ди криволинейной трапеции, образованной кривой, осью Ox и ординатой этой точки.

370. Определить кривую, у которой радиус кривизны равен постоянной величине.

§ 15. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ n-го ПОРЯДКА

1°. Линейная независимость функций. Определитель Вронского. Определитель Грама. Пусть имеем конечную систему из n функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$, определенных на интервале (a, b). Функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ называют *линейно зависимыми* на интервале (a, b), если существуют постоянные α_1, α_2, ..., α_n, не все равные нулю, такие, что для всех значений x из этого интервала справедливо тождество

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \cdots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0.$$

Если же это тождество выполняется только при $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$, то функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ называются *линейно независимыми* на интервале (a, b).

Пример 1. Показать, что система функций 1, x, x^2, x^3 линейно независима на интервале $(-\infty, +\infty)$.

Решение. В самом деле, равенство $\alpha_1\cdot 1+\alpha_2 x+\alpha_3 x^2+$ $+\alpha_4 x^3=0$ может выполняться для всех $x\in(-\infty, +\infty)$ только при условии, что $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$. Если же хоть одно из этих чисел не равно нулю, то в левой части равенства будем иметь многочлен степени не выше третьей, а он может обратиться в ноль не более, чем при трех значениях x из данного интервала.

Пример 2. Показать, что система функций e^{k_1x}, e^{k_2x}, e^{k_3x}, где k_1, k_2, k_3 попарно различны, линейно независима на интервале $-\infty<x<+\infty$.

Решение. Предположим обратное, т. е. что данная система функций линейно зависима на этом интервале. Тогда

$$\alpha_1 e^{k_1x} + \alpha_2 e^{k_2x} + \alpha_3 e^{k_3x} \equiv 0 \tag{1}$$

на интервале $(-\infty, +\infty)$, причем, по крайней мере, одно из чисел α_1, α_2, α_3 отлично от нуля, например $\alpha_3\neq 0$. Деля обе части тождества (1) на e^{k_1x}, будем иметь

$$\alpha_1 + \alpha_2 e^{(k_2-k_1)x} + \alpha_3 e^{(k_3-k_1)x} \equiv 0.$$

Дифференцируя тождество, получаем

$$\alpha_2 (k_2-k_1) e^{(k_2-k_1)x} + \alpha_3 (k_3-k_1) e^{(k_3-k_1)x} \equiv 0. \tag{2}$$

Делим обе части тождества (2) на $e^{(k_2-k_1)x}$:

$$\alpha_2 (k_2-k_1) + \alpha_3 (k_3-k_1) e^{(k_3-k_2)x} \equiv 0, \tag{3}$$

Дифференцируя (3), получаем

$$\alpha_3 (k_3-k_1)(k_3-k_2) e^{(k_3-k_2)x} \equiv 0$$

что невозможно, так как $\alpha_3\neq 0$ по предположению, $k_3\neq k_1$, $k_3\neq k_2$ по условию, а $e^{(k_3-k_2)x}\neq 0$.

Наше предположение о линейной зависимости данной системы функций привело к противоречию, следовательно, эта система функций линейно независима на интервале $(-\infty, +\infty)$, т. е. тождество (1) будет выполняться только при $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$.

Пример 3. Показать, что система функций $e^{\alpha x}\sin\beta x$, $e^{\alpha x}\cos\beta x$, где $\beta\neq 0$, линейно независима на интервале $-\infty<x<+\infty$.

Решение. Определим значения α_1 и α_2, при которых будет выполняться тождество

$$\alpha_1 e^{\alpha x}\sin\beta x+\alpha_2 e^{\alpha x}\cos\beta x\equiv 0. \tag{4}$$

Разделим обе его части на $e^{\alpha x}\neq 0$:

$$\alpha_1\sin\beta x+\alpha_2\cos\beta x\equiv 0. \tag{5}$$

Подставляя в (5) значение $x=0$, получаем $\alpha_2=0$ и, значит, $\alpha_1\sin\beta x\equiv\equiv 0$; но функция $\sin\beta x$ не равна тождественно нулю, поэтому $\alpha_1=0$. Тождество (5), а следовательно, и (4) имеют место только при $\alpha_1==\alpha_2=0$, т. е. данные функции линейно независимы в интервале $-\infty<x<+\infty$.

Замечание. Попутно доказана линейная независимость тригонометрических функций $\sin\beta x$, $\cos\beta x$.

Пример 4. Доказать, что функции

$$\sin x,\quad \sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right),\quad \sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right) \tag{6}$$

линейно зависимы в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Решение. Покажем, что существуют такие числа α_1, α_2, α_3, не все равные нулю, что в интервале $-\infty<x<+\infty$ справедливо тождество

$$\alpha_1\sin x+\alpha_2\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)+\alpha_3\sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right)\equiv 0. \tag{7}$$

Предполагаем тождество (7) выполненным; положим, например, $x=0$, $x=\pi/4$, $x=\pi/2$. Тогда получим однородную систему трех уравнений с тремя неизвестными α_1, α_2, α_3:

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha_2\sin\frac{\pi}{8}-\alpha_3\sin\frac{\pi}{8}=0,\\ &\alpha_1\frac{1}{\sqrt{2}}+\alpha_2\sin\frac{3\pi}{8}+\alpha_3\sin\frac{\pi}{8}=0,\\ &\alpha_1+\alpha_2\sin\frac{5\pi}{8}+\alpha_3\sin\frac{3\pi}{8}=0.\end{aligned}\right. \tag{8}$$

Определитель этой системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & \sin\frac{\pi}{8} & -\sin\frac{\pi}{8}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sin\frac{3\pi}{8} & \sin\frac{\pi}{8}\\ 1 & \sin\frac{5\pi}{8} & \sin\frac{3\pi}{8}\end{vmatrix}=0.$$

Следовательно, однородная система (8) имеет ненулевые решения, т. е. существуют числа α_1, α_2, α_3, среди которых имеется по крайней мере одно отличное от нуля. Для нахождения такой тройки чисел α_1, α_2, α_3 возьмем, например, два первых уравнения системы (8).

$$\alpha_2 \sin\frac{\pi}{8} - \alpha_3 \sin\frac{\pi}{8} = 0,$$

$$\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}} + \alpha_2 \sin\frac{3}{8}\pi + \alpha_3 \sin\frac{\pi}{8} = 0.$$

Из первого уравнения имеем $\alpha_2=\alpha_3$, из второго $\alpha_1=-2\cos\frac{\pi}{8}\cdot\alpha_3$. Полагая $\alpha_3=1$, получим ненулевое решение системы (8):

$$\alpha_1 = -2\cos\frac{\pi}{8}, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 1.$$

Покажем теперь, что при этих значениях α_1, α_2, α_3 тождество (7) будет выполняться для всех $x \in (-\infty, +\infty)$ *). Имеем

$$\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right) + \alpha_3 \sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right) \equiv$$

$$\equiv -2\cos\frac{\pi}{8}\sin x + 2\sin x\cos\frac{\pi}{8} \equiv 0,$$

каково бы ни было x. Следовательно, система функций (6) линейно зависима на интервале $-\infty<x<+\infty$.

З а м е ч а н и е. Для случая двух функций можно дать более простой критерий линейной независимости. Именно, функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ будут линейно независимыми на интервале (a, b), если их отношение не равно тождественно постоянной $\left(\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \not\equiv \text{const}\right)$ на этом интервале; если же $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \equiv \text{const}$, то функции будут линейно зависимыми.

Пример 5. Функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ линейно независимы в интервале $0<x<\frac{\pi}{2}$, так как их отношение $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x}=\operatorname{tg}^2 x \not\equiv \text{const}$ в этом интервале.

Пример 6. Функции $\sin 2x$ и $\sin x\cos x$ линейно зависимы в интервале $-\infty<x<+\infty$, так как их отношение $\frac{\sin 2x}{\sin x\cos x} \equiv$

---

*) Линейную зависимость функций $\sin x$, $\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$, $\sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$ можно установить, если заметить, что $\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right) = 2\cos\frac{\pi}{8}\sin x$, или $\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right)-2\cos\frac{\pi}{8}\sin x \equiv 0$.

$\equiv \dfrac{2\sin x\cos x}{\sin x\cos x}\equiv 2=\text{const}$ в этом интервале (в точках разрыва функции $\dfrac{\sin 2x}{\sin x\cos x}$ доопределяем это отношение по непрерывности).

Пусть n функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ имеют производные $(n-1)$-го порядка. Определитель

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n]=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

называется *определителем Вронского* для этих функций. Определитель Вронского вообще является функцией от x, определенной в некотором интервале.

Пример 7. Найти определитель Вронского для функций $y_1(x)=e^{k_1x}$, $y_2(x)=e^{k_2x}$, $y_3(x)=e^{k_3x}$.

Решение. Имеем

$$W[y_1, y_2, y_3]=\begin{vmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} & e^{k_3x} \\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_2x} & k_3e^{k_3x} \\ k_1^2e^{k_1x} & k_2^2e^{k_2x} & k_3^2e^{k_3x} \end{vmatrix}=$$

$$=e^{(k_1+k_2+k_3)x}(k_2-k_1)(k_3-k_1)(k_3-k_2).$$

Пример 8. Найти определитель Вронского для функций: $y_1(x)=\sin x$, $y_2(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)$, $y_3(x)=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)$.

Решение. Имеем

$$W[y_1, y_2, y_3]=\begin{vmatrix} \sin x & \sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right) & \sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right) \\ \cos x & \cos\left(x+\frac{\pi}{8}\right) & \cos\left(x-\frac{\pi}{8}\right) \\ -\sin x & -\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right) & -\sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right) \end{vmatrix}=0,$$

так как первая и последняя строки определителя пропорциональны.

Теорема. *Если система функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ линейно зависима на отрезке $[a, b]$, то ее определитель Вронского тождественно равен нулю на этом отрезке.*

Так, например, система функций $\sin x$, $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)$, $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)$ линейно зависима в интервале $(-\infty, +\infty)$, и определитель Вронского этих функций равен нулю всюду в этом интервале (см. примеры 4 и 8).

Эта теорема дает необходимое условие линейной зависимости системы функций. Обратное утверждение неверно, т. е. определитель Вронского может тождественно обращаться в ноль и в том случае, когда данные функции образуют линейно независимую систему на некотором интервале.

Пример 9. Рассмотрим две функции:

$$y_1(x)=\begin{cases}0, & \text{если } 0\leqslant x<\dfrac{1}{2},\\ \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2, & \text{если } \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1;\end{cases}$$

$$y_2(x)=\begin{cases}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2},\\ 0, & \text{если } \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1;\end{cases}$$

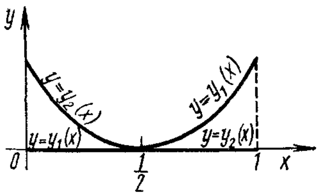

Рис. 25

Графики их имеют вид, указанный на рис. 25.

Эта система функций линейно независима, так как тождество $\alpha_1y_1(x)+\alpha_2y_2(x)\equiv 0$ выполняется только при $\alpha_1=\alpha_2=0$. В самом деле, рассматривая его на отрезке $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, мы получаем $\alpha_2y_2(x)\equiv 0$, откуда $\alpha_2=0$, так как $y_2(x)\not\equiv 0$; на отрезке же $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ имеем $\alpha_1y_1(x)\equiv 0$, откуда $\alpha_1=0$, так как $y_1(x)\not\equiv 0$ на этом отрезке.

Найдем определитель Вронского $W[y_1, y_2]$ системы. На отрезке $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$

$$W[y_1, y_2]=\begin{vmatrix}0 & \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2\\ 0 & 2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\end{vmatrix}=0,$$

на отрезке $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$

$$W[y_1, y_2]=\begin{vmatrix}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 & 0\\ 2\left(x-\dfrac{1}{2}\right) & 0\end{vmatrix}=0.$$

Таким образом, определитель Вронского $W[y_1, y_2]\equiv 0$ на отрезке $[0, 1]$.

Пусть имеем систему функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, заданных на отрезке $[a, b]$. Положим

$$(y_i, y_j)=\int_a^b y_i(x)\,y_j(x)\,dx, \quad i, j=1, 2, \ldots, n.$$

Определитель

$$\Gamma(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} (y_1, y_1) & (y_1, y_2) & \cdots & (y_1, y_n) \\ (y_2, y_1) & (y_2, y_2) & \cdots & (y_2, y_n) \\ (y_n, y_1) & (y_n, y_2) & \cdots & (y_n, y_n) \end{vmatrix}$$

называется *определителем Грама* системы функций $\{y_k(x)\}$.

Теорема. *Для того чтобы система функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель Грама равнялся нулю.*

Пример 10. Показать, что функции $y_1 = x$, $y_2 = 2x$ линейно зависимы на отрезке $[0, 1]$.

Решение. Имеем

$$(y_1, y_1) = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}; \quad (y_1, y_2) = (y_2, y_1) =$$

$$= \int_0^1 2x^2\,dx = \frac{2}{3}; \quad (y_2, y_2) = \int_0^1 4x^2\,dx = \frac{4}{3};$$

$$\Gamma(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{vmatrix} = 0,$$

следовательно, функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы.

Исследовать, являются ли данные функции линейно независимыми в их области определения.

371. $4, x$.

372. $1, 2, x, x^2$.

373. $x, 2x, x^2$.

374. e^x, xe^x, x^2e^x.

375. $\sin x, \cos x, \cos 2x$.

376. $1, \sin x, \cos 2x$.

377. $5, \cos^2 x, \sin^2 x$.

378. $\cos x, \cos(x+1), \cos(x-2)$.

379. $1, \sin 2x, (\sin x - \cos x)^2$.

380. $x, a^{\lg_a x}$ $(x > 0)$.

381. $\lg_a x$, $\lg_a x^2$ $(x > 0)$.

382. $1, \arcsin x, \arccos x$.

383. $5, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x$.

384. $2\pi, \operatorname{arctg}\frac{x}{2\pi}, \operatorname{arcctg}\frac{x}{2\pi}$.

385. $e^{-\frac{ax^2}{2}},\ e^{-\frac{ax^2}{2}}\int\limits_0^x e^{\frac{at^2}{2}}\,dt$.

386. $x,\ x\int\limits_{x_0}^{1}\frac{e^t}{t^2}\,dt\ (x_0>0)$.

387. Показать, что система функций

$$y_1(x),\ y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_{n-1}(x),$$

определенных на интервале (a, b), линейно зависима на (a, b).

388. Показать, что если система функций

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$$

линейно независима на интервале (a, b), то и любая подсистема этой системы функций также линейно независима на (a, b).

В следующих задачах найти определитель Вронского для указанных систем функций:

389. $1, x$.

390. $x, \frac{1}{x}$.

391. $1, 2, x^2$.

392. e^{-x}, xe^{-x}.

393. $e^x, 2e^x, e^{-x}$.

394. $2, \cos x, \cos 2x$.

395. $\sin x, \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

396. $\arccos\frac{x}{\pi}, \arcsin\frac{x}{\pi}$

397. $\pi, \arcsin x, \arccos x$.

398. $4, \sin^2 x, \cos 2x$.

399. $x, \ln x$.

400. $\frac{1}{x}, e^{\frac{1}{x}}$.

401. $e^x \sin x$, $e^x \cos x$.

402. $e^{-3x} \sin 2x$, $e^{-3x} \cos 2x$.

403. $\cos x$, $\sin x$.

404. $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

В следующих задачах показать, что данные функции линейно независимы, а их определитель Вронского тождественно равен нулю и построить графики этих функций:

405. $y_1(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 0; \\ 0, & \text{если } 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$

$y_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 0; \\ x^2, & \text{если } 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$

406. $y_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 2; \\ (x-2)^2, & \text{если } 2 < x \leqslant 4. \end{cases}$

$y_2(x) = \begin{cases} (x-2)^2, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 2; \\ 0, & \text{если } 2 < x \leqslant 4. \end{cases}$

407. $y_1(x) = \begin{cases} x^3, & \text{если } -2 \leqslant x \leqslant 0; \\ 0, & \text{если } 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$

$y_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -2 \leqslant x \leqslant 0; \\ x^2, & \text{если } 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$

408. $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x|x|$; $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

409. Пользуясь определителем Грама, показать, что системы функций задач **373**, **377**, **379** линейно зависимы на $[-\pi, \pi]$.

2°. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0, \tag{9}$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n$ — вещественные постоянные.

Для нахождения общего решения уравнения (9) поступаем так. Составляем характеристическое уравнение для уравнения (9)

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0; \tag{10}$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ корни уравнения (10), причем среди них могут быть и кратные.

Возможны следующие случаи:

а) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — вещественные и различные.

Тогда фундаментальная система решений уравнения (9) имеет вид

$$e^{\lambda_1 x},\ e^{\lambda_2 x},\ \ldots, e^{\lambda_n}$$

и общим решением однородного уравнения будет

$$y_{o.o} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x};$$

б) корни характеристического уравнения вещественные, но среди них есть кратные. Пусть, например, $\lambda_1=\lambda_2= \ldots =\lambda_k=\tilde{\lambda}$, т. е. $\tilde{\lambda}$ является k-кратным корнем уравнения (10), а все остальные $n-k$ корней различные. Фундаментальная система решений в этом случае имеет вид

$$e^{\tilde{\lambda} x},\ xe^{\tilde{\lambda} x},\ x^2 e^{\tilde{\lambda} x},\ \ldots,\ x^{k-1} e^{\tilde{\lambda} x},\ e^{\lambda_{k+1} x},\ \ldots,\ e^{\lambda_n x},$$

а общее решение

$$y_{o.o} = C_1 e^{\tilde{\lambda} x} + C_2 x e^{\tilde{\lambda} x} + C_3 x^2 e^{\tilde{\lambda} x} + \cdots + C_k x^{k-1} e^{\tilde{\lambda} x} +$$

$$+ C_{k+1} e^{\lambda_{k+1} x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x};$$

в) среди корней характеристического уравнения есть комплексные. Пусть, для определенности $\lambda_1=\alpha+i\beta$, $\lambda_2=\alpha-i\beta$, $\lambda_3=\gamma+i\delta$, $\lambda_4=\gamma-i\delta$, а остальные корни вещественные (так как по предположению коэффициенты a_i, $i=0, 1, 2, \ldots, n$, уравнения (9) вещественные, то комплексные корни уравнения (10) попарно сопряженные).

Фундаментальная система решений в этом случае будет иметь вид

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad e^{\alpha x}\sin\beta x,\ e^{\gamma x}\cos\delta x,\ e^{\gamma x}\sin\delta x,\ e^{\lambda_5 x},\ e^{\lambda x},\ \ldots\ e^{\lambda_n x},$$

а общее решение

$$y_{o.o} = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x + C_3 e^{\gamma x}\cos\delta x +$$

$$+ C_4 e^{\gamma x}\sin\delta x + C_5 e^{\lambda_5 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}$$

г) в случае, если $\lambda_1=\alpha+i\beta$ является k-кратным корнем уравнения (10) $\left(k \leqslant \dfrac{n}{2}\right)$, то $\lambda_2=\alpha-i\beta$ также будет k-кратным корнем. и фундаментальная система решений будет иметь вид

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots;$$

$$\ldots,\ x^{k-1} e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad x^{k-1} e^{\alpha x}\sin\beta x,\ e^{\lambda_{2k+1} x},\ \ldots,\ e^{\lambda_n x},$$

а следовательно, общее решение

$$y_{o.o} = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x + C_3 x e^{\alpha x}\cos\beta x +$$

$$+ C_4 x e^{\alpha x}\sin\beta x + \cdots + C_{2k-1} x^{k-1} e^{\alpha x}\cos\beta x +$$

$$+ C_{2k} x^{k-1} e^{\alpha x}\sin\beta x + C_{2k+1} e^{\lambda_{2k+1} x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0.$$

Решение Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = 0.$$

Находим его корни: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=3$. Так как они действительные и различные, то общее решение имеет вид

$$y_{o.o}=C_1+C_2e^{-x}+C_3e^{3x}.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$y'''+2y''+y'=0.$$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^3+2\lambda^2+\lambda=0.$$

Отсюда $\lambda_1=\lambda_2=-1$, $\lambda_3=0$. Корни действительные, причем один из них, а именно $\lambda=-1$, двукратный, поэтому общее решение имеет вид

$$y_{o.o}=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+C_3.$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y'''+4y''+13y'=0$.
Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^3+4\lambda^2+13\lambda=0$$

имеет корни $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-2-3i$, $\lambda_3=-2+3i$.
Общее решение

$$y_{o.o}=C_1+C_2e^{-2x}\cos 3x+C_3e^{-2x}\sin 3x.$$

Пример 4. Найти общее решение уравнения

$$y^{V}-2y^{IV}+2y'''-4y''+y'-2y=0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^5-2\lambda^4+2\lambda^3-4\lambda^2+\lambda-2=0,$$

или

$$(\lambda-2)(\lambda^2+1)^2=0$$

имеет корни $\lambda=2$ — однократный и $\lambda=\pm i$ — пара двукратных мнимых корней Общее решение есть

$$y_{o.o}=C_1e^{2x}+(C_2+C_3x)\cos x+(C_4+C_5x)\sin x.$$

Пример 5. Решить уравнение

$$y^{IV}+4y'''+8y''+8y'+4y=0.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^4+4\lambda^3+8\lambda^2+8\lambda+4=0 \text{ или } (\lambda^2+2\lambda+2)^2=0.$$

Оно имеет двукратные комплексные корни $\lambda_1=\lambda_2=-1-i$, $\lambda_3=\lambda_4=-1+i$ и, следовательно, общее решение будет иметь вид

$$y_{o.o}=C_1e^{-x}\cos x+C_2e^{-x}\sin x+C_3xe^{-x}\cos x+C_4xe^{-x}\sin x,$$

или

$$y_{o.o}=e^{-x}(C_1+C_3x)\cos x+e^{-x}(C_2+C_4x)\sin x.$$

Составить линейные однородные дифференциальные уравнения, зная их характеристические уравнения:

410. $9\lambda^2-6\lambda+1=0$.

411. $\lambda^2+3\lambda+2=0$.

412. $2\lambda^2-3\lambda-5=0$.

413. $\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)=0$.

414. $(\lambda^2+1)^2=0$.

415. $\lambda^3=0$.

Составить линейные однородные дифференциальные уравнения, если известны корни характеристических уравнений, и написать их общие решения:

416. $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2.$

417. $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1.$

418. $\lambda_1 = 3 - 2i,\ \lambda_2 = 3 + 2i.$

419. $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 1.$

Составить линейные однородные дифференциальные уравнения, если заданы их фундаментальные системы решений:

420. $e^{-x},\ e^{x}$

421. $1,\ e^{x}.$

422. $e^{-2x},\ xe^{-2x}.$

423. $\sin 3x,\ \cos 3x.$

424. $1,\ x.$

425. $e^{x},\ e^{2x},\ e^{3x}.$

426. $e^{x},\ xe^{x},\ x^2 e^{x}.$

427. $e^{x},\ xe^{x},\ e^{2x}.$

428. $1,\ x,\ e^{x}.$

429. $1,\ \sin x,\ \cos x.$

430. $e^{2x},\ \sin x,\ \cos x.$

431. $1,\ e^{-x}\sin x,\ e^{-x}\cos x.$

Проинтегрировать следующие уравнения и, где указано, решить задачу Коши.

432. $y'' - y = 0.$

433. $3y'' - 2y' - 8y = 0.$

434. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0,$
$y(0) = 1,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 3.$

435. $y'' + 2y' + y = 0.$

436. $y'' - 4y' + 3y = 0,$
$y(0) = 6,\ y'(0) = 10.$

437. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0.$

438. $y'' - 2y' - 2y = 0.$

439. $y^{VI} + 2y^{V} + y^{IV} = 0.$

440. $4y'' - 8y' + 5y = 0.$

441. $y''' - 8y = 0.$

442. $y^{IV} + 4y''' + 10y'' + 12y' + 5y = 0.$

443. $y'' - 2y' + 2y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

444. $y'' - 2y' + 3y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3.$

445. $y^{IV} + 2y''' + 4y'' - 2y' - 5y = 0.$

446. $y^{V} + 4y^{IV} + 5y''' - 6y' - 4y = 0.$

447. $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0.$

448. $y''' - 2y'' + 2y' = 0.$

449. $y^{\mathrm{IV}} - y = 0.$

450. $y^{\mathrm{x}} = 0.$

451. $y''' - 3y' - 2y = 0.$

452. $2y''' - 3y'' + y' = 0.$

453. $y''' + y'' = 0;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1.$

3°. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. А. Метод подбора. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x) \tag{11}$$

с постоянными вещественными коэффициентами $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Теорема. *Общее решение неоднородного уравнения* **(11)** *равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения неоднородного уравнения.*

Отыскание общего решения соответствующего однородного уравнения осуществляется по правилам, изложенным выше в п. 2°. Таким образом, задача интегрирования уравнения (11) сводится к отысканию частного решения $y_{\text{ч н}}$ неоднородного уравнения. В общем случае интегрирование уравнения (11) может быть осуществлено методом вариации произвольных постоянных (см. ниже, п. 5°). Для правых частей специального вида частное решение находится проще так называемым *методом подбора.* Общий вид правой части $f(x)$ уравнения (11), при котором возможно применить метод подбора, следующий:

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_e(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right],$$

где $P_e(x)$ и $Q_m(x)$ суть многочлены степени е и m соответственно. В этом случае частное решение $y_{\text{ч н}}$ уравнения (11) ищется в виде

$$y_{\text{ч.н}} = x^s e^{\alpha x}\left[\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x\right],$$

где $k = \max(m, e)$, $\widetilde{P}_k(x)$ и $\widetilde{Q}_k(x)$ — многочлены от x k-й степени общего вида с неопределенными коэффициентами, а s — кратность корня $\lambda = \alpha + i\beta$ характеристического уравнения (если $\alpha \pm i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, то $s = 0$).

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ имеет различные корни: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -i$, $\lambda_3 = i$, поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения $y_{\text{о.о}}$ будет

$$y_{\text{о.о}} = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

Так как число ноль не является корнем характеристического уравнения, то частное решение данного уравнения $y_{\text{ч.н}}$ надо искать в виде (см. табл. 1, случай I (1)):

$$y_{\text{ч.н}} = A_1 x^2 + A_2 x + A_3,$$

Таблица

Сводная таблица видов частных решений для различных видов правых частей*)

№	Правая часть диф. уравнения	Корни характеристического уравнения	Виды частного решения
I	$P_m(x)$	1. Число 0 не является корнем характеристического уравнения	$\widetilde{P}_m(x)$
		2. Число 0 — корень характеристического уравнения кратности s	$x^s \widetilde{P}_m(x)$
II	$P_m(x)\, e^{\alpha x}$	1. Число α не является корнем характеристического уравнения	$\widetilde{P}_m(x)\, e^{\alpha x}$
		2. Число α является корнем характеристического уравнения кратности s	$x^s \widetilde{P}_m(x)\, e^{\alpha x}$
III	$P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x$	1. Числа $\pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения	$\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x$
		2. Числа $\pm i\beta$ являются корнями характеристического уравнения кратности s	$x^s\left(\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x\right)$
IV	$e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]$	1. Числа $\alpha \pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения	$\left(\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x\right) e^{\alpha x}$
		2. Числа $\alpha \pm i\beta$ являются корнями характеристического уравнения кратности s	$x^s\left(\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x\right) e^{\alpha x}$

*) Первые три вида правых частей являются частными случаями IV вида.

где A_1, A_2, A_3 — неизвестные пока коэффициенты, подлежащие определению. Подставляя выражение для $y_{ч\,н}$ в данное уравнение, получаем

$$-A_1 x^2 + (2A_1 - A_2) x + (A_2 - 2A_1 - A_3) = x^2 + x,$$

откуда

$$\begin{cases} A_1 = -1, \\ 2A_1 - A_2 = 1, \\ A_2 - 2A_1 - A_3 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем $A_1 = -1$, $A_2 = -3$, $A_3 = -1$, следовательно, частное решение будет

$$y_{ч.н} = -x^2 - 3x - 1$$

и общее решение $y_{о\,н}$ данного уравнения имеет вид

$$y_{о.н} = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x - x^2 - 3x - 1;$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y''' - y'' = 12x^2 + 6x$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$, а поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения будет

$$y_{о.о} = C_1 + C_2 x + C_3 e^x;$$

Так как число 0 есть двукратный корень характеристического уравнения, то частное решение надо искать в виде (см. табл. 1, случай I (2))

$$y_{ч.н} = x^2 (A_1 x^2 + A_2 x + A_3) = A_1 x^4 + A_2 x^3 + A_3 x^2.$$

Подставляя выражение для $y_{ч\,н}$ в данное уравнение, будем иметь

$$-12 A_1 x^2 + (24 A_1 - 6A_2) x + (6A_2 - 2A_3) = 12x^2 + 6x,$$

откуда

$$\begin{cases} -12 A_1 = 12, \\ 24 A_1 - 6A_2 = 6, \\ 6A_2 - 2A_3 = 0; \end{cases}$$

Эта система имеет решение: $A_1 = -1$, $A_2 = -5$, $A_3 = -15$, а значит

$$y_{ч.н} = -x^4 - 5x^3 - 15x^2;$$

Общее решение данного уравнения

$$y_{о.н} = C_1 + C_2 x + C_3 e^x - x^4 - 5x^3 - 15x^2;$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y'' + y' = 4x^2 e^x$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + \lambda = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$. Значит, общее решение $y_{о.о}$ соответствующего однородного уравнения будет

$$y_{о.о} = C_1 + C_2 e^{-x},$$

Так как $\alpha=1$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение $y_{ч.н}$ неоднородного уравнения ищем в виде (см. табл. 1, случай II (1))

$$y_{ч.н} = (A_1 x^2 + A_2 x + A_3) e^x.$$

Подставляя его в исходное уравнение и сокращая обе части уравнения на e^x, будем иметь

$$2A_1 x^2 + (6A_1 + 2A_2) x + 2A_1 + 3A_2 + 2A_3 = 4x^2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства, получаем линейную систему уравнений для нахождения коэффициентов A_1, A_2, A_3:

$$\begin{cases} 2A_1 = 4, \\ 6A_1 + 2A_2 = 0, \\ 2A_1 + 3A_2 + 2A_3 = 0, \end{cases}$$

решая которую, находим $A_1=2$, $A_2=-6$, $A_3=7$, так что

$$y_{ч.н} = (2x^2 - 6x + 7) e^x.$$

Общее решение данного уравнения

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + (2x^2 - 6x + 7) e^x.$$

Пример 4. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 10y' + 25y = 4e^{-5x}.$$

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2+10\lambda+25=0$ имеет двукратный корень $\lambda_1=\lambda_2=-5$, поэтому

$$y_{о.о} = (C_1 + C_2 x) e^{-5x}.$$

Так как $\alpha=-5$ является корнем характеристического уравнения кратности $s=2$, то частное решение $y_{ч.н}$ неоднородного уравнения ищем в виде (см. табл. 1, случай II (2))

$$y_{ч.н} = Bx^2 e^{-5x}; \text{ тогда}$$

$$y'_{ч.н} = B(2x - 5x^2) e^{-5x},$$

$$y''_{ч.н} = B(2 - 20x + 25x^2) e^{-5x}.$$

Подставляя выражения для $y_{ч.н}$, $y'_{ч.н}$, $y''_{ч.н}$ в исходное уравнение, получаем $2Be^{-5x}=4e^{-5x}$, откуда $B=2$ и, значит, $y_{ч.н}=2x^2e^{-5x}$. Общее решение данного уравнения

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{-5x} + 2x^2 e^{-5x}.$$

Пример 5. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 3y' + 2y = x \sin x.$$

Первый способ. Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2+3\lambda+2=0$ имеет корни $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-2$, поэтому

$$y_{о.о} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x},$$

Так как число i не является корнем характеристического уравнения, то частное решение $y_{ч.н}$ неоднородного уравнения ищем в виде (см. табл. 1, случай III (1)):

$$y_{ч.н} = (A_1 x + A_2)\cos x + (B_1 x + B_2)\sin x;$$

тогда

$$y'_{ч\,н} = (A_1 + B_2 + B_1 x)\cos x + (B_1 - A_2 - A_1 x)\sin x,$$

$$y''_{ч\,н} = (2B_1 - A_2 - A_1 x)\cos x - (2A_1 + B_2 + B_1 x)\sin x.$$

Подставляя эти выражения в исходное уравнение, будем иметь

$$(2B_1 - A_2 - A_1 x)\cos x - (2A_1 + B_2 + B_1 x)\sin x + \\ + 3(A_1 + B_2 + B_1 x)\cos x + 3(B_1 - A_2 - A_1 x)\sin x + \\ + 2(A_1 x + A_2)\cos x + 2(B_1 x + B_2)\sin x = x\sin x,$$

или

$$[(A_1 + 3B_1)x + 3A_1 + A_2 + 2B_1 + 3B_2]\cos x + \\ + [(-3A_1 + B_1)x - 2A_1 - 3A_2 + 3B_1 + B_2]\sin x = x\sin x.$$

Отсюда получаем систему линейных уравнений относительно A_1, A_2, B_1, B_2

$$\begin{cases} A_1 + 3B_1 = 0, \\ 3A_1 + A_2 + 2B_1 + 3B_2 = 0, \\ -3A_1 + B_1 = 1, \\ -2A_1 - 3A_2 + 3B_1 + B_2 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем $A_1 = -3/10$, $A_2 = 17/50$, $B_1 = 1/10$, $B_2 = 3/25$ и частное решение $y_{ч\,н}$ запишется так:

$$y_{ч.н} = \left(-\frac{3}{10}x + \frac{17}{50}\right)\cos x + \left(\frac{1}{10}x + \frac{3}{25}\right)\sin x.$$

Общее решение данного уравнения

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \left(-\frac{3}{10}x + \frac{17}{50}\right)\cos x + \\ + \left(\frac{1}{10}x + \frac{3}{25}\right)\sin x. \ \blacklozenge$$

В случае, когда правая часть $f(x)$ содержит тригонометрические функции $\sin\beta x$ и $\cos\beta x$ оказывается удобным применять переход к показательным функциям. Сущность этого приема покажем на примере. Решить дифференциальное уравнение

$$y' + y = x\cos x.$$

Здесь $\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = i$ и общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{о.о} = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Частное решение неоднородного уравнения $y_{ч\,н}$ надо искать в виде

$$y_{ч.н} = x[(A_1 x + A_2)\cos x + (B_1 x + B_2)\sin x].$$

Поступим так. Рассмотрим уравнение

$$z'' + z = xe^{ix}. \tag{12}$$

Легко видеть, что правая часть исходного уравнения есть вещественная часть от правой части уравнения (12):

$$x \cos x = \operatorname{Re}(xe^{ix}).$$

Теорема. *Если дифференциальное уравнение с вещественными коэффициентами* $L[y] = f_1(x) + if_2(x)$ *имеет решение* $y = u(x) + iv(x)$, *то* $u(x)$ есть решение уравнения $L[y] = f_1(x)$, а $v(x)$ — *решение уравнения* $L[y] = f_2(x)$.

Найдем $z_{\text{ч.н}}$ уравнения (12):

$$z_{\text{ч.н}} = (Ax + B)\, xe^{ix} = (Ax^2 + Bx)\, e^{ix},$$

$$z''_{\text{ч.н}} = 2Ae^{ix} + 2\,(2Ax + B)\, ie^{ix} - \left(Ax^2 + Bx\right) e^{ix}.$$

Подставляя в уравнение (12) и сокращая обе части на e^{ix}, будем иметь

$$2A + 4Axi + 2Bi = x,$$

откуда $4Ai = 1$, $A = -i/4$, $A + Bi = 0$, $B = -A/i = 1/4$; так что

$$z_{\text{ч.н}} = \left(-\frac{i}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\right)e^{ix} = \left(-\frac{i}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\right)(\cos x + i \sin x) =$$

$$= \frac{x \cos x + x^2 \sin x}{4} + i\,\frac{x \sin x - x^2 \cos x}{4}.$$

Отсюда в силу теоремы

$$y_{\text{ч.н}} = \operatorname{Re} z_{\text{ч.н}} = \frac{x \cos x + x^2 \sin x}{4}.$$

Этот прием порой значительно упрощает и сокращает вычисления, связанные с нахождением частных решений.

Второй способ решения примера 5. Решим этот пример путем перехода к показательным функциям. Рассмотрим уравнение

$$z'' + 3z' + 2z = xe^{ix}. \tag{13}$$

Легко видеть, что правая часть исходного уравнения равна мнимой части от xe^{ix}:

$$x \sin x = \operatorname{Im}(xe^{ix}).$$

Ищем $z_{\text{ч.н}}$ уравнения (13) в виде

$$z_{\text{ч.н}} = (Ax + B)\, e^{ix},$$

тогда

$$z'_{\text{ч.н}} = A\, e^{ix} + i\,(Ax + B)\, e^{ix}, \quad z''_{\text{ч.н}} = 2iAe^{ix} - (Ax + B)\, e^{ix}.$$

Подставляя эти выражения в (13) и сокращая на e^{ix}, получаем

$$2Ai - Ax - B + 3A + 3Aix + 3Bi + 2Ax + 2B = x,$$

откуда

$$\begin{cases} A + 3Ai = 1, \\ 2Ai + B + 3A + 3Bi = 0; \end{cases}$$

так что

$$A=\frac{1}{1+3i}=\frac{1}{10}-\frac{3i}{10}, \quad B=-\frac{A(3+2i)}{1+3i}=\frac{6}{50}+\frac{17}{50}i.$$

Итак,

$$z_{\text{ч.н}}=\left(\frac{1-3i}{10}x+\frac{6+17i}{50}\right)e^{ix}=\left(\frac{5x+6}{50}+\frac{17-15x}{50}i\right)\times$$

$$\times(\cos x+i\sin x)=\frac{(5x+6)\cos x+(15x-17)\sin x}{50}+$$

$$+i\frac{(5x+6)\sin x+(17-15x)\cos x}{50};$$

отсюда

$$y_{\text{ч.н}}=\operatorname{Im} z_{\text{ч.н}}=\frac{5x+6}{50}\sin x+\frac{17-15x}{50}\cos x,$$

что совпадает с $y_{\text{ч.н}}$, найденным ранее.

Пример 6. Найти общее решение уравнения $y''+4y=\sin 2x$.

Решение. Рассмотрим уравнение $z''+4z=e^{i2x}$.

Имеем

$$\sin 2x=\operatorname{Im} e^{2ix}, \text{ поэтому } y_{\text{ч.н}}=Im z_{\text{ч.н}}.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2+4=0$ имеет простые корни $\lambda_{1,2}=\pm 2i$. Следовательно, частное решение ищем в виде (см. табл. 1, случай III (2)):

$$z_{\text{ч.н}}=Ax\,e^{2ix},$$

тогда

$$z''_{\text{ч.н}}=-4Ax\,e^{2ix}+4Ai\,e^{2ix}.$$

Подставляя выражения для $z_{\text{ч.н}}$ и $z''_{\text{ч.н}}$ в уравнение и сокращая на e^{2ix}, получаем $4Ai=1$, откуда $A=-i/4$, а значит

$$z_{\text{ч.н}}=-\frac{1}{4}ix\,e^{2ix}=\frac{1}{4}x\sin 2x-i\frac{1}{4}x\cos 2x.$$

Частное решение данного неоднородного уравнения будет

$$y_{\text{ч.н}}=\operatorname{Im} z_{\text{ч.н}}=-\frac{1}{4}x\cos 2x.$$

Пример 7. Найти общее решение уравнения $y''-6y'+9y=25e^x\sin x$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2-6\lambda+9=0$ имеет корни $\lambda_1=\lambda_2=3$; общее решение $y_{\text{о.о}}$ однородного уравнения будет

$$y_{\text{о.о}}=(C_1+C_2x)e^{3x}.$$

Числа $1\pm i$ не являются корнями характеристического уравнения, поэтому частное решение $y_{\text{ч.н}}$ ищется в виде (см. табл. 1, случай IV (1))

$$y_{\text{ч.н}}=e^x(a\cos x+b\sin x).$$

Подставляя выражение $y_{\text{ч н}}$ в уравнение и сокращая обе части уравнения на e^x, получаем

$$(3a-4b)\cos x+(4a+3b)\sin x=25\sin x.$$

Отсюда имеем систему

$$3a-4b=0,\quad 4a+3b=25,$$

решение которой есть $a=4$, $b=3$ и, следовательно,

$$y_{\text{ч.н}}=e^x(4\cos x+3\sin x).$$

Общее решение данного уравнения

$$y(x)=(C_1+C_2x)e^{3x}+e^x(4\cos x+3\sin x).$$

Пример 8. Найти общее решение уравнения

$$y''+2y'+5y=e^{-x}\cos 2x.$$

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2+2\lambda+5=0$ имеет корни $\lambda_{1,2}=-1\pm 2i$, так что

$$y_{\text{о.о}}=(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)e^{-x}.$$

Так как число $\alpha+i\beta=-1+2i$ является простым корнем характеристического уравнения, то $y_{\text{ч н}}$ надо искать в виде (см. табл. 1, случай IV (2))

$$y_{\text{ч.н}}=x\ (A\cos 2x+B\sin 2x)\ e^{-x},$$

тогда

$$y'_{\text{ч н}}=e^{-x}[(A-Ax+2Bx)\cos 2x+(B-Bx-2Ax)\sin 2x],$$

$$y''_{\text{ч н}}=e^{-x}[(-2A-3Ax+4B-4Bx)\cos 2x+$$

$$+(-2B-3Bx-4A+4Ax)\sin 2x].$$

Подставляя выражения для $y_{\text{ч н}}$ и ее производных в исходное уравнение и сокращая на e^{-x}, будем иметь

$$-4A\sin 2x+4B\cos 2x=\cos 2x,$$

откуда $A=0$, $B=1/4$ и, значит,

$$y_{\text{ч.н}}=1/4x\,e^{-x}\sin 2x.$$

Общее решение данного уравнения будет

$$y(x)=(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)\ e^{-x}+1/4x\,e^{-x}\sin 2x.$$

Определить вид частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения, если известны корни его характеристического уравнения и правая часть $f(x)$:

454. $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2;\ f(x)=ax^2+bx+c.$

455. $\lambda_1=0,\ \lambda_2=1;\ f(x)=ax^2+bx+c.$

456. $\lambda_1=0,\ \lambda_2=0;\ f(x)=ax^2+bx+c.$

457. $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2;\ f(x) = e^{-x}(ax + b)$.

458. $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1;\ f(x) = e^{-x}(ax + b)$.

459. $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -1;\ f(x) = e^{-x}(ax + b)$.

460. $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1;\ f(x) = \sin x + \cos x$.

461. $\lambda_1 = -i,\ \lambda_2 = i;\ f(x) = \sin x + \cos x$.

462. $\lambda_1 = -2i,\ \lambda_2 = 2i;\ f(x) = A\sin 2x + B\cos 2x$.

463. $\lambda_1 = -ki;\ \lambda_2 = ki;\ f(x) = A\sin kx + B\cos kx$.

464. $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1;\ f(x) = e^{-x}(A\sin x + B\cos x)$.

465. $\lambda_1 = -1 - i,\ \lambda_2 = -1 + i;\ f(x) =$

$$= e^{-x}(A\sin x + B\cos x).$$

466. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1;\ f(x) = ax^2 + bx + c$.

467. $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2;\ f(x) = ax^2 + bx + c$,

468. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 1;\ f(x) = ax^2 + bx + c$.

469. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0;\ f(x) = ax^2 + bx + c$.

470. $\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i,\ \lambda_3 = 1;\ f(x) = \sin x + \cos x$.

471. $$\left.\begin{array}{l} \text{а) } \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1, \\ \text{б) } \lambda_1 = k,\ \lambda_2 = 1, \\ \text{в) } \lambda_1 = \lambda_2 = k, \\ \text{г) } \lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 1, \\ \text{д) } \lambda_1 = \lambda_2 = k,\ \lambda_3 = 1, \\ \text{е) } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = k \end{array}\right\}\ \begin{array}{l} f(x) = (ax^2 + bx + c)\,e^{kx}, \\ k \neq 0,\ k \neq 1. \end{array}$$

472. $$\left.\begin{array}{l} \text{а) } \lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2, \\ \text{б) } \lambda_1 = -i,\ \lambda_2 = i,\ \lambda_3 = 0 \end{array}\right\}\ \begin{array}{l} f(x) = a\sin x + \\ + b\cos x. \end{array}$$

473. $$\left.\begin{array}{l} \text{а) } \lambda_1 = 3 - 2i,\ \lambda_2 = 3 + 2i, \\ \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 0, \\ \text{б) } \lambda_1 = \lambda_2 = 3 - 2i, \\ \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 3 + 2i \end{array}\right\}\ \begin{array}{l} f(x) = e^{3x}(\sin 2x + \\ + \cos 2x). \end{array}$$

Для следующих линейных неоднородных дифференциальных уравнений определить вид частного решения:

474. $y'' + 3y' = 3$.

475. $y'' - 7y' = (x - 1)^2$.

476. $y'' + 3y' = e^{x}$.

477. $y'' + 7y' = e^{-7x}$.

478. $y'' - 8y' + 16y = (1 - x)\, e^{4x}$.

479. $y'' - 10y' + 25y = e^{5x}$.

480. $4y'' - 3y' = x\, e^{\frac{3}{4}x}$.

481. $y'' - 4y' = x\, e^{4x}$.

482. $y'' + 25y = \cos 5x$.

483. $y'' + y = \sin x - \cos x$.

484. $y'' + 16y = \sin(4x + \alpha)$.

485. $y'' + 4y' + 8y = e^{2x}(\sin 2x + \cos 2x)$.

486. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(\sin 2x - \cos 2x)$.

487. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 2x$.

488. $y'' + k^2 y = k \sin(kx + \alpha)$.

489. $y'' + k^2 y = k$.

490. $y''' + y = x$.

491. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 1$.

492. $y''' + y' = 2$.

493. $y''' + y'' = 3$.

494. $y^{IV} - y = 1$.

495. $y^{IV} - y' = 2$.

496. $y^{IV} - y'' = 3$.

497. $y^{IV} - y''' = 4$.

498. $y^{IV} + 4y''' + 4y'' = 1$.

499. $y^{IV} + 2y''' + y'' = e^{4x}$.

500. $y^{IV} + 2y''' + y'' = e^{-x}$.

501. $y^{IV} + 2y''' + y'' = xe^{-x}$.

502. $y^{IV} + 4y'' + 4y = \sin 2x$.

503. $y^{IV} + 4y'' + 4y = \cos x$.

504. $y^{IV} + 4y'' + 4y = x \sin 2x$.

505. $y^{IV} + 2n^2 y'' + n^4 y = a \sin(nx + \alpha)$.

506. $y^{IV} - 2n^2 y'' + n^4 y = \cos(nx + \alpha)$.

507. $y^{\mathrm{IV}} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = \sin x.$

508. $y^{\mathrm{IV}} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = e^x.$

509. $y^{\mathrm{IV}} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = xe^x.$

Решить следующие линейные неоднородные уравнения:

510. $y'' + 2y' + y = -2.$

511. $y'' + 2y' + 2 = 0.$

512. $y'' + 9y - 9 = 0.$

513. $y''' + y'' = 1.$

514. $5y''' - 7y'' - 3 = 0.$

515. $y^{\mathrm{IV}} - 6y''' + 6 = 0.$

516. $3y^{\mathrm{IV}} + y''' = 2.$

517. $y^{\mathrm{IV}} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 1.$

518. $y'' - 4y' + 4y = x^2.$

519. $y'' + 8y' = 8x.$

520. $y' - 2ky' + k^2y = e^x, \ (k \neq 1).$

521. $y'' + 4y' + 4y = 8e^{-2x}.$

522. $y'' + 4y' + 3y = 9e^{-3x}.$

523. $7y'' - y' = 14x.$

524. $y'' + 3y' = 3xe^{-3x}.$

525. $y'' + 5y' + 6y = 10(1 - x)e^{-2x}.$

526. $y'' + 2y' + 2y = 1 + x.$

527. $y'' + y' + y = (x + x^2)e^x.$

528. $y'' + 4y' - 2y = 8\sin 2x.$

529. $y'' + y = 4x\cos x.$

530. $y'' - 2my' + m^2y = \sin nx.$

531. $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\sin 2x.$

532. $y'' + a^2y = 2\cos mx + 3\sin mx \ (m \neq a).$

533. $y'' - y' = e^x \sin x.$

534. $y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x).$

535. $y'' + 4y' + 5y = 10e^{-2x}\cos x.$

536. $4y'' + 8y' = x\sin x.$

537. $y'' - 3y' + 2y = xe^x$.

538. $y'' + y' - 2y = x^2e^{4x}$.

539. $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)\,e^{3x}$.

540. $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$.

541. $y^{IV} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = e^x$.

542. $y'' - 2y' + y = x^3$.

543. $y^{IV} + y'' = x^2 + x$.

544. $y'' + y = x^2 \sin x$.

545. $y'' + 2y' + y = x^2e^{-x} \cos x$.

546. $y''' - y = \sin x$.

547. $y^{IV} - 2y'' + y = \cos x$.

548. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x \cos 2x$.

549. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} (\sin x + 2 \cos x)$.

Б Принцип суперпозиции При нахождении частных решений линейных неоднородных уравнений удобно пользоваться следующей теоремой

Теорема (принцип суперпозиции или наложения). *Если* $y_k(x)$ *есть решение уравнения*

$$a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\,y = f_k(x),$$

$$k = 1,\ 2, \ldots,\ m,$$

то функция $y(x) = \sum_{k=1}^{m} y_k(x)$ *является решением уравнения*

$$a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\,y = \sum_{k=1}^{m} f_k(x).$$

Пример 9. Решить уравнение

$$y'' - 6y' + 9y = 4e^x - 16e^{3x}. \tag{14}$$

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, а поэтому общим решением $y_{о\,о}$ соответствующего однородного уравнения будет

$$y_{о.о} = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}.$$

Для нахождения частного решения $y_{ч\,н}$ уравнения (14) найдем частные решения двух уравнений

$$y'' - 6y' + 9y = 4e^x, \tag{15}$$

$$y'' - 6y' + 9y = -16e^{3x}. \tag{16}$$

Уравнение (15) имеет частное решение y_1 вида $y_1 = Ae^x$ (см. табл 1, случай II(1)). Подставляя выражение для y_1 в уравнение (15), найдем $A = 1$, так что $y_1 = e^x$ Частное решение уравнения (16) ищем в виде $y_2=Bx^2e^{3x}$ (см. табл. 1, случай II (2)). Находим $y_2=-8x^2e^{3x}$.

В силу принципа суперпозиции решений частное решение $y_{ч.н}$ данного уравнения будет равно сумме частных решений y_1 и y_2 уравнений (15) и (16)

$$y_{ч.н}=y_1+y_2=e^x-8x^2e^{3x}.$$

Общее решение уравнения (14)

$$y=(C_1+C_2x)e^{3x}+e^x-8x^2e^{3x}.$$

Пример 10. Решить уравнение

$$y'''-2y''+2y'=4\cos x\cos 3x+6\sin^2 x. \tag{17}$$

Решение. Используя известные тригонометрические тождества, преобразуем правую часть уравнения (17) к «стандартному» виду

$$4\cos x\cos 3x+6\sin^2 x=2\cos 4x-\cos 2x+3.$$

Исходное уравнение (17) запишется теперь так:

$$y'''-2y''+2y'=2\cos 4x-\cos 2x+3. \tag{18}$$

Общим решением однородного уравнения $y'''-2y''+2y'=0$ будет

$$y_{о.о}=C_1+(C_2\cos x+C_3\sin x)e^x.$$

Для отыскания частного решения уравнения (18) используем принцип суперпозиции. Для этого найдем частные решения трех уравнений:

$$y'''-2y''+2y'=2\cos 4x, \tag{19}$$

$$y'''-2y''+2y'=-\cos 2x, \tag{20}$$

$$y'''-2y''+2y'=3. \tag{21}$$

Используя метод подбора, найдем частные решения y_1, y_2 и y_3 уравнений (19), (20) и (21) соответственно:

$$y_1=\frac{1}{65}\left(\cos 4x-\frac{7}{4}\sin 4x\right),$$

$$y_2=\frac{1}{10}\left(\frac{1}{2}\sin 2x-\cos 2x\right),\quad y_3=\frac{3}{2}x.$$

В силу принципа суперпозиции частное решение неоднородного уравнения (8)

$$y_{ч.н}=\frac{1}{65}\left(\cos 4x-\frac{7}{4}\sin 4x\right)+\frac{1}{10}\left(\frac{\sin 2x}{2}-\cos 2x\right)+\frac{3}{2}x.$$

Общее решение исходного уравнения

$$y=C_1+(C_2\cos x+C_3\sin x)e^x+\frac{1}{65}\left(\cos 4x-\frac{7}{4}\sin 4x\right)+$$
$$+\frac{1}{10}\left(\frac{\sin 2x}{2}-\cos 2x\right)+\frac{3}{2}x.$$

Определить вид частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения, если известны корни его характеристического уравнения и правая часть $f(x)$.

$$
550.\quad
\left.
\begin{array}{l}
\text{а) } \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2, \\
\text{б) } \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3, \\
\text{в) } \lambda_1 = \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 1, \\
\text{г) } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1,
\end{array}
\right\}
f(x) = ae^{-x} + be^{x}.
$$

Пользуясь принципом суперпозиции, определить вид частного решения следующих линейных неоднородных дифференциальных уравнений:

551. $y'' - y' - 2y = e^x + e^{-2x}$.

552. $y'' + 4y' = x + e^{-4x}$.

553. $y'' - y = x + \sin x$.

554. $y'' - 2y' + 2y = (1 + \sin x)\, e^x$.

555. $y''' - y'' = 1 + e^x$.

556. $y''' + 4y' = e^{2x} + \sin 2x$.

557. $y'' + 4y = \sin x \sin 2x$.

558. $y'' - 4y' = 2\cos^2 4x$.

Решить следующие линейные неоднородные уравнения, используя принцип суперпозиции для нахождения их частных решений:

559. $y'' - y' - 2y = 4x - 2e^x$.

560. $y'' - 3y' = 18x - 10\cos x$.

561. $y'' - 2y' + y = 2 + e^x \sin x$.

562. $y'' + 2y' + 2y = (5x + 4)\, e^x + e^{-x}$,

563. $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x} + 17\sin 2x$.

564. $2y'' - 3y' - 2y = 5e^x \operatorname{ch} x$.

565. $y'' + 4y = x \sin^2 x$.

566. $y^{IV} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = xe^x + \frac{1}{2}\cos x$.

567. $y'' + y' = \cos^2 x + e^x + x^2$.

568. $y^{V} + 4y''' = e^x + 3\sin 2x + 1$.

569. $y'' - 2y' + 5y = 10\sin x + 17\sin 2x$.

570. $y'' + y' = x^2 - e^{-x} + e^x$.

571. $y'' - 2y' - 3y = 2x + e^{-x} - 2e^{3x}$.

572. $y'' + 4y = e^x + 4\sin 2x + 2\cos^2 x - 1$.

573. $y'' + 3y' + 2y = 6xe^{-x}(1 - e^{-x})$.

574. $y'' + y = \cos^2 2x + \sin^2 \frac{x}{2}$.

575. $y'' - 4y' + 5y = 1 + 8\cos x + e^{2x}$.

576. $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin^2 \frac{x}{2}$.

577. $y'' - 3y' = 1 + e^x + \cos x + \sin x$.

578. $y'' - 2y' + 5y = e^x(1 - 2\sin^2 x) + 10x + 1$.

579. $y'' - 4y' + 4y = 4x + \sin x + \sin 2x$.

580. $y'' + 2y' + y = 1 + 2\cos x + \cos 2x - \sin 2x$.

581. $y'' + y' + y + 1 = \sin x + x + x^2$.

582. $y'' + 6y' + 9y = 18e^{-3x} + 8\sin x + 6\cos x$.

583. $y'' + 2y' + 1 = 3\sin 2x + \cos x$.

584. $y''' - 2y'' + y' = 2x + e^x$.

585. $y'' + y = 2\sin x \sin 2x$.

586. $y''' - y'' - 2y' = 4x + 3\sin x + \cos x$.

587. $y''' - 4y' = xe^{2x} + \sin x + x^2$.

588. $y^{\mathrm{V}} - y^{\mathrm{IV}} = xe^x - 1$.

589. $y^{\mathrm{V}} + y''' = x + 2e^{-x}$.

В. Задача Коши. Как известно, задача Коши для линейного неоднородного уравнения

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = f(x);$$

состоит в следующем: найти решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям (данным Коши)

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \ \ldots, \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Пример 11. Найти частное решение уравнения

$$y'' - y = 4e^x, \tag{22}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \tag{23}$$

Решение. Находим общее решение уравнения (22)

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + 2xe^x. \tag{24}$$

Для решения поставленной начальной задачи (22)—(23) (задачи Коши) требуется определить значения постоянных C_1 и C_2 так, чтобы решение (24) удовлетворяло начальным условиям (23). Используя условие $y(0)=0$, получаем $C_1+C_2=0$. Дифференцируя (24), найдем

$$y' = C_1e^x - C_2e^{-x} + 2e^x + 2xe^x,$$

откуда, в силу условия $y'(0)=1$, будем иметь $C_1-C_2=-1$. Для отыскания C_1, C_2 получили систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 - C_2 = -1, \end{cases}$$

решая которую находим $C_1=-1/2$, $C_2=1/2$. Подставляя найденные значения произвольных постоянных в общее решение (24), получаем решение начальной задачи (22)—(23):

$$y = -\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} + 2xe^x \quad \text{или}$$

$$y = 2xe^x - \operatorname{sh} x.$$

Пример 12. Найти частное решение уравнения

$$y'' + 4y' + 5y = 8\cos x, \tag{25}$$

ограниченное при $x\to-\infty$.

Решение. Общее решение данного уравнения

$$y = e^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + 2(\cos x + \sin x). \tag{26}$$

При $x\to-\infty$ величина $e^{-2x}\to+\infty$ и при любых C_1 и C_2, не равных одновременно нулю, первое слагаемое правой части (26) будет функцией, неограниченной при $x\to-\infty$, а второе слагаемое — функцией, ограниченной при всех значениях x. Следовательно, только при $C_1=C_2=0$ имеем ограниченное при $x\to-\infty$ решение уравнения (25), именно

$$y = 2(\cos x + \sin x). \tag{27}$$

Более того, решение (27) уравнения (25) ограниченно при всех x:

$$|y| = |2(\cos x + \sin x)| \leqslant 2(|\cos x| + |\sin x|) < 4$$

для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Пример 13. Найти частное решение уравнения

$$y'' - 3y' + 2y = 4 + 2e^{-x}\cos x, \tag{28}$$

удовлетворяющее условию $y\to2$ при $x\to+\infty$.

Решение. Общее решение данного уравнения

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + 2 + e^{-x}(\sin x - \cos x). \tag{29}$$

При любых значениях постоянных C_1 и C_2, не равных одновременно нулю, решение (29) является неограниченной функцией при $x\to+\infty$. При $C_1=C_2=0$ решением уравнения (28) будет функция $y=2+e^{-x}(\sin x-\cos x)$ для которой, очевидно, выполняется условие $\lim\limits_{x\to+\infty} y=2$. Таким образом,

$$y = 2 + (\sin x - \cos x)e^{-x}$$

будет искомым частным решением.

В следующих задачах найти частные решения уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

590. $y'' + y = 2(1 - x)$; $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$.

591. $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 12x + 2$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

592. $y'' + 9y = 36e^{3x}$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$.

593. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$; $y(0) = y'(0) = 0$.

594. $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}$; $y(0) = y'(0) = 0$.

595. $y'' + y' = e^{-x}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

596. $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x$; $y(0) = y'(0) = 0$.

597. $y'' + y = 2\cos x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

598. $y'' + 4y = \sin x$; $y(0) = y'(0) = 1$.

599. $y'' + y = 4x\cos x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

600. $y'' - 4y' + 5y = 2x^2e^x$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

601. $y'' - 6y' + 9y = 16e^{-x} + 9x - 6$; $y(0) = y'(0) = 1$.

602. $y'' - y' = -5e^{-x}(\sin x + \cos x)$; $y(0) = -4$, $y'(0) = 5$.

603. $y'' - 2y' + 2y = 4e^x\cos x$; $y(\pi) = \pi e^{\pi}$, $y'(\pi) = e^{\pi}$.

604. $y''' - y' = -2x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$.

605. $y^{IV} - y = 8e^x$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = 0$.

606. $y''' - y = 2x$; $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$.

607. $y^{IV} - y = 8e^x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 4$, $y'''(0) = 6$.

В следующих задачах найти частные решения уравнений, удовлетворяющие заданным условиям на бесконечности:

608. $y'' - 4y' + 5y = \sin x$, y ограничено при $x \to +\infty$.

609. $y'' + 2y' + 5y = 4\cos 2x + \sin 2x$, y ограничено при $x \to -\infty$.

610. $y'' - y = 1$, y ограничено при $x \to \infty$.

611. $y'' - y = -2\cos x$, y ограничено при $x \to \infty$.

612. $y''-2y'+y=4e^{-x}$, $y\to 0$ при $x\to+\infty$.

613. $y''+4y'+3y=8e^{x}+9$, $y\to 3$ при $x\to-\infty$.

614. $y''-y'-5y=1$, $y\to-\dfrac{1}{5}$ при $x\to\infty$.

615. $y''+4y'+4y=2e^{x}(\sin x+7\cos x)$,
$y\to 0$ при $x\to-\infty$.

616. $y''-5y'+6y=2e^{-2x}(9\sin 2x+4\cos 2x)$,
$y\to 0$ при $x\to+\infty$.

617. $y''-4y'+4y=(9x^2+5x-12)e^{-x}$,
$y\to 0$ при $x\to+\infty$.

4°. Уравнения Эйлера. Линейные уравнения вида

$$a_0x^n y^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}xy'+a_n y=0, \tag{30}$$

где все a_i постоянные, называются *уравнениями Эйлера*. Эти уравнения заменой независимого переменного $x=e^t$ преобразуются в линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами:

$$b_0 y_t^{(n)}+b_1 y_t^{(n-1)}+\ldots+b_{n-1}y_t'+b_n y(t)=0. \tag{31}$$

Замечание 1. Уравнения вида

$$a_0(ax+b)^n y^{(n)}+a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)}+\\ +\ldots+a_{n-1}(ax+b)y'+a_n y=0$$

также называются уравнениями Эйлера и сводятся к линейным однородным уравнениям с постоянными коэффициентами заменой переменных $ax+b=e^t$.

Замечание 2. Частные решения уравнения (30) можно сразу искать в виде $y=x^k$, при этом для k мы получаем уравнение, которое совпадает с характеристическим уравнением для уравнения (31).

Пример 1. Найти общее решение уравнения Эйлера $x^2y''+2xy'-6y=0$.

Первый способ. Делаем в уравнении подстановку $x=e^t$, тогда

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=e^{-t}\frac{dy}{dt},$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{\dfrac{dy'}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}\right)e^{-t}}{e^t}=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right),$$

и уравнение примет вид

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-6y=0;$$

Корни характеристического уравнения $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=2$, и общее решение последнего уравнения будет $y=C_1e^{-3t}+C_2e^{2t}$. Но так как $x=e^t$, то $y=C_1x^{-3}+C_2x^2$ или

$$y=\frac{C_1}{x^3}+C_2x^2;$$

Второй способ. Будем искать решение данного уравнения в виде $y=x^k$, где k — неизвестное число. Находим $y'=kx^{k-1}$, $y''=k(k-1)x^{k-2}$. Подставляя в уравнение, получаем

$$x^2k(k-1)x^{k-2}+2xkx^{k-1}-6x^k=0,$$

или

$$x^k[k(k-1)+2k-6]=0.$$

Но так как $x^k\neq0$, то $k(k-1)+2k-6=0$, или $k^2+k-6=0$. Корни этого уравнения $k_1=-3$, $k_2=2$. Им соответствует фундаментальная система решений $y_1=x^{-3}$, $y_2=x^2$, и общее решение по-прежнему будет

$$y=C_1x^{-3}+C_2x^2. \blacklozenge$$

Неоднородные уравнения Эйлера вида

$$\sum_{k=0}^{n}a_kx^ky^{(k)}=x^{\alpha}P_m(\ln x),$$

где $P_m(u)$ — многочлен степени m, можно также решать методом подбора по аналогии с решением неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и с правой частью вида $e^{\alpha x}P_m(x)$.

Пример 2. Решить уравнение Эйлера $x^2y''-xy'+2y=x\ln x$.

Решение. Характеристическое уравнение $k(k-1)-k+2=0$ или $k^2-2k+2=0$ имеет корни $k_1=1-i$, $k_2=1+i$. Поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения будет

$$y_{o.o}=x(C_1\cos\ln x+C_2\sin\ln x).$$

Частное решение ищем в виде $y_ч=x(A\ln x+B)$; имеем

$$y'_ч=A\ln x+B+A,\quad y''_ч=A/x;$$

Подставляя в данное уравнение, получаем

$$Ax-x(A\ln x+A+B)+2x(A\ln x+B)=x\ln x,$$

или

$$Ax\ln x+Bx=x\ln x,$$

откуда $A=1$, $B=0$; Итак, $y_ч=x\ln x$.
Общим решением будет

$$y=x(C_1\cos\ln x+C_2\sin\ln x)+x\ln x,$$

Проинтегрировать следующие однородные уравнения Эйлера:

618. $x^2y'' + xy' - y = 0.$

619. $x^2y'' + 3xy' + y = 0.$

620. $x^2y'' + 2xy' + 6y = 0.$

621. $xy'' + y' = 0.$

622. $(x+2)^2y'' + 3(x+2)y' - 3y = 0.$

623. $(2x+1)^2y'' - 2(2x+1)y' + 4y = 0.$

624. $x^2y''' - 3xy'' + 3y' = 0.$

625. $x^2y''' = 2y'.$

626. $(x+1)^2y''' - 12y' = 0.$

627. $(2x+1)^2y''' + 2(2x+1)y'' + y' = 0.$

Решить следующие неоднородные уравнения Эйлера:

628. $x^2y'' + xy' + y = x(6 - \ln x).$

629. $x^2y'' - 2y = \sin \ln x.$

630. $x^2y'' - xy' - 3y = -\dfrac{16 \ln x}{x}$

631. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2 - 2x + 2.$

632. $x^2y'' + xy' - y = x^m,\ |m| \neq 1.$

633. $x^2y'' + 4xy' + 2y = 2\ln^2 x + 12x.$

634. $(x+1)^3y'' + 3(x+1)^2y' + (x+1)y = 6\ln(x+1).$

635. $(x-2)^2y'' - 3(x-2)y' + 4y = x.$

5°. **Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Метод Лагранжа.** Если известно частное решение $y_1(x)$ уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\,y = 0, \tag{32}$$

то его порядок можно понизить на единицу (не нарушая линейности уравнения), полагая $y = y_1 z$, где z — новая неизвестная функция, а затем делая замену $z' = u$ [можно непосредственно делать замену $u = (y/y_1)'$].

Если известно k частных линейно независимых решений уравнения (32), то порядок уравнения может быть понижен на k единиц.

Общее решение уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\,y = f(x) \tag{33}$$

есть сумма какого-нибудь его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения (32).

Если известна фундаментальная система соответствующего однородного уравнения (32), то общее решение неоднородного уравнения (33) может быть найдено методом вариации постоянных (*метод Лагранжа*).

Общее решение уравнения (32) имеет вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные.

Будем искать решение уравнения (33) в виде

$$y = C_1(x)\, y_1 + C_2(x)\, y_2 + \ldots + C_n(x)\, y_n, \tag{34}$$

где $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ — некоторые пока неизвестные функции от x. Для их определения получаем систему

$$\begin{cases} y_1 C_1' + y_2 C_2' + \ldots + y_n C_n' = 0, \\ y_1' C_1' + y_2' C_2' + \ldots + y_n' C_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n-1)} C_1' + y_2^{(n-1)} C_2' + \ldots + y^{(n-1)} C_n' = f(x). \end{cases} \tag{35}$$

Разрешая эту систему относительно $C_i'(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, получаем

$$\frac{dC_i}{dx} = \varphi_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

откуда

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x)\, dx + \widetilde{C}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\widetilde{C}_i$ — произвольные постоянные. Внося найденные значения $C_i(x)$ в (34), получаем общее решение уравнения (33).

В частности, для уравнения второго порядка

$$y'' + p_1(x)\, y' + p_2(x)\, y = f(x)$$

система (35) имеет вид

$$\begin{cases} y_1 C_1' + y_2 C_2' = 0, \\ y_1' C_1' + y_2' C_2' = f(x). \end{cases} \tag{36}$$

Решая (36) относительно C_1' и C_2', получаем

$$C_1' = -\frac{y_2 f(x)}{W[y_1, y_2]}, \quad C_2' = \frac{y_1 f(x)}{W[y_1, y_2]},$$

откуда находим

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2 f(x)}{W[y_1, y_2]}\, dx + \widetilde{C}_1, \quad C_2(x) = \int \frac{y_1 f(x)}{W[y_1, y_2]}\, dx + \widetilde{C}_2,$$

где $\widetilde{C}_1$ и $\widetilde{C}_2$ — постоянные интегрирования.

Замечание. Для уравнения $a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x)$, где $a_0(x)\neq 1$, $a_0(x)\neq 0$, система (36) будет выглядеть так:

$$\begin{cases} y_1C_1'+y_2C_2'=0, \\ y_1'C_1'+y_2'C_2'=\dfrac{f(x)}{a_0(x)}. \end{cases}$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения $xy''+2y'+xy=0$, если $y_1=\dfrac{\sin x}{x}$ есть его частное решение.

Решение. Положим $y=\dfrac{\sin x}{x}\cdot z$, где z — новая неизвестная функция от x; тогда

$$y'=y_1'z+y_1z', \quad y''=y_1''z+2y_1'z'+y_1z''.$$

Подставляя в данное уравнение, получаем

$$\left(xy_1''+2y_1'+xy_1\right)z+xy_1z''+2\left(xy_1'+y_1\right)z'=0.$$

Но так как $y_1=\dfrac{\sin x}{x}$ есть частное решение данного уравнения, то $xy_1''+2y_1'+xy_1=0$, поэтому имеем

$$xy_1z''+2\left(xy_1'+y_1\right)z'=0. \tag{37}$$

Но $y_1'=\dfrac{\cos x}{x}-\dfrac{\sin x}{x^2}$, а значит $xy_1'+y_1=\cos x$, и уравнение (37) примет вид

$$z''\sin x+2z'\cos x=0.$$

Перепишем его в виде

$$\frac{z''}{z'}+2\frac{\cos x}{\sin x}=0.$$

Отсюда имеем $(\ln|z'|+2\ln|\sin x|)'=0$, откуда

$$\ln|z'|+2\ln|\sin x|=\ln\widetilde{C}_1 \text{ или } z'\sin^2 x=\widetilde{C}_1.$$

Интегрируя это уравнение, найдем $z=-\widetilde{C}_1\operatorname{ctg}x+C_2$, и, следовательно, общее решение данного уравнения будет

$$y=-\widetilde{C}_1\frac{\cos x}{x}+C_2\frac{\sin x}{x},$$

или

$$y=C_1\frac{\cos x}{x}+C_2\frac{\sin x}{x} \qquad \left(C_1=-\widetilde{C}_1\right).$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y''+\dfrac{2}{x}y'+y=\dfrac{1}{x}$, $(x\neq 0)$.

Решение. Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид (см. пример 1)

$$y_{о.о}=C_1\frac{\sin x}{x}+C_2\frac{\cos x}{x}$$

и, следовательно, его фундаментальная система решений будет

$$y_1=\frac{\sin x}{x}, \qquad y_2=\frac{\cos x}{x}$$

Будем искать общее решение данного уравнения методом вариации произвольных постоянных:

$$y=C_1(x)\frac{\sin x}{x}+C_2(x)\frac{\cos x}{x},$$

где $C_1(x)$, $C_2(x)$ — пока неизвестные функции от x, подлежащие определению. Для их нахождения составим следующую систему:

$$\begin{cases} C_1'(x)\dfrac{\sin x}{x}+C_2'(x)\dfrac{\cos x}{x}=0, \\ C_1'(x)\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}+C_2'(x)\dfrac{-x\sin x-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

Отсюда находим: $C_1'(x)=\cos x$, $C_2'(x)=-\sin x$. Интегрируя, получаем

$$C_1(x)=\sin x+\widetilde{C}_1, \qquad C_2(x)=\cos x+\widetilde{C}_2.$$

Подставляя эти значения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в выражение для y, найдем общее решение данного уравнения

$$y=\widetilde{C}_1\frac{\sin x}{x}+\widetilde{C}_2\frac{\cos x}{x}+\frac{1}{x}.$$

Пример 3. Решить уравнение $y''+y=1/\cos x$.

Решение. Соответствующее однородное уравнение будет $y''+y=0$. Его характеристическое уравнение $\lambda^2+1=0$ имеет мнимые корни $\lambda_1=-i$, $\lambda_2=i$, и общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{о.о}=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

Общее решение исходного уравнения ищем в виде

$$y=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x, \tag{38}$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ — неизвестные функции от x. Для их нахождения составим систему

$$\begin{cases} \cos x\cdot C_1'(x)+\sin x\cdot C_2'(x)=0, \\ -\sin x\cdot C_1'(x)+\cos x\cdot C_2'(x)=\dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Разрешаем эту систему относительно $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$:

$$C_1'(x) = -\operatorname{tg} x; \qquad C_2'(x) = 1.$$

Интегрированием находим

$$C_1(x) = \ln|\cos x| + \widetilde{C}_1, \qquad C_2(x) = x + \widetilde{C}_2.$$

Подставляя выражения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в (38), получаем общее решение данного уравнения

$$y = \widetilde{C}_1 \cos x + \widetilde{C}_2 \sin x + \cos x \cdot \ln|\cos x| + x \sin x.$$

Здесь $\cos x \ln|\cos x| + x \sin x$ есть частное решение исходного неоднородного уравнения.

Пример 4. *Зная фундаментальную систему решений $y_1 = \ln x$, $y_2 = x$ соответствующего однородного уравнения, найти частное решение уравнения*

$$x^2(1 - \ln x)\, y'' + xy' - y = \frac{(1-\ln x)^2}{x}, \tag{39}$$

удовлетворяющее условию $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 0$.

Решение. Применяя метод вариации постоянных, находим общее решение уравнения (39):

$$y = C_1 \ln x + C_2 x + \frac{1 - 2\ln x}{4x}. \tag{40}$$

При $x \to +\infty$ первые два слагаемых правой части (40) стремятся к бесконечности, причем при любых C_1, C_2, не равных нулю одновременно, функция $C_1 \ln x + C_2 x$ есть бесконечно большая функция при $x \to +\infty$. Третье слагаемое правой части (40) имеет пределом ноль при $x \to +\infty$, что легко установить с помощью правила Лопиталя Таким образом, функция $y = (1 - 2\ln x)/4x$, которая получается из (40) при $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$, будет решением уравнения (39), удовлетворяющим условию $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 0$.

Проинтегрировать следующие уравнения, если известно одно частное решение y_1 однородного уравнения.

636. $(2x + 1)\, y'' + (4x - 2)\, y' - 8y = 0; \quad y_1 = e^{mx}$.

637. $(x^2 - x)\, y'' + (2x - 3)\, y' - 2y = 0$; y_1 — рациональная дробь, в знаменателе которой стоят линейные множители — делители коэффициента при y''.

638. $(3x + 2x^2)\, y'' - 6(1 + x)\, y' + 6y = 6$; y_1 — многочлен.

639. $x^2(\ln x - 1)\, y'' - xy' + y = 0, \quad y_1 = x$.

640. $y'' + (\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x)\, y' + 2\operatorname{ctg}^2 x \cdot y = 0; \quad y_1 = \sin x$.

641. $y'' + \operatorname{tg} x \cdot y' + \cos^2 x \cdot y = 0; \quad y_1 = \cos(\sin x)$.

642. $(1 + x^2)\, y'' + xy' - y + 1 = 0; \quad y_1 = x$.

643. $x^2y'' - xy' - 3y = 5x^4$, $\quad y_1 = \frac{1}{x}$.

644. $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2 e^x$; $\quad y_1 = e^x$.

645. $y'' + y' + e^{-2x}y = e^{-3x}$; $\quad y_1 = \cos e^{-x}$.

646. $(x^4 - x^3)y'' + (2x^3 - 2x^2 - x)y' - y = \frac{(x-1)^2}{x}$;

$$y_1 = \frac{1}{x}.$$

647. $y'' - y' + ye^{2x} = xe^{2x} - 1$, $\quad y_1 = \sin e^x$.

648. $x(x-1)y'' - (2x-1)y' + 2y = x^2(2x-3)$, $y_1 = x^2$.

649. Цепь длиной 6 м соскальзывает вниз со стола без трения. Если движение начинается с момента, когда 1 м цепи свисает, то за какое время соскользнет вся цепь?

650. Найти уравнение движения точки, если ускорение в зависимости от времени выражается формулой $a=1{,}2t$ и если при $t=0$ расстояние $s=0$, а при $t=5$ расстояние $s=20$

651. Тело массы m скользит по горизонтальной плоскости под действием толчка, давшего начальную скорость v_0. На тело действует сила трения, равная $-km$. Найти расстояние, которое тело способно пройти.

652. Материальная точка массы $m=1$ движется прямолинейно, приближаясь к центру, отталкивающему ее с силой, равной k^2x (x — расстояние точки от центра). При $t=0$, $x=a$, $\frac{dx}{dt}=ka$. Найти закон движения.

Проинтегрировать методом вариации постоянных следующие уравнения:

653. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$.

654. $y'' - y' = \frac{1}{e^x + 1}$.

655. $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$.

656. $y'' + y = \frac{1}{\sqrt{\sin^5 x \cos x}}$.

657. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2+1}$.

658. $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{1}{e^x \sin x}$.

659. $y'' + y = \dfrac{2}{\sin^3 x}$.

660. $y'' - y' = e^{2x} \cos e^x$.

661. $y''' + y'' = \dfrac{x-1}{x^2}$.

662. $xy'' - (1 + 2x^2) y' = 4x^3 e^{x^2}$.

663. $y' - 2y' \cdot \operatorname{tg} x = 1$.

664. $x \ln x \cdot y'' - y' = \ln^2 x$.

665. $xy'' + (2x - 1) y' = -4x^2$.

666. $y'' + y' \operatorname{tg} x = \cos x \operatorname{ctg} x$.

Найти решения следующих дифференциальных уравнений при заданных условиях на бесконечности:

667. $4xy'' + 2y' + y = 1, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} y = 1;$

$y_1 = \sin \sqrt{x}, \quad y_2 = \cos \sqrt{x}.$

668. $4xy'' + 2y' + y = \dfrac{6+x}{x^2}, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} y = 0.$

669. $(1 + x^2) y'' + 2xy' = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} y = \dfrac{\pi^2}{8},$

$y'|_{x=0} = 0.$

670. $(1 - x) y'' + xy' - y = (x-1)^2 e^x, \quad \lim\limits_{x \to -\infty} y = 0,$

$y|_{x=0} = 1; \quad y_1 = x, \quad y_2 = e^x.$

671. $2x^2 (2 - \ln x) y'' + x (4 - \ln x) y' - y =$

$= \dfrac{(2 - \ln x)^2}{\sqrt{x}}, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} y = 0, \quad y_1 = \ln x, \quad y_2 = \sqrt{x}.$

672. $y'' + \dfrac{2}{x} y' - y = 4e^x, \quad \lim\limits_{x \to -\infty} y = 0, \quad y'|_{x=-1} =$

$= -\dfrac{1}{e}; \quad y_1 = \dfrac{e^x}{x}, \quad y_2 = \dfrac{e^{-x}}{x}.$

673. $x^3 (\ln x - 1) y'' - x^2 y' + xy = 2 \ln x,$

$$\lim_{x\to+\infty} y=0, \quad y_1=x, \quad y_2=\ln x.$$

674. $(x^2-2x)y''+(2-x^2)y'-2(1-x)y=$
$$=2(x-1), \quad \lim_{x\to+\infty} y=1, \quad y_1=x^2, \quad y_2=e^x.$$

6°. Составление дифференциального уравнения по заданной фундаментальной системе решений. Рассмотрим линейно независимую на отрезке $[a, b]$ систему функций

$$y_1(x),\ y_2(x), \ldots, y_n(x), \tag{41}$$

имеющих все производные до n-го порядка включительно. Тогда уравнение

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) & y'(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \ldots & y_n^{(n)}(x) & y^{(n)}(x) \end{vmatrix}=0, \tag{42}$$

где $y(x)$ — неизвестная функция, будет линейным дифференциальным уравнением, для которого, как нетрудно видеть, функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ составляют фундаментальную систему решений. Коэффициент при $y^{(n)}(x)$ в (42) есть определитель Вронского $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ системы (41). Те точки, в которых этот определитель обращается в ноль, будут особыми точками построенного уравнения — в этих точках обращается в ноль коэффициент при старшей производной $y^{(n)}(x)$.

Пример 1. Составить дифференциальное уравнение, для которого функции $y_1(x)=e^x$, $y_2(x)=e^{-x}$ образуют фундаментальную систему решений.

Решение. Применяя формулу (42), получаем

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & y \\ e^x & -e^{-x} & y' \\ e^x & e^{-x} & y'' \end{vmatrix}=0 \text{ или } \begin{vmatrix} 1 & 1 & y \\ 1 & -1 & y' \\ 1 & 1 & y'' \end{vmatrix}=0. \tag{43}$$

Раскрывая определитель в левой части (43) по элементам третьего столбца, будем иметь $y''-y=0$. Это и есть искомое дифференциальное уравнение.

Пример 2. Составить дифференциальное уравнение, для которого фундаментальную систему решений образуют функции $y_1(x)=e^{x^2}$, $y_2(x)=e^{-x^2}$.

Решение. Составим уравнение вида (42):

$$\begin{vmatrix} e^{x^2} & e^{-x^2} & y \\ 2x\,e^{x^2} & -2x\,e^{-x^2} & y' \\ (2+4x^2)\,e^{x^2} & (4x^2-2)\,e^{-x^2} & y'' \end{vmatrix}=0 \text{ или }$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & y \\ 2x & -2x & y' \\ 2+4x^4 & 4x^2-2 & y'' \end{vmatrix}=0.$$

Раскрывая последний определитель по элементам 3-го столбца, будем иметь

$$xy'' - y' - 4x^3y = 0. \tag{44}$$

В этом примере определитель Вронского $W[y_1, y_2] = -4x$ обращается в ноль при $x=0$. Это не противоречит общей теории, в силу которой определитель Вронского фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\, y = 0$$

с непрерывными на отрезке $[a, b]$ коэффициентами не обращается в ноль ни в одной точке x отрезка $[a, b]$. Записав уравнение (44) в виде

$$y'' - \frac{1}{x}\, y' - 4x^2y = 0, \tag{45}$$

видим, что коэффициент при y' терпит разрыв при $x=0$, так что в точке $x=0$ непрерывность коэффициентов уравнения (45) нарушается.

Составить дифференциальные уравнения, для которых данные системы функций образуют фундаментальные системы решений:

675. $y_1(x) = \operatorname{sh} x, \quad y_2(x) = \operatorname{ch} x.$

676. $y_1(x) = x, \quad y_2(x) = e^x.$

677. $y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = e^{x^2/2}.$

678. $y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = x, \quad y_3(x) = x^2.$

679. $y_1(x) = x, \quad y_2(x) = \sin x, \quad y_3(x) = \cos x.$

7°. **Разные задачи.** Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — фундаментальная система линейного однородного уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\, y = 0.$$

Тогда имеет место формула Остроградского — Лиувилля

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(t)\, dt},$$

где $W(x) = W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ — определитель Вронского, а x_0 — любое значение x из отрезка $[a, b]$, на котором непрерывны коэффициенты $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$ уравнения.

Пример 1. Показать, что линейное дифференциальное уравнение $xy'' - (x+2)y' + y = 0$ имеет решение вида $y_1 = P(x)$, где $P(x)$ — некоторый многочлен. Показать, что второе решение y_2 этого уравнения имеет вид $y_2 = e^x Q(x)$, где $Q(x)$ — также многочлен.

Решение. Будем искать решение $y_1(x)$ в виде многочлена, например, первой степени: $y_1 = Ax + B$. Подставляя в уравнение, найдем, что $-2A + B = 0$. Пусть $A = 1$, тогда $B = 2$; таким образом, многочлен $y_1=x+2$ будет решением данного уравнения. Перепишем данное уравнение в виде

$$y''-\frac{x+2}{x}y'+\frac{1}{x}y=0.$$

Пусть $y_2(x)$ — второе частное решение данного уравнения, линейно независимое с первым. Находим определитель Вронского системы решений $y_1=x+2$, y_2:

$$W[y_1,y_2]=\begin{vmatrix} x+2 & y_2 \\ 1 & y_2' \end{vmatrix}=(x+2)y_2'-y_2,$$

здесь $x\neq-2$. Применяя формулу Остроградского — Лиувилля, будем иметь

$$(x+2)y_2'-y_2=W(x_0)\,e^{\int\limits_{x_0}^{x}\frac{t+2}{t}\,dt},$$

где x_0 — любое значение x, причем $x_0\neq0$, $x_0\neq-2$, или

$$(x+2)y_2'-y_2=Ax^2e^x;$$

здесь $A=\dfrac{W(x_0)\,e^{-x_0}}{x_0^2}=\text{const}.$

Для нахождения y_2 получили линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Деля обе части этого уравнения на $(x+2)^2$, приведем его к виду

$$\left(\frac{y_2}{x+2}\right)'=A\frac{x^2e^x}{(x+2)^2}.$$

Интегрируя, найдем

$$\frac{y_2}{x+2}=A\frac{x-2}{x+2}e^x; \quad \text{отсюда } y_2=A(x-2)e^x.$$

680. Показать, что линейное дифференциальное уравнение $(x^2-1)y''=2y$ имеет решением некоторый многочлен $y_1(x)=P(x)$. Показать, что второе решение $y_2(x)$ этого уравнения имеет вид

$$y_2(x)=P(x)\ln\frac{x+1}{x-1}+Q(x),$$

где $Q(x)$ — также многочлен.

681. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка $y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0$, если известно одно его частное решение $y_1=y_1(x)$.

682. Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$ — фундаментальная система решений линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$p_0(x)y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0.$$

Выразить коэффициенты $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ через $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

683. Доказать, что два решения уравнения $y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0$ с непрерывными коэффициентами, имеющие максимум при одном и том же значении x, линейно зависимы.

684. Доказать, что отношение двух любых линейно независимых решений уравнения $y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0$ с непрерывными коэффициентами, не может иметь точек локального максимума.

685. При каких значениях p_1 и p_2 каждое решение уравнения $y''+p_1y'+p_2y=0$ (p_1, $p_2=\text{const}$) обращается в ноль на бесконечном множестве точек x?

686. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ являются соответственно решениями уравнений $u''+p(x)u=0$ и $v''+q(x)v=0$, удовлетворяющими условию $u(a)=0$, $v(a)=0$ ($p(x)$ и $q(x)$, непрерывны на отрезке $[a\ b]$). Доказать, что определитель Вронского этих решений будет равен

$$W[u(x),\ v(x)] = \int_a^x [p(t)-q(t)]\,u(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t.$$

687. Доказать, что никакие два линейно независимых решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейного однородного уравнения $y''+p(x)\,y'+q(x)\,y=0$ не могут одновременно обращаться в ноль в одной и той же точке x_0.

688. Доказать, что если $y_1(x)$ есть некоторое частное решение линейного однородного уравнения $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, причем $y_1(x)\not\equiv 0$, то уравнение $y_1(x)=0$ не может иметь кратных корней.

689. Показать, что подстановка $y=v(x)\,z(x)$ преобразует линейное однородное уравнение $y''+p(x)\,y'+q(x)\,y=0$ снова в линейное однородное уравнение. Как надо подобрать функцию $v(x)$, чтобы в преобразованном уравнении отсутствовал член с первой производной?

690. Доказать, что решение уравнения $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+k^2x=f(t)$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0)=0$, $x'(0)=0$, имеет вид

$$x(t)=\frac{1}{k}\int_0^t f(u)\sin k(t-u)\,\mathrm{d}u.$$

691. При каких значениях p и q все решения уравнения $y''+py'+qy=0$ стремятся к нулю при $x \to +\infty$?

692. При каких значениях p и q все решения уравнения $y''+py'+qy=0$ (p, $q=\text{const}$) являются периодическими функциями от x?

693. Пусть функция $y(x)$, является решением уравнения $(1+x^2)y''-x^3y'=x^2+4$ на отрезке $[a, b]$, причем это решение удовлетворяет краевым условиям $y(a)=0$, $y(b)=0$.

Доказать, что для всех x из интервала (a, b) будет $y(x)<0$

694. Доказать, что в случае $q(x)<0$ решения уравнения $y''+p(x)\,y'+q(x)\,y=0$ не могут иметь положительных максимумов.

695. Доказать, что в случае $q(x)>0$ для любого решения уравнения $y''+q(x)\,y=0$ отношение $y'(x)/y(x)$ убывает при возрастании x на интервале, где $y(x)\neq 0$.

§ 16. МЕТОД ИЗОКЛИН ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Метод изоклин (см § 2) применяется также к решению некоторых уравнений второго порядка Это те уравнения, которые могут быть сведены к уравнению первого порядка, например, уравнения вида

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f\left(\frac{dx}{dt},\ x\right)=0. \tag{1}$$

Введем новую переменную $v=\dfrac{dx}{dt}$. Тогда $\dfrac{d^2x}{dt^2}=v\dfrac{dv}{dx}$ и уравнение (1) примет вид

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{f(v,x)}{v}, \tag{2}$$

Это уравнение первого порядка, в котором x является независимым переменным и для его решения можно применить метод изоклин. Будем величину x понимать как перемещение какой-либо точки системы, а $\dfrac{dx}{dt}=v$ — как ее скорость

Плоскость переменных x, v называется *фазовой плоскостью* Таким образом, уравнение (2) определяет скорость как функцию перемещения Строя поле изоклин для уравнения (2), мы можем вычертить интегральную кривую, если задана начальная точка (x_0, v_0). Такое графическое изображение скорости v как функции перемещения x $v=v(x)$ называют *фазовой картиной* (фазовый «портрет»). Кривые в плоскости x, v, изображающие эту зависимость, называются *фазовыми траекториями* Мгновенные значения x и v являются координатами точки фазовой траектории Точка эта называется *изо-*

бражающей точкой С течением времени изображающая точка перемещается по фазовой траектории Заметим, что положительная скорость вызывает возрастание перемещения со временем В самом деле, в силу подстановки $v=\frac{dx}{dt}$ при $v>0$ и $\frac{dx}{dt}>0$, что означает возрастание x при возрастании t Таким образом, в верхней половине фазовой плоскости, где $v>0$, изображающая точка должна двигаться слева направо, а в нижней половине плоскости, где $v<0$ справа налево Поэтому движение по фазовой траектории совершается по ходу часовой стрелки

Пример 1. Построить траектории в фазовой плоскости для уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=0. \tag{3}$$

Решение Полагаем $\frac{dx}{dt}=v$ Уравнение (3) принимает вид

$$v\frac{dv}{dx}+x=0,\ \text{или}\ \frac{dv}{dx}=-\frac{x}{v}. \tag{4}$$

Уравнения изоклин для (4) $-x/v=k$ Строя изоклины отвечающие различным значениям k, наидем, что фазовые траектории — окружности с центром в точке (0, 0) (рис 26)

Отметим, что замкнутые фазовые траектории соответствуют периодическим движениям Легко видеть, что в случае уравнения (3) мы действительно имеем периодическое движение Решая (3) методами изложенными выше, находим

$$x(t)=C_1\cos t+C_2\sin t.$$

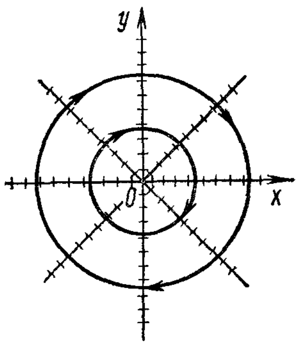

Рис 26

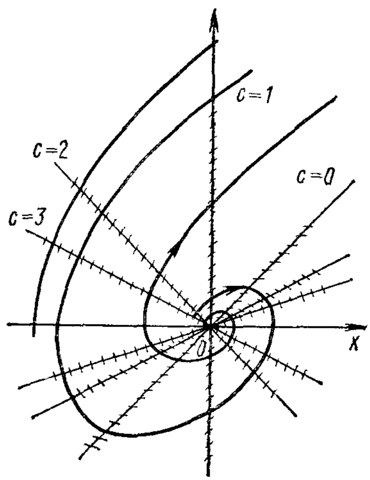

Рис 27

Пример 2. Построить фазовые траектории для уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}+x=0. \tag{5}$$

Решение. Полагаем $v=\frac{dx}{dt}$. Тогда уравнение (5) примет вид

$$\frac{dv}{dx}=\frac{v-x}{v}.$$

Уравнение изоклин $\frac{v-x}{v}=k$. Фазовые траектории имеют вид разматывающихся спиралей (рис. 27). Из фазовой картины можно усмотреть, что движение апериодическое, с амплитудой, неограниченно возрастающей со временем.

Построить фазовые траектории для следующих дифференциальных уравнений:

696. $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+x=0.$

697. $\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+6x=0.$

698. $\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+x=0.$

699. $\frac{d^2x}{dt^2}+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+x=0.$

700. $\frac{d^2x}{dt^2}-2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{dx}{dt}-2x=0.$

701. $\frac{d^2x}{dt^2}-x\cdot\exp\left(\frac{dx}{dt}\right)=0 \quad (\exp u\equiv e^u).$

702. $\frac{d^2x}{dt^2}+\exp\left(-\frac{dx}{dt}\right)-x=0.$

703. $\frac{d^2x}{dt^2}+x\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=0.$

704. $\frac{d^2x}{dt^2}+(x+2)\frac{dx}{dt}=0.$

705. $\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}+x-x^2=0.$

§ 17. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим для простоты уравнение второго порядка

$$y''+p_1(x)\,y'+p_2(x)\,y=0. \tag{1}$$

Коэффициенты $p_1(x)$ и $p_2(x)$ будем считать непрерывными в некотором интервале (a, b). Тогда каждое решение $y(x)$ уравнения (1)