Глава III

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 19. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$F_k\left(x,\ y_1,\ y_1',\ \ldots,\ y_1^{(k_1)},\ y_2,\ y_2',\ \ldots,\ y_2^{(k_2)},\ \ldots,\ y_n,\ y_n',\ \ldots,\ y^{(k_n)}\right)=0 \qquad (1)$$

$$k=1,2,\ \ldots,\ n,$$

разрешенная относительно старших производных $y_1^{(k_1)}, y_2^{(k_2)}, \ldots, y_n^{(k_n)}$, называется *канонической системой*. Она имеет вид

$$\begin{cases} y_1^{(k_1)}=f_1\left(x,\ y_1,\ y_1',\ \ldots,\ y_1^{(k_1-1)},\ y_2,\ y_2',\ \ldots,\ y_2^{(k_2-1)},\ \ldots,\ y_n,\ y_n',\ \ldots,\ y^{(k_n-1)}\right), \\ y_2^{(k_2)}=f_2\left(x,\ y_1,\ y_1',\ \ldots,\ y_1^{(k_1-1)},\ y_2,\ y_2',\ \ldots,\ y_2^{(k_2-1)},\ \ldots,\ y_n,\ y_n',\ \ldots,\ y_n^{(k_n-1)}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^{(k_n)}=f_n\left(x,\ y_1,\ y_1',\ \ldots,\ y_1^{(k_1-1)},\ y_2,\ y_2',\ \ldots,\ y_2^{(k_2-1)},\ \ldots,\ y_n,\ y_n',\ \ldots,\ y_n^{(k_n-1)}\right). \end{cases} \qquad (2)$$

Порядком системы (1) называется число p, равное

$p=k_1+k_2+\ \ldots\ +k_n$.

Пример 1. Привести к каноническому виду систему уравнений

$$\begin{cases} y_2 y_1' - \ln\left(y_1''-y_1\right)=0, \\ e^{y_2'}-y_1-y_2=0. \end{cases}$$

Решение. Данная система имеет третий порядок, так как $k_1=2$, $k_2=1$ и, значит, $p=3$. Разрешая первое уравнение относительно y_1'', а второе относительно y_2', получим каноническую систему

$$y_1''=y_1+e^{y_2y_1'},\ y_2'=\ln\left(y_1+y_2\right). \ \blacklozenge$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \; k = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

где t — независимая переменная; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — неизвестные функции от t, называется *нормальной системой.*

Число n называется *порядком нормальной системы* (3). Две системы дифференциальных уравнений называются *эквивалентными,* если они обладают одними и теми же решениями.

Любую каноническую систему (2) можно привести к эквивалентной ей нормальной системе (3), причем порядок этих систем будет одним и тем же

Пример 2. Привести к нормальной системе следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 x}{dt^2} - y = 0, \\ t^3 \dfrac{dy}{dt} - 2x = 0. \end{cases}$$

Решение. Положим $x = x_1$, $\dfrac{dx}{dt} = x_2$, $y = x_3$. Тогда будем иметь $\dfrac{dx_1}{dt} = x_2$, $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dx_3}{dt}$, и данная система приведется к следующей нормальной системе третьего порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = \dfrac{2x_1}{t^3}. \end{cases}$$

Пример 3. Привести дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + p(t)\frac{dx}{dt} + q(t)x = 0$$

к нормальной системе.

Решение. Положим $x = x_1$, $\dfrac{dx}{dt} = x_2$, тогда $\dfrac{dx_1}{dt} = x_2$, $\dfrac{d^2 x}{dt^2} = \dfrac{dx_2}{dt}$. Подставляя эти выражения в данное уравнение, получим

$$\frac{dx_2}{dt} + p(t)x_2 + q(t)x_1 = 0.$$

Нормальная система будет иметь вид

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -p(t)x_2 - q(t)x_1.$$

Решением системы (3) в интервале (a, b) называется совокупность любых n функций

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n(t),$$

определенных и непрерывно дифференцируемых в интервале (a, b), если они обращают уравнения системы (3) в тождества, справедливые для всех значений $t \in (a, b)$.

Пример 4. Показать, что система функций $x_1 = -1/t^2$, $x_2 = -t \ln t$, определенных в интервале $0 < t < +\infty$, является решением системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = 2tx_1^2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{x_2}{t} - 1.$$

Решение. Имеем $\frac{dx_1}{dt} = \frac{2}{t^3}$, $\frac{dx_2}{dt} = -1 - \ln t$. Подставляя в уравнение данной системы вместо x_1, x_2, $\frac{dx_1}{dt}$ и $\frac{dx_2}{dt}$ их выражения через t, получим тождества

$$\frac{2}{t^3} \equiv \frac{2t}{t^4} \equiv \frac{2}{t^3}, \quad -\ln t - 1 \equiv -\ln t - 1, \quad 0 < t < +\infty.$$

Проверить, являются ли данные системы функций решениями данных систем дифференциальных уравнений.

767. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -2tx_1^2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{x_2 + t}{t}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{t^2}, \\ x_2 = t \ln t. \end{cases}$

768. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = e^{t - x_1}, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2e^{x_1}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = t, \\ x_2 = 2e^t. \end{cases}$

769. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y^2}{x}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = e^t. \end{cases}$

770. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{z - 1}{z}, \\ \dfrac{dz}{dx} = y - x; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x + e^x, \\ z = e^{-x}. \end{cases}$

Задачей Коши для системы (3) называется задача нахождения решения

$$x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ \ldots,\ x_n = x_n(t)$$

этой системы, удовлетворяющего начальным условиям

$$x_1(t_0) = x_1^0,\ x_2(t_0) = x_2^0,\ \ldots,\ x_n(t_0) = x_n^0, \tag{4}$$

где $t_0,\ x_1^0,\ x_2^0, \ldots,\ x_n^0$ — заданные числа.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши. *Пусть имеем нормальную систему дифференциальных уравнений (3) и пусть функции $f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i=1, 2, \ldots, n$, определены в некоторой $n+1$-мерной области D изменения переменных t, x_1, x_2, ..., x_n. Если существует окрестность Ω точки $M_0(t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, в которой функции f_i а) непрерывны, б) имеют ограниченные частные производные по переменным x_1, x_2, ..., x_n, то найдется интервал $t_0-h<t<t_0+h$ изменения t, в котором существует единственное решение нормальной системы (3), удовлетворяющее начальным условиям (4).*

Система n дифференцируемых функций

$$x_i = x_i(t, C_1, C_2, \ldots, C_n),\ i = 1, 2, \ldots, n \tag{5}$$

независимой переменной t и n произвольных постоянных C_1, C_2, ..., C_n называется *общим решением* нормальной системы (3), если: 1) при любых допустимых значениях C_1, C_2, ..., C_n система функций (5) обращает уравнения (3) в тождества, 2) в области, где выполняются условия теоремы Коши, функции (5) решают любую задачу Коши.

Пример 5. Показать, что система функций

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}, \\ x_2(t) = 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{3t} \end{cases} \tag{6}$$

является общим решением системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2 - 4x_1, \end{cases} \tag{7}$$

Решение. *В данном примере область D есть*

$$-\infty < t < +\infty,\ -\infty < x_1, x_2 < +\infty. \tag{8}$$

Подставляя функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ из (6) в систему уравнений (7), получаем тождества по t, справедливые при любых значениях постоянных C_1, C_2 Таким образом, условие 1), определяющее общее решение, выполнено.

Проверим выполнение условия 2). Заметим, что для системы уравнений (7) условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши выполняются во всей области D, определяемой соотношениями (8). Поэтому в качестве начальных условий можно взять любую тройку чисел t_0, x_1^0, x_2^0. Тогда соотношения (6) дадут для определения C_1, C_2 систему

$$\begin{cases} x_1^0 = C_1 e^{-t_0} + C_2 e^{3t_0}, \\ x_1^0 = 2C_1 e^{-t_0} - 2C_2 e^{3t_0}. \end{cases}$$

Определитель этой системы $\Delta = -4e^{2t_0} \neq 0$; следовательно, она однозначно разрешима относительно C_1, C_2 при любых x_1^0, x_2^0 и t_0. Это равносильно тому, что разрешима любая задача Коши. Итак, система функций (6) является общим решением системы уравнений (7).◆

Решения, получающиеся из общего при конкретных значениях постоянных C_1, C_2, ..., C_n, называются *частными решениями.*

Пример 6. Имея общее решение (6) системы (7), найти частное решение этой системы, удовлетворяющее начальным условиям $x_1(0)=0$, $x_2(0)=-4$.

Решение. Задача сводится к нахождению таких значений постоянных C_1 и C_2, чтобы выполнялись соотношения

$$0 = C_1 + C_2, \quad -4 = 2C_1 - 2C_2.$$

Решая эту систему, находим $C_1=-1$, $C_2=1$. Искомое частное решение

$$x_1(t) = -e^{-t} + e^{3t}, \quad x_2(t) = -2e^{-t} - 2e^{3t}.$$

Замечания. 1. Не всякую систему дифференциальных уравнений можно свести к одному уравнению. Например, система

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2 \end{cases}$$

распадается на два независимых уравнения. Общее решение в этом случае получается интегрированием каждого уравнения в отдельности:

$$x_1 = C_1 e^{-t}, \quad x_2 = C_2 e^{t}.$$

2. Если число уравнений в системе равно n, а число искомых функций N, причем $N>n$, то такая система является неопределенной. В этом случае можно выбирать произвольно $N-n$ искомых функций (лишь бы они были нужное число раз дифференцируемы) и в зависимости от них находить остальные n функций.

3. Если система состоит из n уравнений, а число искомых функций N, причем $N<n$, то эта система может оказаться несовместной, т е. не имеющей ни одного решения. ◆

Пусть дана (для простоты) нормальная система двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2). \end{cases} \tag{9}$$

Будем рассматривать систему значений t, x_1, x_2 как прямоугольные декартовы координаты точки трехмерного пространства, отнесенного к системе координат Otx_1x_2 Решение

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t),$$

принимающее при $t=t_0$ значение x_1^0, x_2^0, изображает в этом пространстве некоторую линию, проходящую через точку $M_0(t_0, x_1^0, x_2^0)$. Эта линия называется *интегральной кривой (линией)* нормальной системы (9).

Задача Коши для системы (9) получает следующую геометрическую формулировку: в пространстве переменных (t, x_1, x_2) найти интегральную кривую, проходящую через данную точку $\left(t_0, x_1^0, x_2^0\right)$. Теорема Коши устанавливает существование и единственность такой линии.

Нормальной системе (9) и ее решению можно дать еще такое истолкование. Будем независимую переменную t рассматривать как время, а систему значений функций x_1, x_2 как прямоугольные декартовы координаты точки плоскости x_1Ox_2 Эту плоскость переменных x_1Ox_2 называют *фазовой плоскостью*. В фазовой плоскости решение

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t)$$

системы (9), принимающее при $t=t_0$ начальные значения x_1^0, x_2^0, изображается линией AB (рис. 28), проходящей через точку M_0 $\left(x_1^0, x_2^0\right)$. Эту линию называют *траекторией* системы (*фазовой траекторией*). Очевидно, что траектория системы (9) есть проекция интегральной кривой на фазовую плоскость.

Система (9) определяет в каждый момент времени t в данной точке (x_1, x_2) фазовой плоскости координаты скорости $\{f_1, f_2\}$ движущейся точки.

Пример 7. Решить систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x \tag{10}$$

при начальных условиях

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \tag{11}$$

Решение. Дифференцируя один раз по t первое уравнение системы (10) и подставляя в полученное уравнение $\frac{dy}{dt} = -x$, сведем систему (10) к одному уравнению второго порядка $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$, общее решение которого

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Так как $y = \frac{dx}{dt}$, то $y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t$; итак, общее решение системы (10):

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t. \tag{12}$$

Частным решением системы (10), удовлетворяющим начальным условиям (11), будет

$$x = x_0 \cos t + y_0 \sin t, \quad y = -x_0 \sin t + y_0 \cos t. \tag{13}$$

Исключая t из уравнений (13) (путем возвышения в квадрат и почленного сложения), получаем фазовую траекторию

$$x^2 + y^2 = R^2, \tag{14}$$

где $R = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Это окружность, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$. Представив уравнения (13) в виде

$$x = R \sin(t + \alpha),$$
$$y = R \cos(t + \alpha), \tag{15}$$

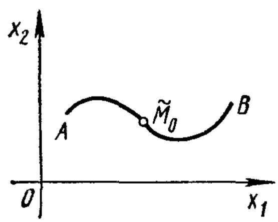

Рис. 28

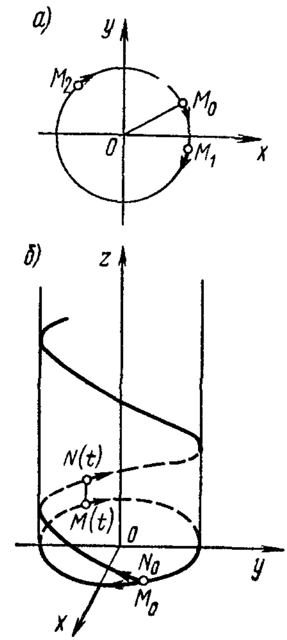

Рис. 29

где $R = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, $\sin \alpha = x_0/R$, $\cos \alpha = y_0/R$, замечаем, что уравнения (15) выражают зависимость от времени текущих координат точки $M(x(t), y(t))$, или коротко $M(t)$, которая начинает свое движение при $t=0$ от точки $M_0(x_0, y_0)$ и движется по окружности (14) (рис 29, *а*).

Направление движения точки $M(t)$ определим с помощью заданной системы (10). При $x>0$, согласно уравнению $\frac{dy}{dt} = -x$, величина y убывает (как, например, в точке $M_1(t)$), а при $x<0$ величина y возрастает (как, например, в точке $M_2(t)$). Таким образом, точка $M(t)$ движется по кривой (14) по ходу часовой стрелки. Изменяя произвольно начальные условия (11) (оставаясь, однако, в физически допустимых пределах), т. е. изменяя как угодно положение начальной точки $M_0(x_0, y_0)$, получаем всевозможные фазовые траектории (14).

Дадим теперь другое истолкование уравнений (15) (или, что то же, уравнений (13)). В трехмерном пространстве возьмем правую декартову систему координат $Oxyz$. Легко убедиться, что точка $N(x(t), y(t), z(t))$ (или коротко $N(t)$) с координатами (рис. 29, *б*)

$$x(t) = R\sin(t+\alpha), \quad y(t) = R\cos(t+\alpha), \quad z(t) = t \tag{16}$$

начинает свое движение при $t=0$ от начальной точки $N_0(x_0, y_0, 0)$ и с возрастанием t поднимается по винтовой линии (16), расположенной на цилиндре (14), с образующими, параллельными оси Oz.

Очевидно, что точка N_0 совпадает с точкой M_0 и что при любом t точка $N(t)$ проектируется в точку $M(t)$ на фазовой траектории. Так как точка $M(t)$ движется по ходу часовой стрелки, то интегральная кривая, описываемая точкой $N(t)$, есть левая винтовая линия на цилиндре (14). При различных положениях точки $N_0(x_0, y_0, 0)$ интегральные кривые системы (10), соответствующие различным значениям $R=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$, проектируются на плоскость xOy в различные кривые (14), а интегральные кривые, соответствующие одному и тому же значению R, проектируются в одну и ту же кривую (14). ◆

Интегралом нормальной системы (3) называется функция $\psi(t, x_1, x_2, .., x_n)$, определенная и непрерывная вместе со своими частными производными первого порядка $\frac{\partial\psi}{\partial t}$, $\frac{\partial\psi}{\partial x_k}$, $k=1, 2, .., n$, в области D, если при подстановке в нее произвольного решения $x_1(t)$, $x_2(t)$, .., $x_n(t)$ системы (3) она принимает постоянное значение, т. е. функция $\psi(t, x_1, x_2, ..., x_n)$ зависит только от выбора решения $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$, но не от переменной t.

Первым интегралом нормальной системы (3) называется равенство

$$\psi(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = C,$$

где $\psi(t, x_1, x_2, ..., x_n)$ — интеграл системы (3), а C — произвольная постоянная *).

Пример 8. Показать, что функция

$$\psi(t, x_1, x_2) = \frac{x_2}{t} - x_1, \tag{17}$$

определенная в области D $t\neq 0$, $-\infty < x_1, x_2 < +\infty$, является интегралом системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{x_1}{t}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 + \frac{x_2}{t}, \end{aligned} \tag{18}$$

*) Иногда первым интегралом системы (3) называют интеграл этой системы.

если общее решение этой системы есть

$$x_1 = C_1 t, \quad x_2 = C_1 t^2 + C_2 t. \tag{19}$$

Решение. Подставляя (19) в (17), получаем

$$\psi(t, x_1, x_2) = \psi(t, C_1 t, C_1 t^2 + C_2 t) = \frac{C_1 t^2 + C_2 t}{t} - C_1 t = C_2$$

в области D. Следовательно, функция (17) является в области D интегралом системы уравнений (18), а значит первый интеграл этой системы будет $\frac{x_2}{t} - x_1 = C$, где C — произвольная постоянная.

Теорема. *Для того чтобы функция $\psi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ была интегралом системы (3), необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} f_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial\psi}{\partial x_k} = 0 \tag{20}$$

в области D.

Пример 9. Показать, что функция

$$\psi(t, x_1, x_2) = \operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2} - t \tag{21}$$

является интегралом системы уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1^2}{x_2}, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\frac{x_2^2}{x_1}. \tag{22}$$

Решение. В данном случае

$$f_1(t, x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{x_2}, \quad f_2(t, x_1, x_2) = -\frac{x_2^2}{x_1}. \tag{23}$$

Находим частные производные данной функции $\psi(t, x_1, x_2)$. Имеем

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -1, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x_1} = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x_2} = -\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}. \tag{24}$$

Подставляя (23) и (24) в левую часть (20), получаем

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + f_1(t, x_1, x_2)\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + f_2(t, x_1, x_2)\frac{\partial\psi}{\partial x_2} = -1 +$$

$$+ \frac{x_1^2}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1} \cdot \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} = -1 + 1 = 0$$

в области D: $-\infty < t < +\infty$, $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$.

Итак, функция (21) есть интеграл системы уравнений (22) и, следовательно, первый интеграл системы (22) будет

$$\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2} - t = C,$$

где C — произвольная постоянная. ◆

Нормальная система (3) имеет бесконечное множество систем первых интегралов.

Интегралы $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ системы (3) называются *независимыми относительно искомых функций* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если между функциями $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ не существует соотношения вида $F(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)=0$ ни при каком выборе функции F, не зависящей явно от $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Теорема. *Для того чтобы функции $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, имеющие частные производные $\dfrac{\partial\psi_i}{\partial x_k}$, $i, k=1, 2, \ldots, n$, были независимыми относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в некоторой области D, необходимо и достаточно, чтобы якобиан этих функций был отличен от нуля в области D,*

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial\psi_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi_n}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial\psi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Общим интегралом нормальной системы (3) называется совокупность n независимых первых интегралов этой системы.

Если известны k, где $k<n$, независимых первых интегралов системы (3), то ее порядок можно понизить на k единиц.

Проверить, являются ли данные функции ψ первыми интегралами данных систем дифференциальных уравнений.

771. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{x_1^2}{x_2}, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2 - x_1; \end{cases}$ $\quad \psi = x_1 x_2 e^{-t}$.

772. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{e^{-x}}{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x}{t} e^{-y}; \end{cases}$ $\quad \psi = (1+x)e^{-x} - e^{-y}$.

773. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{y+t}{x+y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x-t}{x+y}; \end{cases}$ $\quad$ а) $\psi_1 = x+y-t$, $\quad$ б) $\psi_2 = x+y+t$.

Для следующих систем дифференциальных уравнений проверить, образуют ли данные пары функций системы независимых первых интегралов:

774. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t-y}{y-x}, & x+y+t = C_1, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x-t}{y-x}; & x^2+y^2+t^2 = C_2. \end{cases}$$

775. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t+y}{x+y}, & \dfrac{x-y}{t-x} = C_1, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t+x}{x+y}; & \dfrac{t-x}{t-y} = C_2. \end{cases}$$

§ 20. МЕТОД ИСКЛЮЧЕНИЯ (СВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К ОДНОМУ УРАВНЕНИЮ)

Частным случаем канонической системы дифференциальных уравнений является одно уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной.

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}).$$

Введением новых функций

$$x_1 = x'(t), \quad x_2 = x''(t), \quad \ldots, \quad x_{n-1} = x^{(n-1)}(t)$$

это уравнение заменяется нормальной системой n уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x_1, \\ \dfrac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_{n-2}}{dt} = x_{n-1}, \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dt} = f(t, x, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}). \end{cases}$$

Можно утверждать и обратное, что, вообще говоря, нормальная система n уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

эквивалентна одному уравнению порядка n. На этом основан один из методов интегрирования систем дифференциальных уравнений — *метод исключения.*

Проиллюстрируем этот метод на примере системы двух уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + f(t), \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy + g(t). \tag{1}$$

Здесь a, b, c, d — постоянные коэффициенты, а $f(t)$ и $g(t)$ — заданные функции; $x(t)$ и $y(t)$ — искомые функции. Из первого уравнения системы (1) находим

$$y = \frac{1}{b}\left(\frac{dx}{dt} - ax - f(t)\right). \tag{2}$$

Подставляя во второе уравнение системы вместо y правую часть (2), а вместо $\frac{dy}{dt}$ производную от правой части (2), получаем уравнение второго порядка относительно $x(t)$

$$A\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} + Cx + P(t) = 0,$$

где A, B, C — постоянные. Отсюда находим $x = x(t, C_1, C_2)$. Подставив найденное выражение для x и $\frac{dx}{dt}$ в (2), найдем y.

Пример 1. Проинтегрировать систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 1. \end{cases} \tag{3}$$

Решение. Из первого уравнения системы (3) находим $y = \frac{dx}{dt} - 1$, тогда

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{4}$$

Подставляя (4) во второе уравнение системы (3), получаем линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x - 1 = 0. \tag{5}$$

Общее решение уравнения (5)

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - 1. \tag{6}$$

Находя производную по t от (6), получаем

$$y = \frac{dx}{dt} - 1 = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - 1,$$

Общее решение системы (3):

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - 1, \quad y = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - 1$$

Пример 2. Решить задачу Коши для системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 8y, \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y, \end{cases} \tag{7}$$

$$x(0) = 6, \quad y(0) = -2. \tag{8}$$

Решение Из второго уравнения системы (7) находим

$$x = -3y - \frac{dy}{dt}, \tag{9}$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = -3\frac{dy}{dt} - \frac{d^2y}{dt^2}. \tag{10}$$

Подставляя (9) и (10) в первое уравнение системы (7), получаем уравнение $\dfrac{d^2y}{dt^2} - y = 0$, общее решение которого

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{-t}. \tag{11}$$

Подставляя (11) в (9), найдем

$$x = -4C_1 e^t - 2C_2 e^{-t}.$$

Общее решение системы (7)

$$x = -4C_1 e^t - 2C_2 e^{-t}, \quad y = C_1 e^t + C_2 e^{-t}. \tag{12}$$

При начальных условиях (8) из (12) получим систему уравнений для определения C_1, C_2:

$$\begin{cases} 6 = -4C_1 - 2C_2, \\ -2 = C_1 + C_2, \end{cases}$$

решая которую, найдем $C_1 = -1$, $C_2 = -1$ Подставляя эти значения C_1 и C_2 в (12), получаем решение поставленной задачи Коши.

$$x = 4e^t + 2e^{-t}, \quad y = -e^t - e^{-t}$$

Пример 3 Решить систему уравнений

$$\begin{cases} t\dfrac{dx}{dt} = -x + yt, \\[2ex] t^2\dfrac{dy}{dt} = -2x + yt. \end{cases}$$

Решение Из первого уравнения системы находим

$$y = \frac{x}{t} + \frac{dx}{dt},$$

так что

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{t^2} + \frac{1}{t} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Подставляя эти выражения для y и $\frac{dy}{dt}$ во второе уравнение, получаем

$$t^2 \frac{d^2x}{dt^2} + t\frac{dx}{dt} - x = -2x + x + t\frac{dx}{dt}, \text{ или } t^2\frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

Считая $t \neq 0$, из последнего уравнения имеем $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$ и после интегрирования получим $x = C_1 + C_2t$ Теперь легко находим

$$y = \frac{x}{t} + \frac{dx}{dt} = \frac{C_1 + C_2t}{t} + C_2 = 2C_2 + \frac{C_1}{t}.$$

Общее решение данной системы

$$x = C_1 + C_2t, \quad y = \frac{C_1}{t} + 2C_2, \quad t \neq 0.$$

Методом исключения решить следующие системы дифференциальных уравнений.

776. $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -9y, \\ \frac{dy}{dt} = x. \end{cases}$$

777. $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + t, \\ \frac{dy}{dt} = x - t. \end{cases}$$

778. $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 3x + 4y = 0, \\ \frac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 4. \end{cases}$$

779. $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 5y, \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y, \quad x(0) = -2, \quad y(0) = 1. \end{cases}$$

780. $\begin{cases} 4\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} + 3x = \sin t, \\ \dfrac{dx}{dt} + y = \cos t. \end{cases}$

781. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -x + z. \end{cases}$

782. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y. \end{cases}$

783. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = y, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = x. \end{cases}$

784. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + x = 0, \\ \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{d^2y}{dt^2} = 0. \end{cases}$

785. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x. \end{cases}$

786. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = x^2 + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x\dfrac{dx}{dt} + x, \quad x(0) = x'(0) = 1, \; y(0) = 0. \end{cases}$

§ 21. НАХОЖДЕНИЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ КОМБИНАЦИЙ. СИММЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1°. Нахождение интегрируемых комбинаций. Этот метод интегрирования системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

состоит в следующем: с помощью подходящих арифметических операций (сложения, вычитания, умножения, деления) из уравнений системы (1) образуют так называемые интегрируемые комбинации, т. е. достаточно просто решаемые уравнения вида

$$F\left(t, u, \frac{du}{dt}\right) = 0,$$

где u—некоторая функция от искомых функций $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$. Каждая интегрируемая комбинация дает один первый интеграл. Если найдено n независимых первых интегралов системы (1), то ее интегрирование закончено; если же найдено m независимых первых интегралов, где $m<n$, то система (1) сводится к системе с меньшим числом неизвестных функций.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2\left(x_1^2 + x_2^2\right)t, \\[2mm] \dfrac{dx_2}{dt} = 4x_1 x_2 t. \end{cases} \tag{2}$$

Решение. Складывая почленно оба уравнения, получаем

$$\frac{d(x_1 + x_2)}{dt} = (x_1 + x_2)^2 2t,$$

откуда

$$-\frac{1}{x_1 + x_2} = t^2 - C_1, \quad \text{или} \quad \frac{1}{x_1 + x_2} + t^2 = C_1.$$

Вычитая почленно оба уравнения, получаем

$$\frac{d(x_1 - x_2)}{dt} = 2t(x_1 - x_2)^2,$$

откуда

$$\frac{1}{x_1 - x_2} + t^2 = C_1.$$

Итак, найдены два первых интеграла данной системы

$$\psi_1(t, x_1, x_2) = t^2 + \frac{1}{x_1 + x_2} = C_1,$$

$$\psi_2(t, x_1, x_2) = t^2 + \frac{1}{x_1 - x_2} = C_2,$$

которые являются независимыми, так как якобиан

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{(x_1+x_2)^2} & -\frac{1}{(x_1+x_2)^2} \\ -\frac{1}{(x_1-x_2)^2} & -\frac{1}{(x_1-x_2)^2} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{2}{\left(x_1^2 - x_2^2\right)^2} \neq 0.$$

Общий интеграл системы (2)

$$t^2 + \frac{1}{x_1 + x_2} = C_1, \quad t^2 + \frac{1}{x_1 - x_2} = C_2. \tag{3}$$

Разрешая систему (3) относительно неизвестных функций, получаем общее решение системы (2):

$$x_1 = \frac{C_1 + C_2 - 2t^2}{2(C_1 - t^2)(C_2 - t^2)}, \quad x_2 = \frac{C_2 - C_1}{2(C_1 - t^2)(C_2 - t^2)}.$$

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1 - x_2}{x_3 - t}, \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{x_1 - x_2}{x_3 - t}, \\ \frac{dx_3}{dt} = x_1 - x_2 + 1, \end{cases} \tag{4}$$

Решение. Вычитая почленно из первого уравнения второе, получаем $\frac{d(x_1 - x_2)}{dt} = 0$, откуда первый интеграл системы (4)

$$x_1 - x_2 = C_1. \tag{5}$$

Подставив (5) во второе и третье уравнения системы (4), получим систему с двумя неизвестными функциями

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{dt} = \frac{C_1}{x_3 - t}, \\ \frac{dx_3}{dt} = C_1 + 1. \end{cases} \tag{6}$$

Из второго уравнения системы (6) находим

$$x_3 = (C_1 + 1)t + C_2. \tag{7}$$

Подставляя (7) в первое уравнение системы (6), будем иметь

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{C_1}{C_1 t + C_2}, \quad x_2 = \ln|C_1 t + C_2| + C_3;$$

итак,

$$x_1 - x_2 = C_1,\ x_2 = \ln|C_1 t + C_2| + C_3,\ x_3 = (C_1 + 1)t + C_2.$$

Отсюда находим общее решение системы (4):

$$x_1 = \ln|C_1 t + C_2| + C_1 + C_3,\ x_2 = \ln|C_1 t + C_2| + C_3,$$
$$x_3 = (C_1 + 1)t + C_2.$$

Пример 3. Найти частное решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 - \dfrac{1}{y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{x - t}, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям $x|_{t=0} = 1,\ y|_{t=0} = 1.$

Решение. Запишем данную систему в виде

$$\begin{cases} y\left(\dfrac{dx}{dt} - 1\right) = -1, \\ (x-t)\dfrac{dy}{dt} = 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y\dfrac{d(x-t)}{dt} = -1, \\ (x-t)\dfrac{dy}{dt} = 1. \end{cases}$$

Складывая почленно последние уравнения, получаем

$$y\frac{d(x-t)}{dt} + (x-t)\frac{dy}{dt} = 0, \text{ или } \frac{d}{dt}[(x-t)y] = 0.$$

Отсюда находим первый интеграл $(x-t)y = C_1$. Так как $x - t = C_1/y$, то второе уравнение системы примет вид $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{C_1}$, откуда $y = C_2 e^{t/C_1}$. Итак,

$$(x-t)y = C_1,\ y = C_2 e^{t/C_1},$$

откуда получаем общее решение

$$x = t + \frac{C_1}{C_2}e^{-t/C_1},\ y = C_2 e^{t/C_1}.$$

Полагая $t = 0$ в этих равенствах, найдем $1 = C_1/C_2$, $1 = C_2$, т. е. $C_1 = C_2 = 1$, и искомым частным решением будет

$$x = t + e^{-t},\ y = e^t.$$

Пример 4 (разложение вещества). Вещество A разлагается на два вещества X и Y со скоростью образования каждого из них, пропорциональной количеству неразложившегося вещества. Найти закон изменения количеств x и y веществ X и Y в зависимости от времени t, если при $t = 0$ имеем $x = y = 0$, а через час $x = a/8$, $y = 3a/8$, где a — первоначальное количество вещества A.

Р е ш е н и е. В момент времени t количество неразложившегося вещества A равно $a—x—y$. В силу условия задачи будем иметь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k_1(a - x - y), \\ \dfrac{dy}{dt} = k_2(a - x - y). \end{cases} \tag{8}$$

Разделив почленно второе уравнение на первое, получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k_2}{k_1}, \text{ откуда } y = \frac{k_2}{k_1}x + C_1.$$

При $t=0$ имеем $x=y=0$, поэтому из последнего уравнения находим $C_1=0$, а значит

$$y = \frac{k_2}{k_1}x. \tag{9}$$

Подставив (9) в первое уравнение системы, получим уравнение

$$\frac{dx}{dt} + (k_1 + k_2)x = k_1 a,$$

общее решение которого

$$x = \frac{k_1 a}{k_1 + k_2} + C_2 e^{-(k_1+k_2)t}.$$

Используя начальное условие $x|_{t=0}=0$, найдем $C_2 = -\dfrac{k_1 a}{k_1 + k_2}$, так что

$$x = \frac{k_1 a}{k_1 + k_2}\left[1 - e^{-(k_1+k_2)t}\right]. \tag{10}$$

Подставляя (10) в (9), будем иметь

$$y = \frac{k_2 a}{k_1 + k_2}\left[1 - e^{-(k_1+k_2)t}\right].$$

Для определения коэффициентов k_1 и k_2 примем за единицу времени час Учитывая, что $x = \dfrac{a}{8}$, $y = \dfrac{3}{8}a$ при $t=1$, найдем

$$\frac{k_1}{k_1 + k_2}\left[1 - e^{-(k_1+k_2)}\right] = \frac{1}{8}, \quad \frac{k_2}{k_1 + k_2}\left[1 - e^{-(k_1+k_2)}\right] = \frac{3}{8},$$

откуда

$$k_2 = 3k_1, \quad k_1 + k_2 = \ln 2,$$

так что $k_1 = \dfrac{\ln 2}{4}$, $k_2 = \dfrac{3}{4}\ln 2$, и искомое решение системы (8)

$$x = \frac{a}{4}(1 - 2^{-t}), \quad y = \frac{3a}{4}(1 - 2^{-t}).$$

Пример 5 (Равновесие газов в сообщающихся сосудах). Пусть имеются два сосуда объемов V_1 и V_2 соответственно, наполненные газом Давление газа в начальный момент времени равно P_1 в первом сосуде и P_2 — во втором Сосуды соединены трубкой, по которой газ перетекает из одного сосуда в другой. Считая, что количество газа, перетекающего в одну секунду, пропорционально разности квадратов давлений, определить давления p_1 и p_2 в сосудах в момент времени t

Решение. Пусть a — количество газа, перетекающего в единицу времени при разности давлений, равной единице. Тогда в течение времени $\mathrm{d}t$ из одного сосуда в другой протечет количество газа $a\left(p_1^2-p_2^2\right)\mathrm{d}t$. Это количество равно убыли газа за время $\mathrm{d}t$ в одном сосуде и прибыли за то же время — в другом. Последнее выражается системой уравнений

$$\begin{cases} a\left(p_1^2-p_2^2\right)=bV_2\dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}, \\ a\left(p_1^2-p_2^2\right)=-bV_1\dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}, \end{cases} \tag{11}$$

где b — постоянный коэффициент.

Вычитая почленно уравнения системы (11), получаем

$$V_1\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}+V_2\frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}=0,$$

откуда

$$V_1p_1+V_2p_2=C_1. \tag{12}$$

Умножим обе части первого уравнения системы (11) на p_1V_1, а второго — на p_2V_2 и сложим почленно:

$$a\left(p_1^2-p_2^2\right)\left(p_1V_1+p_2V_2\right)=bV_1V_2\left(p_1\frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}-p_2\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}\right). \tag{13}$$

Учитывая (12) и деля обе части (13) на p_1^2, будем иметь

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)=\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2\right]k,$$

где $k=\dfrac{aC_1}{bV_1V_2}$. Обозначая $p_2/p_1=z$, получаем

$$\frac{\mathrm{d}z}{1-z^2}=k\mathrm{d}t, \text{ откуда } \ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right|=2kt+\ln C_2$$

или

$$\frac{1+z}{1-z}=C_2\mathrm{e}^{2kt}. \tag{14}$$

Подставляя в (14) вместо z величину p_2/p_1, окончательно получаем

$$\frac{p_1+p_2}{p_1-p_2}=C_2\mathrm{e}^{2kt}. \tag{15}$$

В начальный момент времени $t=0$ имеем $p_1=P_1$, $p_2=P_2$, так что из уравнения (12) имеем

$$C_1 = P_1V_1 + P_2V_2, \tag{16}$$

а из уравнения (15)

$$C_2 = \frac{P_1 + P_2}{P_1 - P_2}. \tag{17}$$

Из уравнений (12) и (15) находим искомые давления $p_1(t)$ и $p_2(t)$ в любой момент времени t, при этом постоянные C_1 и C_2 определяются формулами (16) и (17).

Решить следующие системы дифференциальных уравнений:

787. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 + y^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2xy. \end{cases}$

790. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{y}{x-y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x}{x-y}. \end{cases}$

788. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{1}{y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$

791. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sin x \cos y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \cos x \sin y. \end{cases}$

789. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$

792. $\begin{cases} e^t \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{y}, \\ e^t \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$

793. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \cos^2 x \cos^2 y + \sin^2 x \cos^2 y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{1}{2} \sin 2x \sin 2y, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0. \end{cases}$

2°. Симметрическая форма системы дифференциальных уравнений. Для нахождения интегрируемых комбинаций при решении системы дифференциальных уравнений (1) иногда бывает удобно записать ее в симметрической форме

$$\frac{dx_1}{f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{dt}{1}. \tag{18}$$

В системе дифференциальных уравнений, записанной в симметрической форме, переменные t, x_1, x_2, .., x_n равноправны, что в некоторых случаях упрощает нахождение интегрируемых комбинаций.

Для решения системы (18) либо берут пары отношений, допускающие разделение переменных, либо же используют производные пропорции

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_m}{b_m}=\frac{\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\ldots+\lambda_m a_m}{\lambda_1b_1+\lambda_2a_2+\ldots+\lambda_m a_m}, \qquad (19)$$

где коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ произвольны и их выбирают так, чтобы числитель был дифференциалом знаменателя, либо числитель был полным дифференциалом, а знаменатель был равен нулю.

Пример 6. Найти общее решение системы уравнений

$$\frac{dt}{2x}=\frac{dx}{-\ln t}=\frac{dy}{\ln t-2x}. \qquad (20)$$

Решение. Первая интегрируемая комбинация $\frac{dt}{2x}=-\frac{dx}{\ln t}$. Разделяя переменные и интегрируя, найдем первый интеграл

$$t(\ln t-1)+x^2=C_1. \qquad (21)$$

Вторую интегрируемую комбинацию получим, используя производные пропорции (19). Для этого сложим числители и знаменатели дробей системы (20):

$$\frac{dt}{2x}=\frac{dx}{-\ln t}=\frac{dy}{\ln t-2x}=\frac{dt+dx+dy}{0},$$

здесь $\lambda_1=1$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=1$. Отсюда $dt+dx+dy=0$, или $d(t+x+y)=0$ и, значит,

$$t+x+y=C_2. \qquad (22)$$

Первые интегралы (21) и (22) дают общий интеграл системы (20)

$$x^2+t(\ln t-1)=C_1, \qquad x+y+t=C_2,$$

из которого находим общее решение системы

$$x=\pm\sqrt{C_1+t(\ln t-1)}, \qquad y=C_2-t\mp\sqrt{C_1+t(\ln t-1)}.$$

Пример 7. Решить систему уравнений

$$\frac{dt}{4y-5x}=\frac{dx}{5t-3y}=\frac{dy}{3x-4t}. \qquad (23)$$

Решение. Умножая в системе (23) числители и знаменатели дробей соответственно на 3, 4, 5 и складывая числители и знаменатели, получаем в силу (19)

$$\frac{3dt}{12y-15x}=\frac{4dx}{20t-12y}=\frac{5dy}{15x-20t}=\frac{3dt+4dx+5dy}{0}$$

(здесь $\lambda_1=3$, $\lambda_2=4$, $\lambda_3=5$). Отсюда $3dt+4dx+5dy=0$ или $d(3t+4x+5y)=0$, а значит $3t+4x+5y=C_1$ — это первый интеграл системы (23).

Умножая в системе (23) числители и знаменатели дробей соответственно на $\lambda_1=2t$, $\lambda_2=2x$, $\lambda_3=2y$ и складывая числители и знаменатели, получаем в силу (19)

$$\frac{2t\,dt}{8yt-10xt}=\frac{2x\,dx}{10tx-6yx}=\frac{2y\,dy}{6xy-8ty}=\frac{2t\,dt+2x\,dx+2y\,dy}{0};$$

отсюда

$$2t\,\mathrm{d}t+2x\,\mathrm{d}x+2y\,\mathrm{d}y=0 \text{ или } \mathrm{d}\left(t^2+x^2+y^2\right)=0,$$

и, значит, второй первый интеграл будет $t^2+x^2+y^2=C_2$.

Совокупность первых интегралов, которые являются независимыми, дает общий интеграл системы (23).

$$3t+4x+5y=C_1, \qquad t^2+x^2+y^2=C_2.$$

Итак, система (23) решена.

Решить следующие системы дифференциальных уравнений:

794. $\dfrac{\mathrm{d}t}{t}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{ty}$.

795. $\dfrac{\mathrm{d}t}{xy}=\dfrac{\mathrm{d}x}{yt}=\dfrac{\mathrm{d}y}{xt}$.

796. $\dfrac{\mathrm{d}x}{y}=-\dfrac{\mathrm{d}y}{x}=\dfrac{\mathrm{d}p}{q}=-\dfrac{\mathrm{d}q}{p}$.

797. $\dfrac{\mathrm{d}x}{xt}=\dfrac{\mathrm{d}y}{-yt}=\dfrac{\mathrm{d}t}{xy}$.

798. $\dfrac{\mathrm{d}t}{t^2-x^2-y^2}=\dfrac{\mathrm{d}x}{2tx}=\dfrac{\mathrm{d}y}{2ty}$.

799. $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{3t-4y}{2y-3x},\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{4x-2t}{2y-3x}.\end{cases}$

800. $\begin{cases}t\,\mathrm{d}x=(t-2x)\,\mathrm{d}t,\\ t\,\mathrm{d}y=(tx+ty+2x-t)\,\mathrm{d}t.\end{cases}$

801. $\dfrac{t\,\mathrm{d}t}{x^2-2xy-x^2}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x+y}=\dfrac{\mathrm{d}y}{x-y}$.

§ 22. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. МЕТОД ЭЙЛЕРА

Линейной однородной системой с постоянными коэффициентами называется система дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\,x_k(t), \quad i=1,2,\ldots,n, \tag{1}$$

где коэффициенты a_{ik} — постоянные, а $x_k(t)$ — искомые функции от t.

Систему (1) можно коротко записать в виде одного матричного уравнения

$$\frac{dX}{dt} = AX, \tag{2}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots \\ a_{n1}\, a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}.$$

Однoстолбцовая матрица

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

называется *частным решением* уравнения (2) в интервале (a, b), если выполняется тождество

$$\frac{dY}{dt} \equiv AY(t) \text{ для } a<t<b.$$

Система частных решений

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) \\ x_1^{(2)}(t) \\ \vdots \\ x_1^{(n)}(t) \end{pmatrix}, \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} x_2^{(1)}(t) \\ x_2^{(2)}(t) \\ \vdots \\ x_2^{(n)}(t) \end{pmatrix}, \dots, \quad X_n(t) = \begin{pmatrix} x_n^{(1)}(t) \\ x_n^{(2)}(t) \\ \vdots \\ x_n^{(n)}(t) \end{pmatrix}$$

(здесь в записи x_i^k нижний индекс указывает номер решения, а верхний — номер функции в решении) называется *фундаментальной* на интервале (a, b), если ее определитель Вронского

$$W(t) \equiv W(X_1, X_2, \dots, X_n) = \begin{vmatrix} x_1^{(1)}(t)\, x_2^{(1)}(t) \dots x_n^{(1)}(t) \\ x_1^{(2)}(t)\, x_2^{(2)}(t) \dots x_n^{(2)}(t) \\ \dots\dots\dots \\ x_1^{(n)}(t)\, x_2^{(n)}(t) \dots x_n^{(n)}(t) \end{vmatrix} \neq 0,$$

для всех $t \in (a, b)$.

Теорема. *Если система частных решений однородного уравнения (2) является фундаментальной, то общее решение этого уравнения имеет вид*

$$X(t) = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t) + \ldots + C_n X_n(t),$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные

Линейные системы можно интегрировать различными способами, рассмотренными ранее, например методом исключения, путем нахождения интегрируемых комбинации и т. д

Для интегрирования однородных линейных систем с постоянными коэффициентами применяется также метод Эйлера.

Рассмотрим этот метод в применении к системе трех линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by + cz, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_1x + b_1y + c_1z, \\ \dfrac{dz}{dt} = a_2x + b_2y + c_2z. \end{cases} \tag{3}$$

Решение системы (3) ищем в виде

$$x = \lambda e^{rt}, \quad y = \mu e^{rt}, \quad z = \nu e^{rt}, \quad \lambda, \mu, \nu \text{ и } r \text{ — const}. \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3) и сокращая на e^{rt}, получаем систему уравнении для определения λ, μ и ν:

$$\begin{cases} (a - r)\lambda + b\mu + c\nu = 0, \\ a_1\lambda + (b_1 - r)\mu + c_1\nu = 0, \\ a_2\lambda + b_2\mu + (c_2 - r)\nu = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Система (5) имеет ненулевое решение, когда ее определитель Δ равен нулю,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a - r & b & c \\ a_1 & b_1 - r & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 - r \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Уравнение (6) называется *характеристическим.*

А Пусть корни r_1, r_2 и r_3 характеристического уравнения — вещественные и различные Подставив в (5) вместо r число r_1 и решив систему (5), получим числа λ_1, μ_1 и ν_1. Затем положим в (5) $r = r_2$ и получим числа λ_2, μ_2, ν_2 и, наконец, при $r = r_3$ получим λ_3, μ_3, ν_3. Соответственно трем наборам чисел λ, μ и ν получим три частных решения

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 e^{r_1t}, & y_1 &= \mu_1 e^{r_1t}, & z_1 &= \nu_1 e^{r_1t}, \\ x_2 &= \lambda_2 e^{r_2t}, & y_2 &= \mu_2 e^{r_2t}, & z_2 &= \nu_2 e^{r_2t}, \\ x_3 &= \lambda_3 e^{r_3t}, & y_3 &= \mu_3 e^{r_3t}, & z_3 &= \nu_3 e^{r_3t}, \end{aligned}$$

Общее решение системы (3) имеет вид

$$x = C_1 \lambda_1 e^{r_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{r_2 t} + C_3 \lambda_3 e^{r_3 t},$$
$$y = C_1 \mu_1 e^{r_1 t} + C_2 \mu_2 e^{r_2 t} + C_3 \mu_3 e^{r_3 t},$$
$$z = C_1 \nu_1 e^{r_1 t} + C_2 \nu_2 e^{r_2 t} + C_3 \nu_3 e^{r_3 t}.$$

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 5y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + 3z. \end{cases}$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-r & -1 & 1 \\ -1 & 5-r & -1 \\ 1 & -1 & 3-r \end{vmatrix} = 0,$$

или $r^3 - 11r^2 + 36r - 36 = 0$.

Корням $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 6$ соответствуют числа

$$\lambda_1 = 1, \quad \mu_1 = 0, \quad \nu_1 = -1;$$
$$\lambda_2 = 1, \quad \mu_2 = 1, \quad \nu_2 = 1;$$
$$\lambda_3 = 1, \quad \mu_3 = -2, \quad \nu_3 = 1.$$

Выписываем частные решения

$$x_1 = e^{2t}, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = -e^{2t},$$
$$x_2 = e^{3t}, \quad y_2 = e^{3t}, \quad z_2 = e^{3t},$$
$$x_3 = e^{6t}, \quad y_3 = -2e^{6t}, \quad z_3 = e^{6t}.$$

Общее решение системы:

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t},$$
$$y = C_2 e^{3t} - 2C_3 e^{6t},$$
$$z = -C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}.$$

Б Рассмотрим теперь случай, когда корни характеристического уравнения комплексные.

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases} \qquad (7)$$

Решение. Выпишем систему для определения λ и μ:

$$\begin{cases}(1-r)\lambda-5\mu=0,\\ 2\lambda-(1+r)\mu=0.\end{cases} \tag{8}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}1-r & -5\\ 2 & -1-r\end{vmatrix}=0$$

имеет корни $r_1=3i$, $r_2=-3i$ Подставляя $r_1=3i$ в (8), получаем два уравнения для определения λ_1 и μ_1:

$$(1-3i)\lambda_1-5\mu_1=0, \qquad 2\lambda_1-(1+3i)\mu_1=0,$$

из которых одно является следствием другого (в силу того, что определитель системы (8) равен нулю).

Возьмем $\lambda_1=5$, $\mu_1=1-3i$, тогда первое частное решение запишется так.

$$x_1=5e^{3it}, \qquad y_1=(1-3i)e^{3it}. \tag{9}$$

Аналогично, подставляя в (8) корень $r_2=-3i$, найдем второе частное решение:

$$x_2=5e^{-3it}, \qquad y_2=(1+3i)e^{-3it}. \tag{10}$$

Перейдем к новой фундаментальной системе решений:

$$\tilde{x}_1=\frac{x_1+x_2}{2}, \qquad \tilde{x}_2=\frac{x_1-x_2}{2i},$$

$$\tilde{y}_1=\frac{y_1+y_2}{2}, \qquad \tilde{y}_2=\frac{y_1-y_2}{2i}. \tag{11}$$

Пользуясь известной формулой Эйлера $e^{\pm\alpha it}=\cos\alpha t\pm i\sin\alpha t$, из (9), (10) и (11) получаем

$$\tilde{x}_1=5\cos 3t, \qquad \tilde{x}_2=5\sin 3t,$$

$$\tilde{y}_1=\cos 3t+3\sin 3t, \qquad \tilde{y}_2=\sin 3t-3\cos 3t.$$

Общим решением системы (7) будет

$$x=C_1\tilde{x}_1+C_2\tilde{x}_2=5C_1\cos 3t+5C_2\sin 3t,$$

$$y=C_1\tilde{y}_1+C_2\tilde{y}_2=C_1(\cos 3t+3\sin 3t)+C_2(\sin 3t-3\cos 3t).$$

Замечание. Найдя первое частное решение (9), можно было бы сразу написать общее решение системы (7), пользуясь формулами

$$x=C_1\operatorname{Re}x_1+C_2\operatorname{Im}x_1, \qquad y=C_1\operatorname{Re}y_1+C_2\operatorname{Im}y_1,$$

где $\operatorname{Re}z$ и $\operatorname{Im}z$ обозначают соответственно действительную и мнимую части комплексного числа z, т. е. если $z=a+bi$, то $\operatorname{Re}z=a$, $\operatorname{Im}z=b$.

В. Случай кратных корней.

Пример 3. Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - x. \end{cases} \tag{12}$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-r & 1 \\ -1 & 4-r \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или } r^2 - 6r + 9 = 0$$

имеет кратный корень $r_1 = r_2 = 3$.

Решение следует искать в виде

$$x = (\lambda_1 + \mu_1 t)\, e^{3t}, \qquad y = (\lambda_2 + \mu_2 t)\, e^{3t}. \tag{13}$$

Подставляя (13) в первое уравнение системы (12), получаем

$$3(\lambda_1 + \mu_1 t) + \mu_1 = 2(\lambda_1 + \mu_1 t) + (\lambda_2 + \mu_2 t). \tag{14}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t в левой и правой части (14), получаем:

$$3\lambda_1 + \mu_1 = 2\lambda_1 + \lambda_2,$$
$$3\mu_1 = 2\mu_1 + \mu_2,$$

откуда

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \mu_1, \qquad \mu_2 = \mu_1. \tag{15}$$

Величины λ_1 и μ_1 остаются произвольными. Обозначая их соответственно через C_1 и C_2, получаем общее решение системы (12):

$$x = (C_1 + C_2 t)\, e^{3t}, \qquad y = (C_1 + C_2 + C_2 t)\, e^{3t}.$$

Замечание. Легко проверить, что если (13) подставить во второе уравнение системы (12), то получим тот же результат (15). В самом деле, из равенства

$$\mu_2 + 3(\lambda_2 + \mu_2 t) = 4(\lambda_2 + \mu_2 t) - (\lambda_1 + \mu_1 t)$$

получаем два соотношения для определения λ_2 и μ_2 через λ_1 и μ_1:

$$\mu_2 + 3\lambda_2 = 4\lambda_2 - \lambda_1,$$
$$3\mu_2 = 4\mu_2 - \mu_1,$$

откуда $\lambda_2 = \lambda_1 + \mu_2$, $\mu_2 = \mu_1$.

Пример 4. Решить задачу Коши для системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x + 8y - 2z \end{cases} \tag{16}$$

с начальными условиями $x(0) = -4$, $y(0) = 0$, $z(0) = 1$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -r & 8 & 0 \\ 0 & -r & -2 \\ 2 & 8 & -2-r \end{vmatrix} = 0, \text{ или } (r+2)(r^2+16)=0. \tag{17}$$

Корни уравнения (17): $r_1=-2$, $r_2=4i$, $r_3=-4i$. Действительному корню $r_1=-2$ отвечает решение

$$x_1=\lambda_1 e^{-2t}, \quad y_1=\mu_1 e^{-2t}, \quad z_1=\nu_1 e^{-2t}. \tag{18}$$

Подставляя (18) в систему (16) и сокращая на e^{-2t}, получаем

$$-2\lambda_1=8\mu_1, \quad -2\mu_1=-2\nu_1 \quad -2\nu_1=2\lambda_1+8\mu_1-2\nu_1,$$

откуда $\lambda_1=-4\mu_1$, $\nu_1=\mu_1$. Полагаем, например, $\mu_1=1$, тогда $\lambda_1=-4$, $\nu_1=1$ и частное решение (18):

$$x_1=-4e^{-2t}, \quad y_1=e^{-2t}, \quad z_1=e^{-2t}. \tag{19}$$

Комплексному корню $r_2=4i$ отвечает решение

$$x_2=\lambda_2 e^{4it}, \quad y_2=\mu_2 e^{4it}, \quad z_2=\nu_2 e^{4it},$$

подставив которое в (16) и сокращая на e^{4it}, получим

$$4i\lambda_2=8\mu_2, \quad 4i\mu_2=-2\nu_2, \quad 4i\nu_2=2\lambda_2+8\mu_2-2\nu_2,$$

откуда $\lambda_2=-2i\mu_2$, $\nu_2=-2i\mu_2$, так что, например, при $\mu_2=i$ имеем $\lambda_2=2$, $\nu_2=2$ и частное решение

$$x_2=2e^{4it}, \quad y_2=ie^{4it}, \quad z_2=2e^{4it}. \tag{20}$$

Корню $r_3=-4i$ соответствует решение, комплексно сопряженное решению (20), т. е.

$$x_3=2e^{-4it}, \quad y_3=-ie^{-4it}, \quad z_3=2e^{-4it}. \tag{21}$$

Учитывая (19), (20), (21), получаем общее решение

$$\begin{aligned} x &= -4C_1 e^{-2t}+2C_2 e^{4it}+2C_3 e^{-4it}, \\ y &= C_1 e^{-2t}+C_2 i e^{4it}-C_3 i e^{-4it}, \\ z &= C_1 e^{-2t}+2C_2 e^{4it}+2C_3 e^{-4it}. \end{aligned} \tag{22}$$

Выделим, наконец, решение с начальными условиями $x(0)=-4$, $y(0)=0$, $z(0)=1$.
Из (22) при $t=0$ имеем

$$\begin{cases} -4=-4C_1+2C_2+2C_3, \\ 0=C_1+C_2 i-C_3 i, \\ 1=C_1+2C_2+2C_3, \end{cases}$$

откуда $C_1=1$, $C_2=i/2$, $C_3=-i/2$;
итак,

$$\begin{aligned} x &= -4e^{-2t}+ie^{4it}-ie^{-4it}, \\ y &= e^{-2t}-\frac{1}{2}e^{i4t}-\frac{1}{2}e^{-i4t}, \\ z &= e^{-2t}+ie^{i4t}-ie^{-4it}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись формулами Эйлера $e^{\pm\alpha i t}=\cos\alpha t\pm i\sin\alpha t$, окончательно получим

$$x=-4e^{-2t}-2\sin 4t,\qquad y=e^{-2t}-\cos 4t,\qquad z=e^{-2t}-2\sin 4t.$$

Методом Эйлера найти общее решение данных систем, и где указано, выделить решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям.

802. $$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=8y-x,\\ \dfrac{dy}{dt}=x+y.\end{cases}$$

803. $$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-y,\\ \dfrac{dy}{dt}=y-x.\end{cases}$$

804. $$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+y,\\ \dfrac{dy}{dt}=x-3y,\quad x(0)=y(0)=0.\end{cases}$$

805. $$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+y,\\ \dfrac{dy}{dt}=4y-2x,\quad x(0)=0,\quad y(0)=-1.\end{cases}$$

806. $$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=4x-5y,\\ \dfrac{dy}{dt}=x,\quad x(0)=0,\quad y(0)=1.\end{cases}$$

807. $$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x+y+z,\\ \dfrac{dy}{dt}=x-y+z,\\ \dfrac{dz}{dt}=x+y-z.\end{cases}$$

808. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + 2z. \end{cases}$

809. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = y - 2z - 3x, \quad x(0) = 0, \; y(0) = 0, \; z(0) = 1. \end{cases}$

§ 23. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Пусть имеем неоднородную линейную систему с **постоянными** коэффициентами

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k(t) + f_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

которую короче можно записать в матричном виде

$$\frac{dX}{dt} = AX + F,$$

где F — одностолбцовая матрица, элементами которой являются функции $f_i(t)$.

Теорема. *Общее решение $X(t)$ неоднородной линейной системы равно сумме общего решения $X_{о.о}(t)$ соответствующей однородной системы $\dfrac{dX}{dt} = AX$ и любого частного решения $X_{ч.н}(t)$ данной неоднородной системы*

$$X(t) = X_{о.о}(t) + X_{ч.н}(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k X_k(t) + X_{ч.н}(t),$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные.

Рассмотрим некоторые методы интегрирования неоднородных линейных систем.

1°. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). Проиллюстрируем этот метод на примере системы трех неоднородных уравнений. Пусть задана система

$$\begin{cases} x' + a_1x + b_1y + e_1z = f_1(t), & (1,1) \\ y' + a_2x + b_2y + e_2z = f_2(t), & (1,2) \\ z' + a_3x + b_3y + e_3z = f_3(t). & (1,3) \end{cases} \tag{1}$$

Будем предполагать, что общее решение соответствующей однородной системы уже найдено

$$\begin{aligned} x &= C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3, \\ y &= C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3, \\ z &= C_1z_1 + C_2z_2 + C_3z_3. \end{aligned} \tag{2}$$

Решение неоднородной системы (1) ищем в виде

$$\begin{aligned} x &= C_1(t)\,x_1 + C_2(t)\,x_2 + C_3(t)\,x_3, \\ y &= C_1(t)y_1 + C_2(t)y_2 + C_3(t)y_3, \\ z &= C_1(t)z_1 + C_2(t)z_2 + C_3(t)z_3, \end{aligned} \tag{3}$$

где $C_1(t)$, $C_2(t)$, $C_3(t)$ — пока неизвестные функции

Подставим (3) в (1) тогда уравнение (1 1) примет вид

$$\begin{aligned} C_1'x_1 + C_2'x_2 + C_3'x_3 + C_1\left(x_1' + a_1x_1 + b_1y_1 + e_1z_1\right) + \\ + C_2\left(x_2' + a_1x_2 + b_1y_2 + e_1z_2\right) + C_3\left(x_3' + a_1x_3 + b_1y_3 + \right. \\ \left. + e_1z_3\right) = f_1(t). \end{aligned} \tag{4}$$

Все суммы, стоящие в скобках, обратятся в ноль (в силу того, что (2) есть решение соответствующей однородной системы), так что будем иметь

$$C_1'x_1 + C_2'x_2 + C_3'x_3 = f_1(t). \tag{5}$$

Аналогично из (1, 2) и (1, 3) после подстановки в них (3) получим

$$\begin{aligned} C_1'y_1 + C_2'y_2 + C_3'y_3 &= f_2(t), \\ C_1'z_1 + C_2'z_2 + C_3'z_3 &= f_3(t). \end{aligned} \tag{6}$$

Система уравнений (5), (6), линейных относительно C_1', C_2', C_3', имеет решение, так как ее определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

в силу линейной независимости частных решений соответствующей однородной системы Отыскав $C_1'(t)$, $C_2'(t)$, $C_3'(t)$, затем с помощью интегрирования найдем $C_1(t)$, $C_2(t)$, $C_3(t)$, а тем самым и решение (3) неоднородной системы (1)

Пример 1. Методом вариации постоянных решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2x + 4y = 1 + 4t, \\ \dfrac{dy}{dt} + x - y = \dfrac{3}{2}t^2. \end{cases} \tag{7}$$

Решение Сначала решим соответствующую однородную систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2x + 4y = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} + x - y = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Из второго уравнения системы (8) имеем

$$x = y - \frac{dy}{dt}, \text{ так что } \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{d^2y}{dt^2}.$$

Подставим эти выражения для x и $\dfrac{dx}{dt}$ в первое уравнение системы (8):

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y = 0;$$

общее решение этого уравнения

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t}.$$

Так как $x = y - \dfrac{dy}{dt}$, то будем иметь

$$x = -C_1 e^{2t} + 4C_2 e^{-3t}.$$

Общее решение однородной системы (8) есть

$$x = -C_1 e^{2t} + 4C_2 e^{-3t}, \qquad y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t}.$$

Решение неоднородной системы (7) ищем в виде

$$x = -C_1(t) e^{2t} + 4C_2(t) e^{-3t}, \qquad y = C_1(t) e^{2t} + C_2(t) e^{-3t}. \tag{9}$$

Подставив (9) в (7) и приведя подобные члены, получим

$$\begin{cases} -C_1'(t) e^{2t} + 4C_2'(t) e^{-3t} = 1 + 4t, \\ C_1'(t) e^{2t} + C_2'(t) e^{-3t} = \dfrac{3}{2} t^2, \end{cases}$$

откуда

$$C_1'(t) = \frac{(6t^2 - 4t - 1) e^{-2t}}{5}, \qquad C_2'(t) = \frac{(3t^2 + 8t + 2) e^{3t}}{10}.$$

Интегрируя, найдем

$$C_1(t) = -\frac{1}{5}(t + 3t^2) e^{-2t} + C_1,$$

$$C_2(t) = \frac{1}{10}(2t + t^2) e^{3t} + C_2, \tag{10}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Подставляя (10) в (9), получим общее решение системы (7)

$$x = -C_1 e^{2t} + 4C_2 e^{-3t} + t + t^2, \quad y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t} - \frac{1}{2} t^2.$$

Методом вариации произвольных постоянных найти общее решение следующих линейных неоднородных систем:

810. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2x - y = -e^{2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} + 3x - 2y = 6e^{2t}. \end{cases}$$

811. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y - \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -y - 2x + \cos t + \sin t, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -2. \end{cases}$$

812. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = \operatorname{tg} t - x. \end{cases}$$

813. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1}. \end{cases}$$

814. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + \dfrac{1}{\cos t}. \end{cases}$$

2°. Метод неопределенных коэффициентов (метод подбора). Этот метод применяется для решения неоднородной системы линейных уравнений тогда, когда функции $f_i(t)$, стоящие в правой части системы, имеют специальный вид: многочлены $P_k(t)$, показательные функции $e^{\alpha t}$, синусы и косинусы $\sin \beta t$, $\cos \beta t$ и произведения этих функций. Исходя из вида правой части системы, находят частное решение неоднородной системы x_{kr} (см. табл. 1 в § 16, 3°).

Пример 2. Найти общее решение неоднородной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y + e^{2t}. \end{cases} \tag{11}$$

Решение. Найдем сначала общее решение соответствующей однородной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y. \end{cases} \tag{12}$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Корни этого уравнения $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$. Корню $\lambda_1=2$ соответствует частное решение системы

$$x_1 = \mu_1 e^{2t}, \quad y_1 = \nu_1 e^{2t}.$$

Подставляя x_1 и y_1 в (12), получаем систему уравнений для нахождения μ_1 и ν_1:

$$-\mu_1 - 2\nu_1 = 0, \quad \mu_1 + 2\nu_1 = 0.$$

Отсюда имеем, например, $\mu_1=2$, $\nu_1=-1$, так что первое частное решение однородной системы (11) есть

$$x_1 = 2e^{2t}, \quad y_1 = -e^{2t}.$$

Корню $\lambda_2=3$ соответствует частное решение

$$x_2 = \mu_2 e^{3t}, \quad y_2 = \nu_2 e^{3t}.$$

Числа μ_2 и ν_2 находим из системы

$$\begin{cases} -2\mu_2 - 2\nu_2 = 0, \\ \mu_2 + \nu_2 = 0, \end{cases}$$

которой удовлетворяют, например, числа $\mu_2=1$, $\nu_2=-1$. Тогда второе частное решение системы (12) есть

$$x_2 = e^{3t}, \quad y_2 = -e^{3t}.$$

Общее решение однородной системы (12):

$$\tilde{x} = 2C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}, \quad \tilde{y} = -C_1 e^{2t} - C_2 e^{3t}.$$

Методом неопределенных коэффициентов находим частное решение неоднородной системы (11). Исходя из вида правых частей $f_1(t)=e^t$ и $f_2(t)=e^{2t}$, записываем вид частного решения (см. табл. 1)

$$x_{\text{ч.н}} = K e^t + (Lt + M) e^{2t}, \quad y_{\text{ч.н}} = N e^t + (Pt + Q) e^{2t}. \tag{13}$$

Подставляя (13) в (11), будем иметь

$$Ke^t + 2(Lt + M)e^{2t} + Le^{2t} = Ke^t + (Lt + M)e^{2t} - 2Ne^t - \\ - 2(Pt + Q)e^{2t} + e^t,$$

$$Ne^t + 2(Pt + Q)e^{2t} + Pe^{2t} = Ke^t + (Lt + M)e^{2t} + 4Ne^t + \\ + 4(Pt + Q)e^{2t} + e^{2t}.$$

Приравнивая коэффициенты при e^t, e^{2t} и te^{2t} в обеих частях этих тождеств, получаем из первого:

$$\begin{array}{l|l} e^t & K = K - 2N + 1, \\ e^{2t} & 2M + L = M - 2Q, \\ te^{2t} & 2L = L - 2P, \end{array}$$

из второго:

$$\begin{array}{l|l} e^t & N = K + 4N, \\ e^{2t} & 2Q + P = M + 4Q + 1 \\ te^{2t} & 2P = L + 4P. \end{array}$$

Решая эту систему уравнений, находим $K=-3/2$, $L=2$, $M=0$, $N=1/2$, $P=-1$, $Q=-1$.

Значит, частное решение (13) имеет вид

$$x_{\text{ч.н}} = -\frac{3}{2}e^t + 2te^{2t}, \qquad y_{\text{ч.н}} = \frac{1}{2}e^t - (t+1)e^{2t}.$$

Общее решение неоднородной системы

$$x = 2C_1e^{2t} + C_2e^{3t} - \frac{3}{2}e^t + 2te^{2t},$$

$$y = -C_1e^{2t} - C_2e^{3t} + \frac{1}{2}e^t - (t+1)e^{2t}.$$

Пример 3. Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 5\sin t. \end{cases} \tag{14}$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

Корни характеристического уравнения $\lambda=-1$, $\lambda_2=2$. Общее решение соответствующей однородной системы:

$$\tilde{x} = C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t}, \qquad \tilde{y} = -C_1e^{-t} + C_2e^{2t}.$$

Найдем частное решение неоднородной системы (14), имея в виду, что $f_1(t)=0$, $f_2(t)=-5\sin t$. Запишем $x_{\text{ч.н}}$ и $y_{\text{ч.н}}$ в виде

$$x_{\text{ч.н}} = A\cos t + B\sin t, \qquad y_{\text{ч.н}} = M\cos t + N\sin t$$

и подставим в систему (14):

$$-A\sin t + B\cos t = A\cos t + B\sin t + 2M\cos t + 2N\sin t,$$

$$-M\sin t + N\cos t = A\cos t + B\sin t - 5\sin t.$$

Приравниваем коэффициенты при $\sin t$ и $\cos t$ в обеих частях равенств:

$$\begin{cases} -A = B + 2N, \\ \quad B = A + 2M, \\ -M = B - 5, \\ \quad N = A, \end{cases}$$

отсюда $A=-1$, $B=3$, $M=2$, $N=-1$, так что

$$x_{\text{ч.н}} = -\cos t + 3\sin t, \qquad y_{\text{ч.н}} = 2\cos t - \sin t.$$

Общее решение исходной системы:

$$x = \tilde{x} + x_{\text{ч.н}} = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} - \cos t + 3\sin t,$$

$$y = \tilde{y} + y_{\text{ч.н}} = -C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + 2\cos t - \sin t.$$

Пример 4. Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y + 16t\,e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2y. \end{cases} \tag{15}$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \lambda^2 + \lambda - 6 = 0.$$

Корни характеристического уравнения $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-3$. Общее решение однородной системы, соответствующей системе (15):

$$\tilde{x} = 2C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t}, \qquad \tilde{y} = C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-3t}.$$

Частное решение неоднородной системы уравнений (15) ищем в виде

$$x_{\text{ч.н}} = (At + B)\,e^t, \qquad y_{\text{ч.н}} = (Mt + N)\,e^t. \tag{16}$$

Подставим (16) в (15) и сократим на e^t:

$$At + B + A = At + B + 2Mt + 2N + 16t$$

$$Mt + N + M = 2At + 2B - 2Mt - 2N,$$

отсюда $A=-12$, $B=-13$, $M=-8$, $N=-6$; итак,

$$x_{\text{ч.н}} = -(12t + 13)\,e^t, \qquad y_{\text{ч.н}} = -(8t + 6)\,e^t.$$

Общее решение исходной системы:

$$x=\tilde{x}+x_{\text{ч.н}}=2C_1\,e^{2t}+C_2\,e^{-3t}-(12t+13)\,e^t,$$

$$y=\tilde{y}+y_{\text{ч.н}}=C_1\,e^{2t}-2C_2\,e^{-3t}-(8t+6)\,e^t. \blacklozenge$$

Проинтегрировать неоднородные линейные системы с постоянными коэффициентами.

815. $$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y,\\ \dfrac{dy}{dt}=1-x.\end{cases}$$

816. $$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3-2y,\\ \dfrac{dy}{dt}=2x-2t.\end{cases}$$

817. $$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y+\sin t,\\ \dfrac{dy}{dt}=x+\cos t.\end{cases}$$

818. $$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+y+e^t,\\ \dfrac{dy}{dt}=x+y-e^t.\end{cases}$$

819. $$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=4x-5y+4t-1,\\ \dfrac{dy}{dt}=x-2y+t, \quad x(0)=y(0)=0.\end{cases}$$

820. $$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y-x+e^t,\\ \dfrac{dy}{dt}=x-y+e^t, \quad x(0)=y(0)=1.\end{cases}$$

821. $$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+y=t^2,\\ \dfrac{dy}{dt}-x=t.\end{cases}$$

$$822. \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + y = e^{-t}, \\ 2\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + 2y = \sin t. \end{cases}$$

$$823. \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y - 2z + 2 - t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 1 - x, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y - z + 1 - t. \end{cases}$$

$$824. \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + x + 2y = 2e^{-t}, \\ \dfrac{dy}{dt} + y + z = 1, \\ \dfrac{dz}{dt} + z = 1, \quad x(0) = y(0) = z(0) = 1. \end{cases}$$

3°. Построение интегрируемых комбинаций (метод Даламбера). Этот метод служит для построения интегрируемых комбинаций при решении систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Покажем его применение для решения систем двух уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1x + b_1y + f_1(t), \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + f_2(t). \end{cases} \tag{17}$$

Умножим второе уравнение на некоторое число λ и сложим почленно с первым уравнением:

$$\frac{d(x + \lambda y)}{dt} = (a_1 + \lambda a_2)x + (b_1 + \lambda b_2)y + f_1(t) + \lambda f_2(t).$$

Перепишем последнее уравнение в виде

$$\frac{d(x + \lambda y)}{dt} = (a_1 + \lambda a_2)\left(x + \frac{b_1 + \lambda b_2}{a_1 + \lambda a_2}y\right) + f_1(t) + \lambda f_2(t). \tag{18}$$

Выберем число λ, так, чтобы

$$\frac{b_1 + \lambda b_2}{a_1 + \lambda a_2} = \lambda. \tag{19}$$

Тогда (18) приводится к уравнению, линейному относительно $x + \lambda y$,

$$\frac{d(x + \lambda y)}{dt} = (a_1 + \lambda a_2)(x + \lambda y) + f_1(t) + \lambda f_2(t),$$

интегрируя которое, получаем

$$x+\lambda y=e^{(a_1+\lambda a_2)t}\left\{C+\int[f_1(t)+\lambda f_2(t)]e^{-(a_1+\lambda a_2)t}\,dt\right\}. \tag{20}$$

Если уравнение (19) имеет различные вещественные корни λ_1 и λ_2, то из (20) получим два первых интеграла системы (17), и, значит, интегрирование этой системы будет окончено.

Пример 5. Решить методом Даламбера систему

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=5x+4y+e^t,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=4x+5y+1.\end{cases} \tag{21}$$

Решение. Выберем λ по формуле (19): $4+5\lambda=\lambda(5+4\lambda)$, откуда $\lambda_{1,2}=\pm 1$.

Тогда по формуле (20) для случая $\lambda=1$ будем иметь

$$x+y=e^{(5+4\cdot1)t}\left\{C_1+\int(e^t+1)\,e^{-(5+4\cdot1)t}\,dt\right\}=$$

$$=e^{9t}\left\{C_1+\int(e^{-8t}+e^{-9t})\,dt\right\}=C_1e^{9t}-\frac{1}{8}e^t-\frac{1}{9}.$$

Для $\lambda=-1$ аналогично получаем

$$x-y=e^{(5-4)t}\left\{C_2+\int(e^t-1)\,e^{-(5-4)t}\,dt\right\}=C_2e^t+te^t+1.$$

Итак, имеем два первых независимых интеграла системы (21):

$$\left(x+y+\frac{1}{8}e^t+\frac{1}{9}\right)e^{-9t}=C_1,\quad (x-y-te^t-1)\,e^{-t}=C_2.$$

Интегрирование системы закончено.

Замечание. Если правые части нормальной системы уравнений имеют вид $\dfrac{ax+by+cz+P(t)}{t}$, где a, b, c — постоянные, а $P(t)$ многочлен от t, то подстановка $t=e^\tau$ приводит к системе с постоянными коэффициентами.

Пример 6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}t\dfrac{dx}{dt}=-2x+2y+t,\\[2mm] t\dfrac{dy}{dt}=-x-5y+t^2.\end{cases}$$

Решение. Сделаем замену переменного $t=e^\tau$. Тогда

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt}=\frac{1}{t}\cdot\frac{dx}{d\tau};\qquad \frac{dy}{dt}=\frac{1}{t}\cdot\frac{dy}{d\tau}$$

и система примет вид

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{d\tau}=-2x+2y+e^\tau,\\[2mm] \dfrac{dy}{d\tau}=-x-5y+e^{2\tau}.\end{cases} \tag{22}$$

Для решения системы (22) применим метод Даламбера. Умножим второе уравнение системы на λ и сложим почленно с первым:

$$\frac{d}{d\tau}(x+\lambda y)=(-2-\lambda)x+(2-5\lambda)y+e^{\tau}+\lambda e^{2\tau}$$

или

$$\frac{d}{d\tau}(x+\lambda y)=(-2-\lambda)\left[x+\frac{2-5\lambda}{-2-\lambda}y\right]+e^{\tau}+\lambda e^{2\tau}. \tag{23}$$

Выберем λ так, чтобы коэффициент при y в квадратной скобке был равен λ, т. е. $\frac{2-5\lambda}{-2-\lambda}=\lambda$, или $\lambda^2-3\lambda+2=0$, откуда $\lambda=1$, $\lambda_2=2$. При $\lambda_1=1$ из (23) получаем

$$\frac{d(x+y)}{d\tau}=-3(x+y)+e^{\tau}+e^{2\tau},$$

откуда, согласно формуле (20), будем иметь

$$x+y=e^{-3\tau}\left[C_1+\int(e^{\tau}+e^{2\tau})e^{3\tau}\,d\tau\right].$$

После интегрирования получаем

$$x+y=C_1e^{-3\tau}+\frac{1}{4}e^{\tau}+\frac{1}{5}e^{2\tau}. \tag{24}$$

При $\lambda_2=2$ из (23) аналогично находим

$$x+2y=C_2e^{-4\tau}+\frac{1}{5}e^{\tau}+\frac{1}{3}e^{2\tau}. \tag{25}$$

Решая систему (24)—(25) относительно x и y, получаем общее решение системы (22):

$$x=2C_1e^{-3\tau}-C_2e^{-4\tau}+0{,}3e^{\tau}+\frac{1}{15}e^{2\tau},$$

$$y=-C_1e^{-3\tau}+C_2e^{-4\tau}-0{,}05e^{\tau}+\frac{2}{15}e^{2\tau}.$$

Возвращаясь к переменному $t\,(e^{\tau}=t)$, получим общее решение данной системы

$$x=\frac{2C_1}{t^3}-\frac{C_2}{t^4}+\frac{3t}{10}+\frac{t^2}{15},$$

$$y=-\frac{C_1}{t^3}+\frac{C_2}{t^4}-\frac{t}{20}+\frac{2t^2}{15}.$$

Решить методом Даламбера следующие системы уравнений:

825. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=5x+4y,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=x+2y.\end{cases}$ **826.** $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=6x+y,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=4x+3y.\end{cases}$

827. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 4y + 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 5y. \end{cases}$ 828. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y - e^t. \end{cases}$

829. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 4y + \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 2y + \sin t. \end{cases}$

§ 24. ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА К РЕШЕНИЮ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

1°. Общие сведения о преобразовании Лапласа

Оригинал и изображение. *Функцией-оригиналом* называется комплекснозначная функция $f(t)$ действительного переменного t, удовлетворяющая следующим условиям: 1) $f(t)=0$, если $t<0$;

2) $f(t)$ интегрируема на любом конечном интервале оси t;

3) с возрастанием t модуль функции $f(t)$ растет не быстрее некоторой показательной функции, т. е. существуют числа $M>0$ и $s_0 \geqslant 0$ такие, что для всех t имеем

$$|f(t)| \leqslant M e^{s_0 t}. \tag{1}$$

Изображением функции-оригинала по Лапласу называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p=s+i\sigma$, определяемая равенством

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt \tag{2}$$

при $\operatorname{Re} p > s_0$. Условие 3 обеспечивает существование интеграла (2).

Преобразование (2), относящее оригиналу $f(t)$ его изображение $F(p)$, называется *преобразованием Лапласа.* При этом пишут $f(t) \risingdotseq F(p)$.

Свойства преобразования Лапласа. Всюду в дальнейшем считаем, что

$$f(t) \risingdotseq F(p), \qquad g(t) \risingdotseq G(p). \tag{3}$$

I *Свойство линейности Для любых комплексных постоянных* α и β

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \risingdotseq \alpha F(p) + \beta G(p). \tag{4}$$

II *Теорема подобия. Для любого постоянного* $\alpha>0$

$$f(\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \tag{5}$$