}{x}$ , (3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x})$ .

**С** Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

26. Найдите, (1) используя правило Лопиталя, (2) используя асимптотические формулы, (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \arcsin x - 2x}{x^5}$ ;

**Д** Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

27. Найдите, (1) используя правило Лопиталя, (2) используя асимптотические формулы, (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{arctg} x - 2x}{x^5}$ .

**С** Сложные задачи для разбора на семинаре.

28. Найдите, (1) используя правило Лопиталя, (2) используя асимптотические формулы,

(1)  $\lim_{x \rightarrow e} \frac{e^x - x^e}{x - e}$ , (2)  $\lim_{x \rightarrow e} \frac{e^{2x} - x^{2e}}{(x-e)^2}$ ; (3)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{e^2 x} - (ex)^{e^2}}{(x-1)^2}$ . (4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}$ , (5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} - e}{x^2}$ .

**Д** Сложные задачи для самостоятельного решения.

29. Найдите, (1) используя правило Лопиталя, (2) используя асимптотические формулы,

(1)  $\lim_{x \rightarrow e} \frac{e-x}{e^x - x^e}$ , (2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{ex} - (ex)^e}{(x-1)^2}$ ; (3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}$ , (4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}$ ;

(5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1 - x}{x^2}$ ,

## 1.14.6. Многочлен Тейлора второго порядка

**С** Простые задачи для разбора на семинаре.

1. Найдите (а)  $df$ , (б)  $d^2f$ , (в)  $f(x) + df + \frac{1}{2}d^2f$ , (д)  $f(x + dx)$ , если  
 (1)  $f(x) = 2x + 3$ ,  $x = 2$ ,  $dx = 3$ , (2)  $f(x) = x^3$ ,  $x = 1$ ,  $dx = 1$ , (3)  $f(x) = x^3$ ,  $x = 1$ ,  $dx = 0,1$ ,  
 (4)  $f(x) = \ln x$ ,  $x = 1$ ,  $dx = 1$ , (5)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x = 16$ ,  $dx = 9$ , (6)  $f(x) = \sqrt{1+x}$ ,  $x = 1$ ,  $dx = 0,1$ ,  
 (7)  $f(x) = e^x$ ,  $x = \ln 10$ ,  $dx = \ln 2$ , (8)  $f(x) = \sin x$ ,  $x = \frac{\pi}{6}$ ,  $dx = \frac{\pi}{6}$ ,  
 (9)  $f(x) = \arcsin x$ ,  $x = \frac{1}{2}$ ,  $dx = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$ .

**Д** Простые задачи для самостоятельного решения.

2. Найдите (а)  $df$ , (б)  $d^2f$ , (в)  $f(x) + df + \frac{1}{2}d^2f$ , (д)  $f(x + dx)$ , если (1)  $f(x) = x$ ,  $x = 2$ ,  $dx = 3$ ,  
 (2)  $f(x) = x^2$ ,  $x = 1$ ,  $dx = 1$ , (3)  $f(x) = x^3$ ,  $x = 0$ ,  $dx = 1$ , (4)  $f(x) = \ln x$ ,  $x = 1$ ,  $dx = 2$ ,  
 (5)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x = 9$ ,  $dx = 7$ , (6)  $f(x) = \sqrt{3+x}$ ,  $x = 1$ ,  $dx = 0,1$ , (7)  $f(x) = e^x$ ,  $x = 0$ ,  $dx = 1$ ,  
 (8)  $f(x) = \cos x$ ,  $x = \frac{\pi}{3}$ ,  $dx = \frac{\pi}{6}$ , (9)  $f(x) = \arctg x$ ,  $x = 1$ ,  $dx = \sqrt{3} - 1$ .

## 1.14.7. Многочлен Тейлора

**С** Простые задачи для разбора на семинаре.

1. Найдите значение многочлена Тейлора для функции  $f(x)$  с центром  $x_0 = 0$  указанного порядка  $n$  в указанной точке  $x$ , если (1)  $f(x) = (2+x)^3$ ,  $x = 1$ ,  $n = 3$ .  
 (2)  $f(x) = (1+x)^{2006}$ ,  $x = 1$ ,  $n = 2005$ . (3)  $f(x) = e^x$ ,  $x = 2$ ,  $n = 4$ . (4)  $f(x) = xe^x$ ,  $x = 2$ ,  $n = 4$ .  
 (5)  $f(x) = \sin x$ ,  $x = 1$ ,  $n = 5$ . (6)  $f(x) = \cos x$ ,  $x = 2$ ,  $n = 4$ . (7)  $f(x) = \sqrt{1-x}$ ,  $x = 0,36$ ,  $n = 2$ .  
 (8)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ ,  $x = 0,64$ ,  $n = 2$ . (9)  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ,  $x = 1$ ,  $n = 2006$ .  
 (10)  $f(x) = \frac{1}{1+x}$ ,  $x = 1$ ,  $n = 2006$ . (11)  $f(x) = \ln(1-x)$ ,  $x = 1$ ,  $n = 5$ .  
 (12)  $f(x) = \arctg(x)$ ,  $x = 1$ ,  $n = 3$ . (13)  $f(x) = \arcsin(x)$ ,  $x = 1$ ,  $n = 3$ .

**Д** Простые задачи для самостоятельного решения.

2. Найдите значение многочлена Тейлора для функции  $f(x)$  с центром  $x_0 = 0$  указанного порядка  $n$  в указанной точке  $x$ , если (1)  $f(x) = (2+x)^2$ ,  $x = 1$ ,  $n = 2$ .  
 (2)  $f(x) = x^7$ ,  $x = 1$ ,  $n = 5$ . (3)  $f(x) = e^{-x}$ ,  $x = 2$ ,  $n = 3$ . (4)  $f(x) = xe^{-x}$ ,  $x = 1$ ,  $n = 2$ .  
 (5)  $f(x) = \sin x$ ,  $x = 3$ ,  $n = 5$ . (6)  $f(x) = \cos x$ ,  $x = \frac{1}{2}$ ,  $n = 2$ . (7)  $f(x) = \sqrt{1+x}$ ,  $x = 0,21$ ,  $n = 2$ .  
 (8)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ ,  $x = 0,44$ ,  $n = 2$ . (9)  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ,  $x = \frac{1}{2}$ ,  $n = 3$ . (10)  $f(x) = \frac{1}{1+x}$ ,  $x = \frac{1}{3}$ ,  $n = 7$ .  
 (11)  $f(x) = \ln(1+x)$ ,  $x = 1$ ,  $n = 5$ . (12)  $f(x) = \arctg(x)$ ,  $x = \sqrt{3}$ ,  $n = 3$ .  
 (13)  $f(x) = \arcsin(x)$ ,  $x = \frac{1}{2}$ ,  $n = 3$ .

## 1.14.8. Многочлен Тейлора, приложения

**С** Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

1. Оцените значение выражения  $(1+x)^m$ , используя тождество  $(1+x)^m = e^{m \ln(1+x)}$ . Для оценки  $\ln(1+x)$  используйте многочлен Тейлора  $P_2 = x - \frac{x^2}{2}$ . (1)  $(1,01)^2$ , (2)  $(1,01)^{100}$ , (3)  $(0,99)^{200}$ ,  
 (4)  $(1,01)^{100} - (1,02)^{50}$ , (5)  $(0,99)^{100} - (0,98)^{50}$ ,  
 2. Билл вложил \$1000 на 100 недель в банк, который начисляет 1% каждую неделю с учетом сложных процентов. По истечении 100 недель капитал Билла будет равен \$ $x$ , где  
 (а)  $x \leq 1600$ . (б)  $1600 < x \leq 1000e^{1/2}$ . (с)  $1000e^{1/2} < x \leq 2000$ . (д)  $2000 < x \leq 1000e^1$ .  
 (е)  $1000e^1 < x \leq 3000$ . (ф)  $3000 < x$ .

**Д** Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

3. Оцените значение выражения  $(1+x)^m$ , используя тождество  $(1+x)^m = e^{m \ln(1+x)}$ . Для оценки  $\ln(1+x)$  используйте многочлен Тейлора  $P_2 = x - \frac{x^2}{2}$ . (1)  $(1,02)^3$ , (2)  $(1,02)^{50}$ , (3)  $(0,98)^{100}$ ,  
 (4)  $(1,1)^{10} - (1,2)^5$ , (5)  $(0,9)^{10} - (0,8)^5$ ,



4. Джек вложил \$1000 на 50 недель в банк, который начисляет 1% каждую неделю с учетом сложных процентов. По истечении 50 недель капитал Джека будет равен \$ $x$ , где

- (a)  $x \leq 1600$ . (b)  $1600 < x \leq 1000e^{1/2}$ . (c)  $1000e^{1/2} < x \leq 2000$ . (d)  $2000 < x \leq 1000e^1$ .  
 (e)  $1000e^1 < x \leq 3000$ . (f)  $3000 < x$ .

**С** Сложные задачи для разбора на семинаре.

5. Билл вложил \$1000 на 100 недель в Первый банк, который начисляет 1% каждую неделю с учетом сложных процентов. Джек вложил такую же сумму на тот же срок во Второй банк, начисляющий 2% каждые две недели. По истечении 100 недель Билл будет богаче Джека

- (a) не более чем на \$5. (b) примерно на \$7. (c) примерно на \$14. (d) примерно на \$20.  
 (e) примерно на \$27. (f) более чем на \$30.

6. Султан обещал Шахразаде принимать у нее каждый вечер на хранение сокровища на сумму, равную 1% от имеющегося у него на этот момент капитала, и каждое утро возвращать ей ровно 1% от имеющегося у него на этот момент капитала. На сколько богаче станет Шахразада через 1001 ночь, если в первый вечер в сокровищнице султана было 1000000 (1 миллион) дукатов?

- (a) не более чем на 999 дукатов. (b) от 1000 до 2999 дукатов. (c) от 3000 до 9999 дукатов.  
 (d) от 10000 до 29999 дукатов. (e) от 30000 до 99999 дукатов. (f) более чем на 100000 дукатов.

**Д** Сложные задачи для самостоятельного решения.

7. Джек вложил \$1000 на 100 недель в Первый банк, который начисляет 1% каждую неделю с учетом сложных процентов. Билл вложил такую же сумму на тот же срок во Второй банк, начисляющий 0,5% два раза в неделю. По истечении 100 недель Билл будет богаче Джека

- (a) не более чем на \$5. (b) примерно на \$7. (c) примерно на \$14. (d) примерно на \$20.  
 (e) примерно на \$27. (f) более чем на \$30.

8. Султан обещал Шахразаде принимать у нее каждый вечер на хранение сокровища на сумму, равную 10% от имеющегося у него на этот момент капитала, и каждое утро возвращать ей ровно 10% от имеющегося у него на этот момент капитала. На сколько богаче станет Шахразада через 101 ночь, если в первый вечер в сокровищнице султана было 1000 дукатов?

- (a) не более чем на 500 дукатов. (b) от 500 до 749 дукатов. (c) от 750 до 849 дукатов.  
 (d) от 850 до 899 дукатов. (e) от 900 до 949 дукатов. (f) более чем на 950 дукатов.

**С** Сложные задачи для разбора на семинаре.

9. Изотоп А имеет период полураспада 99 дней, изотоп Б имеет период полураспада 101 день, в начале имеется две банки, содержащие по одному килограмму каждого из изотопов. Насколько будут различаться веса банок после 9999 дней?

**Д** Сложные задачи для самостоятельного решения.

10. Изотоп А имеет период полураспада 999 дней, изотоп Б имеет период полураспада 1001 день, в начале имеется две банки, содержащие по  $10^{12}$  атомов каждого из изотопов. Насколько будут различаться веса банок после  $10^6 - 1$  дней?

### 1.14.9. Многочлен Тейлора, оценка остаточного члена

**С** Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

1. Получите нижнюю и верхнюю оценки величины остаточного члена формулы Тейлора в форме Лагранжа,  $R_{n+1}(x, x_0) \in \left[ \inf_{\xi \in (x_0; x)} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}; \sup_{\xi \in (x_0; x)} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right]$  для  $f(x) = e^x$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x = 2$ ,  $n = 3$ .

2. Оцените величину остаточного члена формулы Тейлора  $R_{n+1}(x|x_0) = f(x) - P_n(x|x_0)$ ,

$P_n(x|x_0) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ , если (1)  $f(x) = \sin x$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x = 1$ ,  $n = 5$ .

(2)  $f(x) = \sin x$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x = \frac{1}{2}$ ,  $n = 5$ . (3)  $f(x) = \sin x$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x = 2$ ,  $n = 5$ .

(4)  $f(x) = e^x$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x = 2$ ,  $n = 6$ . (5)  $f(x) = \ln(1+x)$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x = \frac{1}{2}$ ,  $n = 4$ .

(6)  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x = \frac{1}{2}$ ,  $n = 4$ .

**Д** Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

3. Получите нижнюю и верхнюю оценки величины остаточного члена формулы Тейлора в форме Лагранжа,  $R_{n+1}(x, x_0) \in \left[ \inf_{\xi \in (x_0; x)} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}; \sup_{\xi \in (x_0; x)} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right]$  для  $f(x) = e^{-x}$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x = 3$ ,  $n = 5$ .

4. Оцените величину остаточного члена формулы Тейлора  $R_{n+1}(x|x_0) = f(x) - P_n(x|x_0)$ ,

$P_n(x|x_0) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ , если (1)  $f(x) = \cos x$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x = 1$ ,  $n = 4$ .

(2)  $f(x) = \cos x$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x = 1$ ,  $n = 5$ . (3)  $f(x) = \cos x$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x = \frac{1}{2}$ ,  $n = 4$ .

(4)  $f(x) = \cos x$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x = 2$ ,  $n = 4$ . (5)  $f(x) = e^{-x}$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x = 2$ ,  $n = 6$ .

(6)  $f(x) = \ln(1-x)$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x = \frac{1}{2}$ ,  $n = 4$ . (7)  $f(x) = \frac{1}{1+x}$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x = \frac{1}{2}$ ,  $n = 4$ .

### 1.14.10. Многочлен Тейлора, оценка порядка для достижения заданной точности

**С** Сложные задачи для разбора на семинаре.

1. Оцените величину остаточного члена формулы Тейлора  $R_{n+1}(x|x_0) = f(x) - P_n(x|x_0)$ ,

$P_n(x|x_0) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ , принимая

$\max |R_{n+1}(x|x_0)| = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \max_{\xi \in [0; x_0]} |f^{(n+1)}(\xi)|$ , и найдите наименьшее  $n$ , при котором

$\max |R_{n+1}(x|x_0)| < \varepsilon$ , если (1)  $f(x) = \sin x$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x = 1$ ,  $\varepsilon = 10^{-5}$ ,

(2)  $f(x) = \cos x$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x = 2$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$ ; (3)  $f(x) = e^x$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x = 1$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$ ,

(4)  $f(x) = e^{-x}$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x = 2$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

**Д** Сложные задачи для самостоятельного решения.

2. Оцените величину остаточного члена формулы Тейлора  $R_{n+1}(x|x_0) = f(x) - P_n(x|x_0)$ ,

$P_n(x|x_0) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ , принимая

$\max |R_{n+1}(x|x_0)| = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \max_{\xi \in [0; x_0]} |f^{(n+1)}(\xi)|$ , и найдите наименьшее  $n$ , при котором

$\max |R_{n+1}(x|x_0)| < \varepsilon$ , если (1)  $f(x) = \sin x$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x = 2$ ,  $\varepsilon = 10^{-5}$ ,

(2)  $f(x) = \cos x$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x = 1$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$ ; (3)  $f(x) = e^x$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x = 2$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$ ,

(4)  $f(x) = e^{-x}$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x = 1$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

### 1.14.11. Многочлен Тейлора, оценка максимального значения слагаемого

**С** Сложные задачи для разбора на семинаре.

1. Найдите номер и оцените величину наибольшего по модулю слагаемого многочлена Тейлора

$P_n(x|x_0) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ , если (1)  $f(x) = \cos x$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x = 9$ ,

(2)  $f(x) = e^{-x}$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x = 11$ ; (3)  $f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x = 0,9$ . Обратите внимание на то, что

многочлен Тейлора для функции  $f(x) = g'(x)$  равен  $P = P_n(f|x_0) = P_n(g'|x_0)$ ,

$P = f'(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{(f')^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ ,  $P = f'(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ ;

$P = f'(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!} (k+1)(x - x_0)^k$ ;  $P = \left\{ (x - x_0)f'(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1} \right\}'$ ;

$P = \left\{ \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right\}'$ ; то есть он равен производной от многочлена Тейлора для функции  $g(x)$ .

**Д** Сложные задачи для самостоятельного решения.

2. Найдите номер и оцените величину наибольшего по модулю слагаемого многочлена Тейлора

$P_n(x|x_0) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ , если (1)  $f(x) = \sin x$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x = 7$ ,

(2)  $f(x) = e^x$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x = 10$ , (3)  $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x = 0,9$ , Обратите внимание на то, что

многочлен Тейлора для функции  $f(x) = g'(x)$  равен  $P = P_n(f|x|x_0) = P_n(g'|x|x_0)$ ,

$$P = f'(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{(f')^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, P = f'(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k;$$

$$P = f'(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!} (k+1)(x - x_0)^k; P = \left\{ (x - x_0)f'(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1} \right\}';$$

$P = \left\{ \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right\}'$ , то есть он равен производной от многочлена Тейлора для функции  $g(x)$ .

### 1.14.12. Асимптотические формулы

**С** Простые задачи для разбора на семинаре.

1. Укажите бесконечно малые и бесконечно большие функции. (1)  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ ,  $x \rightarrow +\infty$ ,

(2)  $f(x) = x \ln x$ ,  $x \rightarrow +0$ , (3)  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ ,  $x \rightarrow +0$ .

**Д** Простые задачи для самостоятельного решения.

2. Укажите бесконечно малые и бесконечно большие функции. (1)  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ ,  $x \rightarrow 0$ ,

(2)  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ ,  $x \rightarrow +\infty$ , (3)  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ,  $x \rightarrow +\infty$ .

### 1.14.13. Асимптотическое представление обратной функции

**С** Сложные задачи для разбора на семинаре.

1. Пусть  $f(x) = x - \frac{x^3}{6}$  и в окрестности точки  $x = 0$  определена обратная функция  $g(x)$ ,  $g(f(x)) = x$ , и  $g(x) = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + o(x^4)$  при  $x \rightarrow 0$ . Найдите значения коэффициентов.

**Д** Сложные задачи для самостоятельного решения.

2. Пусть  $f(x) = x + \frac{x^3}{3}$  и в окрестности точки  $x = 0$  определена обратная функция  $g(x)$ ,  $g(f(x)) = x$ , и  $g(x) = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + o(x^4)$  при  $x \rightarrow 0$ . Найдите значения коэффициентов.

**С** Сложные задачи для разбора на семинаре.

3. Пусть  $f(x) = 5x - 2x^4$  и в окрестности точки  $x = 0$  определена обратная функция  $g(x)$ ,  $g(f(x)) = x$ , и  $g(x) = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + o(x^4)$  при  $x \rightarrow 0$ . Найдите значения коэффициентов.

4. Пусть  $f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$  и в окрестности точки  $x = 0$  определена обратная функция  $g(x)$ ,  $g(f(x)) = x$ , и  $g(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k + o(x^n)$ ,  $n = 5$  при  $x \rightarrow 0$ . Найдите значения коэффициентов.

**Д** Сложные задачи для самостоятельного решения.

5. Пусть  $f(x) = 2x + 3x^5 + o(x^5)$  и в окрестности точки  $x = 0$  определена обратная функция  $g(x)$ ,  $g(f(x)) = x$ , и  $g(x) = tx + nx^2 + kx^3 + px^4 + qx^5 + o(x^5)$  при  $x \rightarrow 0$ . Найдите значения коэффициентов.

6. Пусть  $f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$  и в окрестности точки  $x = 0$  определена обратная функция  $g(x)$ ,  $g(f(x)) = x$ , и  $g(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k + o(x^n)$ ,  $n = 5$  при  $x \rightarrow 0$ . Найдите значения коэффициентов.

7. Пусть  $f(x) = 2x + x^2$  и в окрестности точки  $x = 0$  определена обратная функция  $g(x)$ ,  $g(f(x)) = x$ , и  $g(x) = ax + bx^2 + o(x^2)$  при  $x \rightarrow 0$ . Найдите значения коэффициентов.

### 1.14.14. Вычисление предела последовательности

**С** Простые задачи для разбора на семинаре.

1. Найдите наименьшее  $N$  такое, что  $\forall n \geq N \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon$ , если (1)  $x_n = \frac{1}{n}$ ,  $b = 0$  и  $\varepsilon = 10^{-3}$ , (2)  $x_n = \frac{3n+2}{n+1}$ ,  $b = 3$  и  $\varepsilon = 10^{-3}$ , (3)  $x_n = \frac{n^3+n}{n^3+1}$ ,  $b = 1$  и  $\varepsilon = 10^{-3}$ , (4)  $x_n = \frac{n}{n^2+1}$ ,  $b = 0$  и  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,
2. Найдите наименьшее  $N$  такое, что  $\forall n \geq N \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon$ , если (1)  $x_n = \frac{1}{2^n}$ ,  $b = 0$  и  $\varepsilon = 10^{-3}$ , (2)  $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ ,  $b = 0$  и  $\varepsilon = 10^{-3}$ , (3)  $x_n = \ln n - \ln(n-1)$ ,  $b = 0$  и  $\varepsilon = 10^{-3}$ , (4)  $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ ,  $b = 0$  и  $\varepsilon = 10^{-3}$ , (5)  $x_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}$ ,  $b = 0$  и  $\varepsilon = 10^{-3}$ , (6)  $x_n = \sin\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ ,  $b = \sin 1$  и  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,
3. Укажите наименьшее значение  $N : \forall n \geq N \Rightarrow \left| \frac{40n^2+7}{8n^2+3} - 5 \right| < 10^{-4}$ .
4. Найдите (1)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2-5n+6}{n^2-7n+10}$ , (2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2-2n+1}{n^2-2n+3}$ , (3)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2-2n+1}{n^3-2n^2+3n-4}$ ;
5. Найдите (1)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( \sqrt{4 + \frac{1}{n}} - 2 \right)$ , (2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( \sqrt[3]{27 + \frac{1}{n}} - \sqrt{9 + \frac{1}{n}} \right)$ , (3)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - \sqrt{n^2 - n})$ , (4)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 3n + 2} - \sqrt{n^2 - n - 2})$ , (5)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 (\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt[3]{n^3 - 2})$ , (6)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 (\sqrt{n^2 - 1} - 2n + \sqrt{n^2 + 1})$ .

**Д** Простые задачи для самостоятельного решения.

6. Найдите наименьшее  $N$  такое, что  $\forall n \geq N \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon$ , если (1)  $x_n = \frac{1}{n^2}$ ,  $b = 0$  и  $\varepsilon = 10^{-3}$ , (2)  $x_n = \frac{n-1}{n}$ ,  $b = 1$  и  $\varepsilon = 10^{-3}$ , (3)  $x_n = \frac{n^2+1}{n^2-1}$ ,  $b = 1$  и  $\varepsilon = 10^{-3}$ , (4)  $x_n = \frac{n}{n^2+3n+2}$ ,  $b = 0$  и  $\varepsilon = 10^{-3}$ ;
7. Найдите наименьшее  $N$  такое, что  $\forall n \geq N \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon$ , если (1)  $x_n = \frac{1}{3^n}$ ,  $b = 0$  и  $\varepsilon = 10^{-10}$ , (2)  $x_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ ,  $b = 0$  и  $\varepsilon = 10^{-5}$ , (3)  $x_n = \ln(n+1) - \ln(n-1)$ ,  $b = 0$  и  $\varepsilon = 10^{-2}$ , (4)  $x_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}$ ,  $b = 0$  и  $\varepsilon = 10^{-4}$ , (5)  $x_n = \sqrt[3]{n^2+n} - \sqrt[3]{n^2-n}$ ,  $b = 0$  и  $\varepsilon = 10^{-3}$ , (6)  $x_n = \cos\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ ,  $b = \sin 1$  и  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,
8. Укажите наименьшее значение  $N : \forall n \geq N \Rightarrow \left| \frac{42n^2+58}{7n^2+5} - 6 \right| < 10^{-4}$ .
9. Найдите (1)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2-8n+15}{n^2-10n+21}$ , (2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2-3n+4}{3n^2-2n+1}$ , (3)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3+n^2+n+1}{n^3+n^4+n^5+n^6}$ ;
10. Найдите (1)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( \sqrt{9 + \frac{2}{n}} - 3 \right)$ , (2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( \sqrt[3]{8 + \frac{3}{n}} - \sqrt{4 + \frac{1}{n}} \right)$ , (3)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n)$ , (4)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n (\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 2})$ , (5)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{n^3 + n^2} - \sqrt[3]{n^3 - n^2})$ , (6)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sqrt{n} (\sqrt{n-1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n+1})$ .

### 1.14.15. Бесконечно большие последовательности

**С** Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

1. Найдите наименьшее  $N$  такое, что  $\forall n \geq N \Rightarrow x_n > A$ , если (1)  $x_n = 2n$ ,  $A = 1001$ , (2)  $x_n = n^2$ ,  $A = 1000001$ , (3)  $x_n = \sqrt{n}$ ,  $A = 100$ , (4)  $x_n = 2^n$ ,  $A = 1001$ , (5)  $x_n = \log_2 n$ ,  $A = 10$ , (6)  $x_n = n^2 - 6n + 9$ ,  $A = 10000$ .

**Д** Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

2. Найдите наименьшее  $N$  такое, что  $\forall n \geq N \Rightarrow x_n > A$ , если (1)  $x_n = 3n - 2$ ,  $A = 1001$ , (2)  $x_n = n^3$ ,  $A = 1000001$ , (3)  $x_n = \sqrt[3]{n}$ ,  $A = 101$ , (4)  $x_n = 3^n$ ,  $A = 1001$ , (5)  $x_n = \log_{10} n$ ,  $A = 10$ , (6)  $x_n = n^2 - 4n + 4$ ,  $A = 1000$ .

### 1.14.16. Второй замечательный предел для последовательности

**С** Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

1. Найдите (1)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n}$ , (2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{4n}$ , (3)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1+n)^{1/n}$ .

**Д** Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

2. Найдите (1)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{2n})^{6n}$ ; (2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \frac{1}{2n^2})^{6n^2}$ ; (3)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + 2n)^{3/n}$ .

**1.14.17. Эталонные последовательности, 1**

**С** Сложные задачи для разбора на семинаре.

1. Пусть  $x_n = \sqrt[n]{n}$ . Укажите какое нибудь  $N : \forall n \geq N \Rightarrow x_n \in (1; 1,001)$ .

2. Укажите какое-нибудь значение  $N : \forall n \geq N \Rightarrow \frac{1}{n!} < 10^{-3}$ .

3. Укажите какое-нибудь значение  $N : \forall n \geq N \Rightarrow \frac{1}{n^n} < \frac{1}{257}$ .

4. Найдите (1)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n}$ ; (2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n}$ ; (3)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^{17}}{n^{0,01}}$ ; (4)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n}$ ;

(5)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{2008}}{(1,001)^n}$ ; (6)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n}$ ; (7)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{2006}}{n!}$ ; (8)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{2006}}{n^n}$ ; (9)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n!}$ .

**Д** Сложные задачи для самостоятельного решения.

5. Пусть  $x_n = \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$ . Укажите какое нибудь  $N : \forall n \geq N \Rightarrow x_n \in (0,999; 1)$ .

6. Укажите какое-нибудь значение  $N : \forall n \geq N \Rightarrow \frac{1}{n!} < 10^{-6}$ .

7. Укажите какое-нибудь значение  $N : \forall n \geq N \Rightarrow n^n > 3100$ .

8. Найдите (1)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$ ; (2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\ln n}$ ; (3)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^{0,01}}$ ; (4)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{n}$ ;

(5)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{0,1}}{(1,1)^n}$ ; (6)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!}{n^n}$ ; (7)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 3^n \ln n}{n!}$ ; (8)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!}{n^n}$ ; (9)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^n}$ .

**1.14.18. Эталонные подпоследовательности, 2**

**С** Простые задачи для разбора на семинаре.

1. Для каждой последовательности укажите все верные утверждения:

(I)  $x_n = \frac{2^n}{n^{2005}}$  (II)  $x_n = \frac{\log_{2005} n}{n^{1,01}}$  (III)  $x_n = \frac{n!}{n^n}$  (IV)  $x_n = \frac{0,9^n}{n^{0,9}}$  (V)  $x_n = \frac{n^n}{2^n}$

(VI)  $x_n = \frac{(1,0001)^n}{\log_2 n}$ ,  $n \geq 2$

(a)  $x_n$  – бесконечно большая (б.б.) положительная.

(b)  $x_n$  является б.б., но не является б.б. положительной. (c)  $x_n$  – неограниченная, но не является б.б.

(d)  $x_n$  – ограниченная, но не имеет предела. (e)  $x_n$  сходится, но не является бесконечно малой.

(f)  $x_n$  – бесконечно малая.

**Д** Простые задачи для самостоятельного решения.

2. Для каждой последовательности укажите все верные утверждения:

(I)  $x_n = \frac{n^{2005}}{2005^n}$  (II)  $x_n = \frac{\sqrt{n}}{\log_3 n}$ ,  $n \geq 2$  (III)  $x_n = \frac{n!}{n^n}$  (IV)  $x_n = \frac{n!}{4^n}$  (V)  $x_n = \frac{2^n}{n^n}$

(VI)  $x_n = \frac{\log_{2005} n}{2^n}$

(a)  $x_n$  – бесконечно большая (б.б.) положительная.

(b)  $x_n$  является б.б., но не является б.б. положительной. (c)  $x_n$  – неограниченная, но не является б.б.

(d)  $x_n$  – ограниченная, но не имеет предела. (e)  $x_n$  сходится, но не является бесконечно малой.

(f)  $x_n$  – бесконечно малая.

**1.14.19. Эталонные последовательности, 3**

**С** Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

1. Пусть  $x_n = \frac{\ln n}{n^2}$ . Укажите все верные утверждения: (a)  $x_n = o(\frac{\ln n}{n^3})$  (b)  $x_n = o(\frac{1}{n})$

(c)  $x_n = o(\frac{\ln n}{n^3 \cdot \sqrt{n}})$  (d)  $x_n = o(\frac{1}{n^2})$  (e)  $x_n = o(\frac{1}{n^3 \cdot \ln n})$  (f)  $x_n = o(\frac{1}{n^3})$

**Д** Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

2. Пусть  $x_n = \frac{\ln n}{n^3}$ . Укажите все верные утверждения: (a)  $x_n = o(\frac{\ln n}{n^3})$  (b)  $x_n = o(\frac{1}{n})$

(c)  $x_n = o(\frac{\ln n}{n^3 \cdot \sqrt{n}})$  (d)  $x_n = o(\frac{1}{n^2})$  (e)  $x_n = o(\frac{1}{n^3 \cdot \ln n})$  (f)  $x_n = o(\frac{1}{n^3})$

## 1.14.20. Выделение сходящейся подпоследовательности

**С** Простые задачи для разбора на семинаре.

1. Постройте сходящуюся подпоследовательность последовательности (1)  $x_n = \frac{n-1}{n}$ ,  
 (2)  $x_n = \sin \frac{\pi n}{6}$ , (3)  $x_n = (-1)^n$ .

**Д** Простые задачи для самостоятельного решения.

2. Постройте сходящуюся подпоследовательность последовательности (1)  $x_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ ;  
 (2)  $x_n = \sin \frac{\pi n}{12}$ , (3)  $x_n = (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n}$ .

## 1.14.21. Предельные точки последовательности, 1

**С** Простые задачи для разбора на семинаре.

1. Приведите примеры последовательностей, у которых имеется

- 1** единственная предельная точка – вещественное число  
**2** ровно две предельных точки, и обе – вещественные числа  
**3** счетное число предельных точек  
**4** несчетное число предельных точек  
**5** ровно одна предельная точка – вещественное число и предельная точка  $+\infty$   
**6** все предельные точки которых образуют множество  $[0; 1]$

2. Докажите, что последовательность (1)  $x_n = \sin \frac{\pi n^2}{6}$ , (2)  $x_n = \sin \frac{\pi n}{6}$ , (3)  $x_n = \sum_{k=1}^n \sin \frac{\pi k}{6}$ , имеет конечное число предельных точек, но не имеет предела.

**Д** Простые задачи для самостоятельного решения.

3. Приведите примеры последовательностей, у которых имеется

- 1** единственная предельная точка – число 1.  
**2** ровно две предельных точки, числа  $-1$  и  $1$ .  
**3** множество предельных точек  $z_k = \frac{1}{k}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , и  $0$ .  
**4** множество предельных точек  $z_k = k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , и  $+\infty$ .  
**5** предельная точка – число  $0$  и предельная точка  $+\infty$   
**6** все предельные точки которых образуют множество  $[-1; 1]$

4. Докажите, что последовательность (1)  $x_n = \sin \frac{\pi n^2}{13}$ , (2)  $x_n = \cos \frac{\pi n}{8}$ , (3)  $x_n = \sum_{k=1}^n \cos \frac{\pi k}{8}$ , имеет конечное число предельных точек, но не имеет предела.

## 1.14.22. Предельные точки последовательности, 2

**С** Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

1. Найдите множество всех предельных точек последовательности (1)  $x_n = \frac{n-1}{n}$ , (2)  $x_n = \sin \frac{\pi n}{6}$ ,  
 (3)  $x_n = (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n}$ , (4)  $y_1 = 0$ ,  $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{n}$ ,  $x_n =$  дробная часть( $y_n$ ). (5)  $x_n = \overline{a_1}$ , если в десятичной записи  $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}$ . (6)  $x_n = \overline{a_1 a_0}$ , если в десятичной записи  $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}$ . (7)  $1; 1; 2; 1; 2; 3; 1; 2; 3; 4; \dots$  Найдите верхний и нижний пределы этих последовательностей.

**Д** Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

2. Найдите множество всех предельных точек последовательности (1)  $x_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$ ,  
 (2)  $x_n = \cos \frac{\pi n}{12}$ , (3)  $x_n = (-1)^n \sqrt[n]{n}$ , (4)  $y_n = \ln n$ ,  $x_n =$  дробная часть( $y_n$ ). (5)  $x_n = \overline{a_0}$ , если в десятичной записи  $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}$ . (6)  $x_n = \overline{a_2 a_1 a_0}$ , если в десятичной записи  $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}$ . (7)  $0; -1; 0; 1; -2; -1; 0; 1; 2; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; \dots$  Найдите верхний и нижний пределы этих последовательностей.

**1.14.23. Монотонные последовательности**

1. Докажите неравенство Бернулли,  $(1+x)^n \geq 1+nx$  при  $x \geq -1$  и  $n \geq 1$ .

**С** Сложные задачи для разбора на семинаре.

2. Докажите, что последовательность  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  монотонна.

3. Докажите, что последовательность  $x_1 = 13$ ,  $x_n = \sqrt{12 + x_{n-1}}$ ;  $n \geq 2$ , монотонна и ограничена. Найдите предел.

4. Докажите, что последовательность  $x_1 = 18$ ,  $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{36}{x_{n-1}}\right)$ ;  $n \geq 2$ , монотонна и ограничена. Найдите предел.

**Д** Сложные задачи для самостоятельного решения.

5. Докажите, что последовательность  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$  монотонна.

6. Докажите, что последовательность  $x_1 = 16$ ,  $x_n = \sqrt{20 + x_{n-1}}$ ;  $n \geq 2$ , монотонна и ограничена. Найдите предел.

7. Докажите, что последовательность  $x_1 = 27$ ,  $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{81}{x_{n-1}}\right)$ ;  $n \geq 2$ , монотонна и ограничена. Найдите предел.

**1.14.24. Монотонные подпоследовательности**

**С** Сложные задачи для разбора на семинаре.

1. Опишите все возможные варианты расположения предельных точек монотонной ограниченной последовательности. Приведите примеры.

2. Опишите все возможные варианты расположения предельных точек подпоследовательности монотонной ограниченной последовательности. Приведите примеры.

3. Опишите все возможные варианты расположения предельных точек ограниченной последовательности  $x_k$ , для которой подпоследовательность  $x_{2k}$  является возрастающей, а подпоследовательность  $x_{2k+1}$  является убывающей. Приведите примеры.

**Д** Сложные задачи для самостоятельного решения.

4. Опишите все возможные варианты расположения предельных точек возрастающей последовательности. Приведите примеры. Ответ обоснуйте.

5. Опишите все возможные варианты расположения предельных точек подпоследовательности возрастающей последовательности. Приведите примеры. Ответ обоснуйте.

6. Опишите все возможные варианты расположения предельных точек ограниченной последовательности  $x_k$ , для которой подпоследовательности  $x_{3k}$  и  $x_{3k+1}$  являются возрастающими, а подпоследовательность  $x_{3k+2}$  является убывающей. Приведите примеры. Ответ обоснуйте.

**1.14.25. Перестановка членов последовательности**

**С** Сложные задачи для разбора на семинаре.

1. Приведите пример последовательности  $x_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ , члены которой можно переставить так, что последовательность с переставленными членами этим свойством не обладает, т.е.  $y_n \neq o\left(\frac{1}{n}\right)$

**Д** Сложные задачи для самостоятельного решения.

2. Приведите пример последовательности  $x_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , члены которой можно переставить так, что последовательность с переставленными членами  $y_n \neq o\left(\frac{1}{n}\right)$

### 1.14.26. Степенные функции

**С** Простые задачи для разбора на семинаре.

1. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, найдите вторую производную, исследуйте направление выпуклости, найдите точки перегиба, нарисуйте эскиз графика функции, **(1)**  $f(x) = 3x^2 - 2x^3$ , **(2)**  $f(x) = 2x^6 - 3x^4$ , **(3)**  $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ , **(4)**  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ , **(5)**  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ , **(6)**  $f(x) = x(4 - x)^3$ , **(7)**  $f(x) = x^2(5 - x)^3$ , **(8)**  $f(x) = (x - 2)^3(10 - x)^5$ . **(9)**  $f(x) = x(x - 1)(x + 1)$ . **(10)**  $f(x) = (4 - x)\sqrt[3]{x}$ , **(11)**  $f(x) = (3 - x)\sqrt{x}$ .

**Д** Простые задачи для самостоятельного решения.

2. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, найдите вторую производную, исследуйте направление выпуклости, найдите точки перегиба, нарисуйте эскиз графика функции, **(1)**  $f(x) = 6x^5 - 5x^6$ , **(2)**  $f(x) = x^4 - 2x^2$ , **(3)**  $f(x) = x^3 - 3x$ , **(4)**  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ , **(5)**  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ , **(6)**  $f(x) = x(6 - x)^2$ , **(7)**  $f(x) = x^2(4 - x)^2$ , **(8)**  $f(x) = x(x - 3)(x + 2)$ . **(9)**  $f(x) = (6 - x)\sqrt[5]{x}$ , **(10)**  $f(x) = x\sqrt{3 - x}$ .

### 1.14.27. Иррациональные функции

**С** Простые задачи для разбора на семинаре.

1. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, найдите вторую производную, исследуйте направление выпуклости, найдите точки перегиба, нарисуйте эскиз графика функции, **(1)**  $f(x) = \sqrt{x(2 - x)}$ , **(2)**  $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{2 - x}$ , **(3)**  $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{6 - x}$ .

**Д** Простые задачи для самостоятельного решения.

2. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, найдите вторую производную, исследуйте направление выпуклости, найдите точки перегиба, нарисуйте эскиз графика функции, **(1)**  $f(x) = \sqrt{x(4 - x)}$ , **(2)**  $f(x) = \sqrt[5]{x} \cdot \sqrt[5]{64 - x}$ , **(3)**  $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{12 - x}$ .

### 1.14.28. Показательные функции

**С** Простые задачи для разбора на семинаре.

1. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, найдите вторую производную, исследуйте направление выпуклости, найдите точки перегиба, нарисуйте эскиз графика функции. **(1)**  $f(x) = x^2e^{-x}$ , **(2)**  $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$ ,

**Д** Простые задачи для самостоятельного решения.

2. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, найдите вторую производную, исследуйте направление выпуклости, найдите точки перегиба, нарисуйте эскиз графика функции. **(1)**  $f(x) = xe^{-x}$ , **(2)**  $f(x) = \sqrt[3]{x}e^{-x}$ .

### 1.14.29. Тригонометрические функции

**С** Простые задачи для разбора на семинаре.

1. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, найдите вторую производную, исследуйте направление выпуклости, найдите точки перегиба, нарисуйте эскиз графика функции, **(1)**  $f(x) = \sin x$ , **(2)**  $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ , **(3)**  $f(x) = \operatorname{tg} x$ ,



**Д** Простые задачи для самостоятельного решения.

2. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, найдите вторую производную, исследуйте направление выпуклости, найдите точки перегиба, нарисуйте эскиз графика функции, (1)  $f(x) = \cos x$ ,  
(2)  $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$ , (3)  $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$ ,

**1.14.30. Показательные и логарифмические функции с модулем****С** Сложные задачи для разбора на семинаре.

1. Найдите первую и вторую производные, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума и перегиба, нарисуйте эскиз графика,

$$(1) f(x) = x \ln x, g(x) = \begin{cases} x \ln |x| & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \end{cases} \quad (2) f(x) = x^2 \ln x, f(x) = \begin{cases} x|x| \ln |x| & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \frac{x}{\ln x}, f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln |x|} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

**Д** Сложные задачи для самостоятельного решения.

2. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, (1)  $f(x) = x \ln(-x)$ ,  $f(x) = \begin{cases} |x| \ln |x| & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \end{cases}$  (2)  $f(x) = x^2 \ln x$ ,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln |x| & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \end{cases} \quad (3) f(x) = \frac{x}{\ln x}, f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{\ln |x|} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

**1.14.31. Функции с особенными точками****С** Сложные задачи для разбора на семинаре.

1. Найдите координаты точек перегиба, нарисуйте эскиз графика. (1)  $f(x) = \sin \sqrt[3]{x}$ ,  
(2)  $f(x) = \sqrt[3]{\ln x}$ ,

**Д** Сложные задачи для самостоятельного решения.

2. Найдите координаты точек перегиба, нарисуйте эскиз графика. (1)  $f(x) = \sqrt[3]{x(x^2 - 1)}$ ,  
(2)  $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt[3]{x}$ ,

### 1.14.32. Показательно-степенные функции

**С** Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

1. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, найдите вторую производную, исследуйте направление выпуклости, найдите точки перегиба, нарисуйте эскиз графика функции. (1)  $f(x) = x^x$ , (2)  $f(x) = e^{1/x}$ , (3)  $f(x) = e^{-x^3}$ , (4)  $f(x) = e^{-1/x^2}$ .

**Д** Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

2. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, найдите вторую производную, исследуйте направление выпуклости, найдите точки перегиба, нарисуйте эскиз графика функции. (1)  $f(x) = x^{1/x}$ , точку перегиба не определяйте, (2)  $f(x) = e^{-x^2}$ , (3)  $f(x) = e^{-1/x^3}$ .

### 1.14.33. Исследование асимптот алгебраических функций

**С** Простые задачи для разбора на семинаре.

1. Найдите наклонные асимптоты (правостороннюю и левостороннюю), (1)  $f(x) = |x - 1|$ , (2)  $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x^3}$ , (3)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ ,

**Д** Простые задачи для самостоятельного решения.

2. Найдите наклонные асимптоты (правостороннюю и левостороннюю), (1)  $f(x) = |x|$ , (2)  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ , (3)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$ .

### 1.14.34. Исследование асимптот тригонометрических функций

**С** Простые задачи для разбора на семинаре.

1. Найдите наклонные асимптоты (правостороннюю и левостороннюю), (1)  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ , (2)  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ , (3)  $f(x) = x\sqrt{x} \sin \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

**Д** Простые задачи для самостоятельного решения.

2. Найдите наклонные асимптоты (правостороннюю и левостороннюю), (1)  $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ , (2)  $f(x) = x \operatorname{tg} \frac{1}{x}$ , (3)  $f(x) = x\sqrt{x} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

### 1.14.35. Исследование асимптот логарифмических функций

**С** Простые задачи для разбора на семинаре.

1. Найдите наклонные асимптоты (правостороннюю и левостороннюю), (1)  $f(x) = x \ln \frac{x+2}{x}$ , (2)  $f(x) = x^2 \ln \frac{x+2}{x}$ , (3)  $f(x) = x^2 \ln \cos \frac{1}{x}$ ,

**Д** Простые задачи для самостоятельного решения.

2. Найдите наклонные асимптоты (правостороннюю и левостороннюю), (1)  $f(x) = x \ln \frac{x+1}{x}$ , (2)  $f(x) = x^2 \ln \frac{x+1}{x}$ , (3)  $f(x) = x^2 \ln \left(x \sin \frac{1}{x}\right)$ ,

### 1.14.36. Исследование асимптот обратных тригонометрических функций

**С** Простые задачи для разбора на семинаре.

1. Найдите наклонные асимптоты (правостороннюю и левостороннюю), (1)  $f(x) = \operatorname{arctg} x$ , (2)  $f(x) = x \operatorname{arctg} x$ , (3)  $f(x) = x + \operatorname{arctg} x$ , (4)  $f(x) = x(\operatorname{arctg} 2x - \operatorname{arctg} x)$ , (5)  $f(x) = x^2 \operatorname{arcsin} \frac{1}{x}$ , (6)  $f(x) = x\sqrt{x} \operatorname{arcsin} \frac{1}{\sqrt{x}}$ ,

**Д** Простые задачи для самостоятельного решения.

2. Найдите наклонные асимптоты (правостороннюю и левостороннюю), (1)  $f(x) = \arcsin \frac{x^2-1}{x^2}$ ,  
(2)  $f(x) = x \operatorname{arctg} 2x$ , (3)  $f(x) = 2x - \operatorname{arctg} 2x$ , (4)  $f(x) = x(\operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{3})$ ,  
(5)  $f(x) = \arcsin \frac{x^2}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x$ , (6)  $f(x) = x^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ , (7)  $f(x) = x\sqrt{x} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}}$ ,

**1.14.37. Исследование асимптот простых иррациональных функций**

**С** Простые задачи для разбора на семинаре.

1. Найдите наклонные асимптоты (правостороннюю и левостороннюю), (1)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ ,  
(2)  $f(x) = \sqrt{9x^2 + 1}$ , (3)  $f(x) = \sqrt{16x^2 + 24x}$ , (4)  $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2}$ ,

**Д** Простые задачи для самостоятельного решения.

2. Найдите наклонные асимптоты (правостороннюю и левостороннюю), (1)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ ,  
(2)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ , (3)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ , (4)  $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ ,

**1.14.38. Исследование асимптот иррациональных функций**

**С** Задачи средней сложности для разбора на семинаре.

1. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, найдите наклонную асимптоту, нарисуйте эскиз графика функции,

(1)  $f(x) = \sqrt[3]{x(x-3)^2}$ , (2)  $f(x) = \sqrt[5]{x^2(x-5)^3}$ , (3)  $f(x) = \sqrt[3]{\frac{(x-3)^5}{x^2}}$ .

**Д** Задачи средней сложности для самостоятельного решения.

2. Найдите производную, исследуйте характер монотонности, найдите координаты точек локального экстремума, найдите наклонную асимптоту, нарисуйте эскиз графика функции,

(1)  $f(x) = \sqrt[3]{8x^2(x-6)}$ , (2)  $f(x) = \sqrt[5]{x^3(x-10)^2}$ , (3)  $f(x) = \sqrt[3]{\frac{(x-3)^4}{x}}$ .

**1.14.39. Исследование асимптот показательно-логарифмических функций**

**С** Сложные задачи для разбора на семинаре.

1. Найдите наклонную асимптоту при  $x \rightarrow +\infty$ , (1)  $f(x) = x \ln \cos \frac{1}{\sqrt{x}}$ , (2)  $f(x) = x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ ,

(3)  $f(x) = x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2}$ .

**Д** Сложные задачи для самостоятельного решения.

2. Найдите наклонную асимптоту при  $x \rightarrow +\infty$ , (1)  $f(x) = x \ln(\sqrt{x} \sin \frac{1}{\sqrt{x}})$ ,

(2)  $f(x) = x \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$ , (3)  $f(x) = x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}$ .

**Курс 1, семестр 1, модуль 2, семинар m2-08 (2012-2013)**

**Тема: Графики-3, параметрические функции**

**1.14.40. Параметрические функции**

1. Найдите промежутки возрастания и убывания, точки локального экстремума, \* точки перегиба, асимптоты, нарисуйте эскиз графика функции  $y = f(x)$ , заданной параметрически в виде **(1)**  $x = \cos t, y = \sin t, t \in [0; 2\pi)$ , **(2)**  $x = 2t - t^2, y = 3t - t^3$ , **(3)**  $x = -5t^2 + 2t^5, y = -3t^2 + 2t^3$ , **(4)**  $x = (t + 1)^2, y = (t - 1)^2$ , **(5)**  $x = \frac{t^2}{t-1}, y = \frac{t}{t^2-1}$ , **(6)**  $x = \frac{t^2+1}{1-t}, y = \frac{4t}{t+1}$ , **(7)**  $x = \frac{(t+2)^2}{t+1}, y = \frac{(t-2)^2}{t-1}$ , **(8)**  $x = \frac{t^2}{1-t^2}, y = \frac{1}{1+t^2}$ , **(9)**  $x = \frac{t(1-t)}{1+t^2}, y = \frac{t^2(1-t)}{1+t^2}$ , **(10)**  $x = \frac{t}{1-t^2}, y = \frac{t(1-2t^2)}{1-t^2}$ ,

2. Пусть функция  $y = f(x)$  задана параметрически в виде  $x = \frac{3t}{1-t^3}, y = \frac{3t^2}{1-t^3}$ . Нарисуйте эскиз графика.

3. Пусть функция  $y = f(x)$  задана параметрически в виде  $x = \frac{t^4}{t^2-1}, y = \frac{t^3}{t-1}$ . Нарисуйте эскиз графика.

4. Пусть функция  $y = f(x)$  задана параметрически в виде  $x = \frac{t^3}{t^2-1}, y = \frac{t^2}{t-1}$ . Нарисуйте эскиз графика.

5. Пусть функция  $y = f(x)$  задана параметрически в виде  $x = \frac{t^3}{t-1}, y = \frac{t^4}{t^2-1}$ . Нарисуйте эскиз графика.

6. Пусть функция  $y = f(x)$  задана параметрически в виде  $x = \frac{t^2}{t-1}, y = \frac{t^3}{t^2-1}$ . Нарисуйте эскиз графика.

7. Пусть функция  $y = f(x)$  задана параметрически в виде  $x = \frac{t^2}{t-1}, y = \frac{t^2}{t+1}$ . Нарисуйте эскиз графика.

8. Пусть функция  $y = f(x)$  задана параметрически в виде  $x = \frac{t}{1+t^5}, y = \frac{t^2}{1+t^5}$ . Нарисуйте эскиз графика.