Глава II

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

§ 13. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right)=0$$

или, если оно разрешено относительно $y^{(n)}$,

$$y^{(n)}=f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right). \tag{1}$$

Задача нахождения решения $y=\varphi(x)$ уравнения (1), удовлетворяющего начальным условиям

$$y\big|_{x=x_0}=y_0, \quad y'\big|_{x=x_0}=y_0', \ldots, y^{(n-1)}\big|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)}, \tag{2}$$

называется *задачей Коши* для уравнения (1)

Теорема существования и единственности решения задачи Коши. *Если в уравнении (1) функция $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$*

а) *непрерывна по всем своим аргументам $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ в некоторой области D их изменения,*

б) *имеет ограниченные в области D частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y'}$, $\frac{\partial f}{\partial y''}$, $\ldots$, $\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ по аргументам $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, то найдется интервал $x_0-h<x<x_0+h$, на котором существует единственное решение $y=\varphi(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$y\big|_{x=x_0}=y_0, \quad y'\big|_{x=x_0}=y_0', \ldots, y^{(n-1)}\big|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)},$$

где значения $x=x_0$, $y=y_0$, $y'=y_0'$, ..., $y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}$ содержатся в области D.

Для уравнения второго порядка $y''=f(x, y, y')$ начальные условия имеют вид

$$y\big|_{x=x_0}=y_0, \quad y'\big|_{x=x_0}=y_0',$$

где x_0, y_0, y_0' — данные числа. В этом случае теорема существования и единственности г е о м е т р и ч е с к и означает, что через данную точку $M_0(x_0, y_0)$ плоскости xOy с данным тангенсом угла наклона касательной y_0' проходит единственная кривая

Рассмотрим например, уравнение $y''=\sin y'+e^{-x^2 y}$ и начальные условия

$$y\big|_{x=x_0}=y_0, \quad y'\big|_{x=x_0}=y_0',$$

В данном случае $f(x, y, y') \equiv \sin y' + e^{-x^2 y}$. Эта функция определена и непрерывна при всех значениях x, y, y'. Ее частные производные по y и y' равны соответственно

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 e^{-x^2 y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \cos y'$$

и являются всюду непрерывными и ограниченными функциями своих аргументов. Следовательно, каковы бы ни были начальные условия

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\big|_{x=x_0} = y_0'$$

существует единственное решение данного уравнения, удовлетворяющее этим условиям. ◆

Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка (1) называется множество всех его решений, определяемое формулой $y=\varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, содержащей n произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$, таких, что, если заданы начальные условия (2), то найдутся такие значения $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, ..., \tilde{C}_n$, что $y=\varphi(x, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2, ..., \tilde{C}_n)$ будет являться решением уравнения (1), удовлетворяющим этим начальным условиям.

Любое решение, получаемое из общего решения при конкретных значениях произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$, называется *частным решением* дифференциального уравнения (1).

Уравнение вида $\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n)=0$, которое определяет неявно общее решение дифференциального уравнения называется *общим интегралом уравнения*. Давая постоянным $C_1, C_2, ..., C_n$ конкретные допустимые числовые значения, получим *частный интеграл* дифференциального уравнения. График частного решения или частного интеграла называется *интегральной кривой* данного дифференциального уравнения.

Пример 1. Показать, что $y=C_1x+C_2$ есть общее решение дифференциального уравнения $y''=0$.

Решение. Покажем, что $y=C_1x+C_2$ удовлетворяет данному уравнению при любых значениях постоянных C_1 и C_2. В самом деле, имеем $y'=C_1$, $y''=0$.

Пусть теперь заданы произвольные начальные условия $y|_{x=x_0} = y_0$, $y'|_{x=x_0} = y_0'$. Покажем, что постоянные C_1 и C_2 можно подобрать так, что $y=C_1x+C_2$ будет удовлетворять этим условиям. Имеем $y=C_1x+C_2$, $y'=C_1$. Полагая $x=x_0$, получаем систему

$$\begin{cases} y_0 = C_1x_0 + C_2, \\ y_0' = C_1, \end{cases}$$

из которой однозначно определяются $C_1=y_0'$ и $C_2=y_0-x_0y_0'$. Таким образом, решение $y=y_0'(x-x_0)+y_0$ удовлетворяет поставленным начальным условиям. Геометрически это означает, что через каждую точку $M_0(x_0, y_0)$ плоскости xOy с заданным угловым коэффициентом y_0' проходит единственная прямая.

Задание одного начального условия, например $y|_{x=x_0}=y_0$, определяет пучок прямых с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$, т. е. одного начального условия недостаточно для выделения единственного решения.

316. Дифференциальное уравнение $y''=2\sqrt{y'}$ имеет два решения $y_1(x)\equiv 0$, $y_2(x)\equiv x^3/3$, удовлетворяющих начальным условиям $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=0$. Почему результат не противоречит теореме существования и единственности решения задачи Коши?

317. Могут ли графики двух решений данного уравнения на плоскости xOy касаться друг друга в некоторой точке (x_0, y_0) а) для уравнения $y'=x^2+y^2$; б) для уравнения $y''=x^2+y^2$; в) для уравнения $y'''=x^2+y^2$?

В следующих задачах показать, что данные функции являются решениями указанных уравнений:

318. $y = x(\sin x - \cos x)$, $\quad y'' + y = 2(\cos x + \sin x)$.

319. $y = x^2 \ln x$, $\quad xy''' = 2$.

320. $x + C = e^{-y}$, $\quad y'' = y'^2$.

321. $\begin{cases} x = 1 + e^t, \\ y = te^t, \end{cases} \quad (x-1)y'' = 1.$

322. $\begin{cases} x = C_1 + \dfrac{t^4}{4}, \\ y = C_2 + \dfrac{t^5}{5}, \end{cases} \quad y''y'^3 = 1.$

Показать, что данные функции являются общими решениями соответствующих уравнений.

323. $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$, $\quad y'' + y = 0$.

324. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 1$, $\quad y'' - 3y' + 2y = 2$.

Показать, что данные соотношения являются интегралами (общими или частными) указанных уравнений.

325. $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = 1$,

$y'' = \left(1 + y'^2\right)^{3/2}$.

326. $y^2 = 1 + (1 - x)^2$, $\quad y'^2 + yy'' = 1$.

§ 14. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

Укажем некоторые виды дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка.

I Уравнение вида $y^{(n)}=f(x)$. После n-кратного интегрирования получается общее решение

$$y = \underbrace{\int \cdots \int}_{n} f(x) \underbrace{dx \cdots dx}_{n} + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} +$$

$$+ \cdots + C_{n-1} x + C_n.$$

II. Уравнение не содержит искомой функции и ее производных до порядка k—1 включительно:

$$F\left(x,\ y^{(k)},\ y^{(k+1)},\ \ldots,\ y^{(n)}\right) = 0.$$

Порядок такого уравнения можно понизить на k единиц заменой $y^{(k)}(x) = p(x)$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$F(x, p, p', \ldots, p^{(n-k)}) = 0.$$

Из последнего уравнения, если это возможно, определяем $p = f(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$, а затем находим y из уравнения $y^{(k)} = f(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$ k-кратным интегрированием.

III. Уравнение не содержит независимого переменного:

$$F\left(y, y'\ y'', \ldots\ y^{(n)}\right) = 0.$$

Подстановка $y' = p$ позволяет понизить порядок уравнения на единицу. При этом p рассматривается как новая неизвестная функция от y: $p = p(y)$. Все производные y', y'', ..., $y^{(n)}$ выражаются через производные от новой неизвестной функции p по y:

$$y' = \frac{dy}{dx} = p,$$

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy},$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)\frac{dy}{dx} =$$

$$= p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 \text{ и т. д.}$$

Подставив эти выражения вместо y', y'', ..., $y^{(n)}$ в уравнение, получим дифференциальное уравнение $(n-1)$-го порядка.

IV. Уравнение $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, однородное относительно аргументов $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$, т. е.

$$F\left(x, ty, ty', \ldots, ty^{(n)}\right) = t^k F\left(x, y, y', \ldots y^{(n)}\right).$$

Порядок такого уравнения может быть понижен на единицу подстановкой $y = e^{\int z\,dx}$, где z — новая неизвестная функция от x: $z = z(x)$.

V. Уравнение, записанное в дифференциалах,

$$F\left(x, y, dx, dy, d^2y, \ldots, d^{(n)}y\right) = 0,$$

в котором функция F однородна относительно своих аргументов x, y, dx, dy, d^2y, ..., d^ny, если считать x и dx — первого измерения, а y,

dy, d^2y и т. д. — измерения m. Тогда $\frac{dy}{dx}$ будет иметь измерение $m-1$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ — измерение $m-2$ и т. д.

Для понижения порядка применяется подстановка $x=e^t$, $y=ue^{mt}$. В результате получается дифференциальное уравнение между u и t, не содержащее явно t, т. е. допускающее понижение порядка на единицу (случай III).

Рассмотрим примеры на различные случаи понижения порядка дифференциального уравнения.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'''=\sin x+\cos x$.

Решение. Интегрируя последовательно данное уравнение, имеем:

$$y''=-\cos x+\sin x+C_1,$$

$$y'=-\sin x-\cos x+C_1x+C_2,$$

$$y=\cos x-\sin x+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y'''=\frac{\ln x}{x^2}$ и выделить решение, удовлетворяющее начальным условиям $y|_{x=1}=0$, $y'|_{x=1}=1$, $y''|_{x=1}=2$.

Решение. Интегрируем это уравнение последовательно три раза:

$$y''=\int\frac{\ln x}{x^2}\,dx=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C_1,$$

$$y'=-\frac{1}{2}\ln^2 x-\ln x+C_1x+C_2, \qquad (1)$$

$$y=-\frac{x}{2}\ln^2 x+C_1\frac{x_2}{2}+C_2x+C_3.$$

Найдем решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям. Подставляя начальные данные $y|_{x=1}=0$, $y'|_{x=1}=1$, $y''|_{x=1}=2$ в (1), будем иметь

$$\frac{C_1}{2}+C_2+C_3=0, \quad C_1+C_2=1, \quad -1+C_1=2.$$

Отсюда $C_1=3$, $C_2=-2$, $C_3=1/2$. Искомым решением будет

$$y=-\frac{x}{2}\ln^2 x+\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{1}{2}.$$

Пример 3. Решить уравнение $y'''=\sqrt{1+(y'')^2}$.

Решение. Данное уравнение не содержит искомой функции y и ее производной, поэтому полагаем $y''=p$. После этого уравнение примет вид

$$\frac{dp}{dx}=\sqrt{1+p^2},$$

Разделяя переменные и интегрируя, найдем

$$p=\frac{e^{x+C_1}-e^{-(x+C_1)}}{2}.$$

Заменим p на y''

$$y''=\frac{e^{x+C_1}-e^{-(x+C_1)}}{2};$$

Интегрируя последовательно, будем иметь

$$y'=\frac{e^{x+C_1}+e^{-(x+C_1)}}{2}+C_2 \text{ и } y=\frac{e^{x+C_1}-e^{-(x+C_1)}}{2}+C_2x+C_3,$$

или

$$y=\operatorname{sh}(x+C_1)+C_2x+C_3$$

Пример 4. Решить уравнение $xy^{\mathrm{V}}-y^{\mathrm{IV}}=0$

Решение Уравнение не содержит искомой функции и ее производных до третьего порядка включительно Поэтому, полагая $y^{\mathrm{IV}}=p$, получаем

$$x\frac{dp}{dx}-p=0, \text{ откуда } p=C_1x, \quad y^{\mathrm{IV}}=C_1x.$$

Последовательно интегрируя, найдем

$$y'''=C_1\frac{x^2}{2}+C_2, \quad y''=C_1\frac{x^3}{6}+C_2x+C_3,$$

$$y'=C_1\frac{x^4}{24}+C_2\frac{x^2}{2}+C_3x+C_4,$$

$$y=C_1\frac{x^5}{120}+C_2\frac{x^3}{6}+C_3\frac{x^2}{2}+C_4x+C_5;$$

или

$$y=\overline{C}_1x^5+\overline{C}_2x^3+\overline{C}_3x^2+C_4x+C_5,$$

где $\overline{C}_1=C_1/120$, $\overline{C}_2=\overline{C}_2/6$, $\overline{C}_3=\overline{C}_3/2$

Пример 5. Решить уравнение $y''+y'^2=2e^{-y}$

Решение Уравнение не содержит независимого переменного x Полагая $y'=p$ $y''=p\dfrac{dp}{dy}$, получаем уравнение Бернулли

$$p\frac{dp}{dy}+p^2=2e^{-y}.$$

Подстановкой $p^2=z$ оно сводится к линейному уравнению

$$\frac{dz}{dy}+2z=4e^{-y},$$

общее решение которого $z=4e^{-y}+C_1e^{-2y}$ Заменяя z на $p^2=y'^2$, получаем

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{4e^{-y}+C_1e^{-2y}}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, будем иметь

$$x+C_2=\pm\frac{1}{2}\sqrt{4e^y+C_1}, \quad \text{откуда } e^y+\tilde{C}_1=(x+C_2)^2,$$

где $\tilde{C}_1=C_1/4$

Это есть общий интеграл данного уравнения

Пример 6 Решить уравнение $x^2yy''=(y-xy')^2$

Решение Данное уравнение однородно относительно y, y', y'' Порядок этого уравнения понижается на единицу подстановкой $y=$ $=e^{\int z\,dx}$, где z — новая неизвестная функция от x Имеем

$$y'=ze^{\int z\,dx}, \quad y''=(z'+z^2)\,e^{\int z\,dx}.$$

Подставляя выражения для y, y', y'' в уравнение, получаем

$$x^2(z'+z^2)\,e^{2\int z\,dx}=\left(e^{\int z\,dx}-xz\,e^{\int z\,dx}\right)^2.$$

Сокращаем на $e^{2\int z\,dx}$

$$x^2(z'+z^2)=(1-xz)^2, \quad \text{или } x^2z'+2xz=1$$

Это уравнение линейное Левую часть его можно записать в виде $(x^2z)'=1$, откуда

$$x^2z=x+C_1, \quad \text{или } z=\frac{1}{x}+\frac{C_1}{x^2}.$$

Находим интеграл

$$\int z\,dx=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{C_1}{x^2}\right)dx=\ln|x|-\frac{C_1}{x}+\ln C_2$$

Общим решением данного уравнения будет

$$y=e^{\int z\,dx}=e^{\ln|x|-\frac{C_1}{x}+\ln C_2}, \quad \text{или } y=C_2xe^{-\frac{C_1}{x}},$$

Кроме того уравнение имеет очевидное решение $y=0$ которое получается из общего при $C_2=0$

Пример 7 Решить уравнение $x^3y''=(y-xy')^2$

Решение Покажем, что это уравнение — обобщенное однородное Считая x, y, y', y'' величинами 1 го, m го, $(m-1)$ го и $(m-2)$ го измерений соответственно и приравнивая измерения всех членов, получаем

$$3+(m-2)=2m, \tag{2}$$

откуда $m=1$ Разрешимость уравнения (2) является условием обобщенной однородности уравнения

Сделаем подстановку $x=e^t$, $y=ue^t$ Так как

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\left(\frac{du}{dt}+u\right)e^t}{e^t}=\frac{du}{dt}+u,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{du}{dt}}{e^t}=e^{-t}\left(\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{du}{dt}\right),$$

то данное уравнение после сокращения на множитель e^{2t} примет вид

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{du}{dt}=\left(\frac{du}{dt}\right)^2.$$

Положив $\frac{du}{dt}=p$, $\frac{d^2u}{dt^2}=p\frac{dp}{du}$, получим $p\frac{dp}{du}+p=p^2$. Отсюда $p=0$ или $\frac{dp}{du}+1=p$. Интегрируя второе уравнение, найдем

$$p=1+C_1e^u, \text{ или } \frac{du}{dt}=1+C_1e^u.$$

Общее решение этого уравнения будет

$$u=\ln\frac{e^t}{C_1e^t+C_2}.$$

Возвращаясь к переменным x и y, получаем общее решение данного уравнения.

$$y=x\ln\frac{x}{C_1x+C_2}.$$

Случаи $p=0$ дает $u=C$ или $y=Cx$ — частное решение, которое получается из общего при $C_1=e^{-C}$, $C_2=0$.

Замечание При решении задачи Коши для уравнений высших порядков целесообразно определять значения постоянных C_i в процессе решения, а не после нахождения общего решения уравнения Это ускоряет решение задачи и, кроме того, может оказаться, что интегрирование значительно упрощается, когда постоянные C_i принимают конкретные числовые значения, в то время как при произвольных C_i интегрирование затруднительно, а то и вообще невозможно в элементарных функциях

Пример 8. Решить задачу Коши $y''=2y^3$, $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=1$.

Решение Полагая $y'=p$, получаем

$$p\frac{dp}{dy}=2y^3,$$

откуда

$$p^2=y^4+C_1, \text{ или } \frac{dy}{dx}=\sqrt{y^4+C_1}.$$

Разделяя переменные, найдем

$$x+C_2=\int(y^4+C_1)^{-\frac{1}{2}}\,dy.$$

В правой части последнего равенства имеем интеграл от дифференциального бинома Здесь $m=0$, $n=4$, $p=-1/2$, т е неинтегрируемый случай (см [11])

Следовательно, этот интеграл не выражается в виде конечной комбинации элементарных функций Однако если использовать начальные условия, то получим $C_1=0$ Так что $\frac{dy}{dx}=y^2$, откуда, учитывая начальные условия, окончательно находим $y=\frac{1}{1-x}$.

Пример 9. Найти плоские кривые, у которых радиус кривизны пропорционален длине нормали

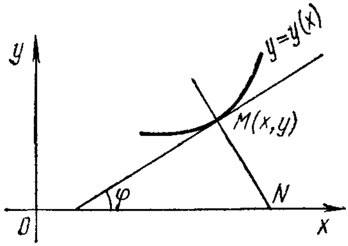

Рис 24

Решение Пусть $y=y(x)$ — уравнение искомой кривой Ее радиус кривизны $R=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$. Длина нормали MN кривой равна (рис 24) $MN=|y|\sqrt{1+y'^2}$.

Определяющее свойство кривой выражается дифференциальным уравнением

$$\frac{1+y'^2}{y''}=ky, \tag{3}$$

где k — коэффициент пропорциональности, могущий принимать как положительные, так и отрицательные значения Перепишем уравнение (3) в виде

$$\frac{2y'y''}{1+y'^2}=\frac{2y'}{ky}.$$

Интегрируя, находим

$$\ln(1+y'^2)=\frac{2}{k}(\ln|y|+\ln C_1), \text{ или } \frac{dy}{dx}=\sqrt{\left(\frac{y}{C_1}\right)^{\frac{2}{k}}-1}.$$

Разделяя переменные и интегрируя еще раз, получаем

$$x+C_2=\int\frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{C_1}\right)^{2/k}-1}}$$

— общий интеграл исходного уравнения (3).

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1) $k=-1$. Тогда будем иметь

$$x+C_2=\int\frac{y\,dy}{\sqrt{C_1^2-y^2}},$$

и после интегрирования —

$$x+C_2=-\sqrt{C_1^2-y^2}.$$

Отсюда получаем $(x+C_2)^2+y^2=C_1^2$. Искомые кривые — окружности произвольных радиусов с центрами на оси Ox.

2) $k=-2$. В этом случае приходим к уравнению

$$x+C_2=\int\sqrt{\frac{y}{C_1-y}}\,dy.$$

Полагая $y=\frac{C_1}{2}(1-\cos t)$, найдем что

$$\int\sqrt{\frac{y}{C_1-y}}\,dy=\frac{C_1}{2}(t-\sin t);$$

Таким образом, искомые кривые определяются в параметрической форме уравнениями:

$$x+C_2=\frac{C_1}{2}(t-\sin t),\quad y=\frac{C_1}{2}(1-\cos t).$$

Это — циклоиды, образованные качением по оси Ox окружностей произвольных радиусов.

3) $k=1$. В этом случае имеем

$$x+C_2=C_1\int\limits_{C_1}^{y}\frac{dy}{\sqrt{y^2-C_1^2}}=C_1\ln\frac{y+\sqrt{y^2-C_1^2}}{C_1},$$

откуда

$$y+\sqrt{y^2-C_1^2}=C_1 e^{\frac{x+C_2}{C_1}},\quad y-\sqrt{y^2-C_1^2}=C_1 e^{-\frac{x+C_2}{C_1}}.$$

Складывая полученные равенства, будем иметь

$$y=\frac{C_1}{2}\left(e^{\frac{x+C_2}{C_1}}+e^{-\frac{x+C_2}{C_1}}\right)=C_1\operatorname{ch}\frac{x+C_2}{C_1};$$

это — цепные линии.

4) $k=2$. Тогда будем иметь

$$x+C_2=\int\frac{dy}{\sqrt{\frac{y}{C_1}-1}},\ \text{или}\ x+C_2=2C_1\sqrt{\frac{y}{C_1}-1},$$

Отсюда $(x+C_2)^2=4C_1(y-C_1)$; это — параболы, оси которых параллельны оси Oy.

Проинтегрировать следующие уравнения:

327. $y^{IV}=x$.

328. $y'''=x+\cos x$.

329. $y''(x+2)^5=1;\quad y(-1)=\frac{1}{12},\quad y'(-1)=-1/4$.

330. $y''=xe^x,\quad y(0)=y'(0)=0$.

331. $y''=2x\ln x$.

332. $xy''=y'$.

333. $xy''+y'=0$.

334. $xy''=(1+2x^2)y'$.

335. $xy''=y'+x^2$.

336. $x\ln x\cdot y''=y'$.

337. $xy''=y'\ln\frac{y'}{x}$.

338. $2y''=\frac{y'}{x}+\frac{x^2}{y'};\quad y(1)=\frac{\sqrt{2}}{5},\quad y'(1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

339. $y'''=\sqrt{1-y''^2}$.

340. $xy'''-y''=0$.

341. $y''=\sqrt{1+y'^2}$.

342. $y''=y'^2$.

343. $y''=\sqrt{1-y'^2}$.

344. $y''=1+y'^2$.

345. $y''=\sqrt{1+y'}$.

346. $y''=y'\ln y';\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1$.

347. $y''+y'+2=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=-2$.

348. $y''=y'(1+y')$.

349. $3y''=\left(1+y'^2\right)^{3/2}$.

350. $y'''+y''^2=0$.

351. $yy'' = y'^2$.

352. $y'' = 2yy'$; $y(0) = y'(0) = 1$.

353. $3y'y'' = 2y$; $y(0) = y'(0) = 1$.

354. $2y'' = 3y^2$; $y(-2) = 1$, $y'(-2) = -1$.

355. $yy'' + y'^2 = 0$.

356. $yy'' = y' + y'^2$.

357. $yy'' = 1 + y'^2$.

358. $2yy'' = 1 + y'^2$.

359. $y^3y'' = -1$; $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

360. $yy'' - y'^2 = y^2y'$.

361. $y'' = e^{2y}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

362. $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$.

363. $y''' = 3yy'$; $y(0) = y'(0) = 1$, $y''(0) = 3/2$.

364. Найти плоские кривые, у которых радиус кривизны пропорционален кубу нормали.

365. Определить форму равновесия нерастяжимой нити, на которую действует нагрузка так, что на каждую единицу горизонтальной проекции нагрузка одинакова (цепи цепных мостов).

366. Найти время, нужное для того, чтобы упасть на Землю с высоты 400 000 км (приблизительное расстояние Луны от центра Земли), если эта высота исчисляется от центра Земли и если радиус Земли равен приблизительно 6400 км.

367. Найти закон движения материальной точки массы m по прямой OA под действием отталкивающей силы, обратно пропорциональной третьей степени расстояния точки $x = OM$ от неподвижного центра O.

368. Тело массой m падает с некоторой высоты со скоростью v. При падении тело испытывает сопротивление, пропорциональное квадрату скорости. Найти закон движения падающего тела.

369. Найти кривую, проходящую через начало координат и такую, что площадь треугольника, образованного касательной к кривой в некоторой точке, ординатой этой точки и осью Ox, пропорциональна площа-