Глава IV
ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

§ 25. УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть имеем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Решение $\varphi_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$, системы (1), удовлетворяющее начальным условиям $\varphi_i(t_0)=\varphi_{i0}$, $i=1, 2, \ldots, n$, называется устойчивым *по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для *всякого* решения $x_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$, системы (1), начальные значения которого удовлетворяют условиям

$$|x_i(t_0) - \varphi_{i0}| < \delta, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

имеют место неравенства

$$|x_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

для всех $t \geqslant t_0$.

Если при сколь угодно малом $\delta>0$ хотя бы для одного решения $x_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$, неравенства (3) не выполняются, то решение $\varphi_i(t)$ называется *неустойчивым*.

Если кроме выполнения неравенств (3) при условии (2) выполняется также условие

$$\lim_{t\to\infty} |x_i(t) - \varphi_i(t)| = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

то решение $\varphi_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$, называется *асимтотически устойчивым*.

Исследование на устойчивость решения $\varphi_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$, системы (1) можно свести к исследованию на устойчивость нулевого (тривиального) решения $x_i\equiv 0$, $i=1, 2, \ldots, n$, некоторой системы, аналогичной системе (1),

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1'}$$

где $F_i(0, 0, \ldots, 0, t)\equiv 0$, $i=1, 2, \ldots, n$.

Говорят, что точка $x_i=0$, $i=1, 2, \ldots, n$, есть *точка покоя* системы (1′).

Применительно к точке покоя определения устойчивости и неустойчивости могут быть сформулированы так. *Точка покоя* $x_i=0$, $i=1, 2, \ldots, n$, *устойчива по Ляпунову*, если, каково бы ни было $\varepsilon>0$, можно найти такое $\delta>0$, что для любого решения $x_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$, начальные данные которого $x_{i0}=x_i(t_0)$, $i=1, 2, \ldots, n$, удовлетворяют условию

$$|x_{i0}| < \delta, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2'}$$

выполняются неравенства

$$|x_i(t)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3'}$$

для всех $t \geqslant t_0$.

Для случая $n=2$ геометрически это означает следующее. Каким бы узким ни был цилиндр радиуса ε с осью Ot, в плоскости $t=t_0$ найдется δ — окрестность точки $(0, 0, t_0)$ такая, что все интегральные кривые

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t),$$

выходящие из этой окрестности, для всех $t \geqslant t_0$ будут оставаться внутри этого цилиндра (рис. 30).

Если кроме выполнения неравенств (3), выполняется также условие $\lim\limits_{t\to+\infty}|x_i(t)|=0$, $i=1, 2, \ldots, n$, *то устойчивость асимтотическая.*

Точка покоя $x_i=0$, $i=1, 2, \ldots, n$, *неустойчива*, если при сколь угодно малом $\delta>0$ хотя бы для одного решения $x_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$, условие (3') не выполняется.

Пример 1. Исходя из определения устойчивости по Ляпунову, исследовать на устойчивость решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = 1 + t - x, \tag{5}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$x(0) = 0.$$

Решение. Уравнение (5) есть линейное неоднородное уравнение. Его общее решение $x(t)=Ce^{-t}+t$. Начальному условию $x(0)=0$ удовлетворяет решение

$$\varphi(t) = t \tag{6}$$

уравнения (5). Начальному условию $x(0)=x_0$ удовлетворяет решение

$$x(t) = x_0 e^{-t} + t. \tag{7}$$

Рассмотрим разность решений (7) и (6) уравнения (5) и запишем ее так:

$$x(t) - \varphi(t) = x_0 e^{-t} + t - t = (x_0 - 0)e^{-t}.$$

Отсюда видно, что для всякого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ (например, $\delta=\varepsilon$) такое, что для всякого решения $x(t)$ уравнения (5), начальные значения которых удовлетворяют условию $|x_0-0|<\delta$, выполняется неравенство

$$|x(t) - \varphi(t)| = |x_0 - 0|e^{-t} < \varepsilon$$

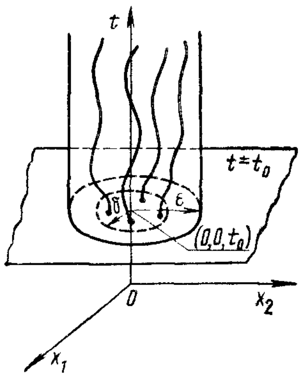

Рис 30

для всех $t \geqslant 0$. Следовательно, решение $\varphi(t)=t$ является устойчивым. Более того, поскольку

$$\lim_{t \to +\infty} |x(t) - \varphi(t)| = \lim_{t \to +\infty} |x_0 - 0| e^{-t} = 0$$

решение $\varphi(t)=t$ является асимптотически устойчивым

Это решение $\varphi(t)$ является неограниченным при $t \to +\infty$.◆

Приведенный пример показывает, что из устойчивости решения дифференциального уравнения не следует ограниченности решения.

Пример 2. Рассмотрим уравнение [6]:

$$\frac{dx}{dt} = \sin^2 x, \tag{8}$$

Оно имеет очевидные решения

$$x = k\pi, \quad k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots, \tag{9}$$

Интегрируем уравнение (8):

$$\operatorname{ctg} x = C - t, \text{ или } \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0 - t,$$

откуда

$$x = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x_0 - t), \quad x \neq k\pi. \tag{10}$$

Все решения (9) и (10) ограничены на $(-\infty, +\infty)$. Однако решение $x(t) \equiv 0$ неустойчиво при $t \to +\infty$, так как при любом $x_0 \in (0, \pi)$ имеем $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = \pi$ Следовательно, из ограниченности решений дифференциального уравнения, вообще говоря, не следует устойчивости их (рис. 31).

Это явление характерно для нелинейных уравнений и систем.

Пример 3. Исходя из определения устойчивости по Ляпунову, показать, что решение системы

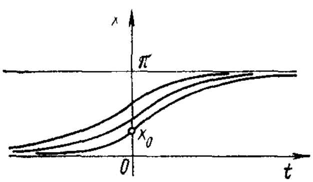

Рис 31

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x, \end{cases} \tag{11}$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(0)=0$, $y(0)=0$, устойчиво.

Решение. Решение системы (11), удовлетворяющее заданным начальным условиям, есть $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$. Любое решение этой системы, удовлетворяющее условиям $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$, имеет вид

$$x(t) = x_0 \cos t - y_0 \sin t, \quad y(t) = x_0 \sin t + y_0 \cos t.$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и покажем, что существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $|x_0 - 0| < \delta$, $|y_0 - 0| < \delta$ имеют место неравенства

$$|x(t) - 0| = |x_0 \cos t - y_0 \sin t| < \varepsilon,$$

$$|y(t) - 0| = |x_0 \sin t + y_0 \cos t| < \varepsilon,$$

для всех $t \geqslant 0$.

Это и будет означать, согласно определению, что нулевое решение $x(t)\equiv 0$, $y(t)\equiv 0$ системы (11) устойчиво по Ляпунову. Имеем, очевидно,

$$|x_0\cos t - y_0\sin t| \leqslant |x_0\cos t| + |y_0\sin t| \leqslant |x_0| + |y_0|, \tag{12}$$
$$|x_0\sin t + y_0\cos t| \leqslant |x_0\sin t| + |y_0\cos t| \leqslant |x_0| + |y_0|$$

для всех t. Поэтому, если $|x_0|+|y_0|<\varepsilon$, то и подавно

$$|x_0\cos t - y_0\sin t| < \varepsilon, \quad |x_0\sin t + y_0\cos t| < \varepsilon \tag{13}$$

для всех t.

Следовательно, если, например, взять $\delta(\varepsilon)=\varepsilon/2$, то при $|x_0|<\delta$ и $|y_0|<\delta$ в силу (12) будут иметь место неравенства (13) для всех $t\geqslant 0$, т. е. действительно нулевое решение системы (11) устойчиво по Ляпунову, но эта устойчивость не асимптотическая.

Теорема. *Решения системы линейных дифференциальных уравнений*

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\,x_j + f_i(t), \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

либо все одновременно устойчивы, либо неустойчивы.

Это предложение не верно для нелинейных систем, некоторые решения которых могут быть устойчивыми, а другие — неустойчивыми.

Пример 4. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = 1 - x^2(t). \tag{14}$$

Оно имеет очевидные решения $\varphi(t)=-1$ и $\varphi(t)=1$.

Решение $\varphi(t)=-1$ этого уравнения неустойчиво, а решение $\varphi(t)=1$ является асимптотически устойчивым. В самом деле, при $t\to+\infty$ все решения уравнения (14)

$$x(t) = \frac{(1+x_0)\,e^{2(t-t_0)} - (1-x_0)}{(1+x_0)\,e^{2(t-t_0)} + (1-x_0)} \quad (x_0 \neq -1)$$

стремятся к $+1$. Это означает, согласно определению, что решение $\varphi(t)\equiv 1$ уравнения асимптотически устойчиво.

Исходя из определения устойчивости по Ляпунову, исследовать на устойчивость решения следующих уравнений и систем уравнений:

880. $\dfrac{dx}{dt} = x + t, \quad x(0) = 1.$

881. $\dfrac{dx}{dt} = 2t(x+1), \quad x(0) = 0.$

882. $\dfrac{dx}{dt} = -x + t^2, \quad x(1) = 1.$

883. $\frac{dx}{dt} = 2 + t, \quad x(0) = 1.$

884. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 13y, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{4}x - 2y, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0.$

885. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 9y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0.$

§ 26. ПРОСТЕЙШИЕ ТИПЫ ТОЧЕК ПОКОЯ

Пусть имеем систему двух линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \tag{1}$$

причем

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

Точка $x=0$, $y=0$, в которой правые части уравнений системы (1) обращаются в ноль, называется *точкой покоя системы* (1).

Для исследования точки покоя системы (1) надо составить характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

и найти его корни λ_1 и λ_2.

Возможны следующие случаи:

1. Корни λ_1, λ_2 характеристического уравнения (2) вещественные и разные:

а) $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$. Точка покоя асимптотически устойчива (устойчивый узел, рис. 32);

б) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. Точка покоя неустойчива (неустойчивый узел, рис. 33);

в) $\lambda_1 > 0$, $\lambda < 0$ Точка покоя неустойчива (седло, рис. 34).

2. Корни характеристического уравнения (2) комплексные: $\lambda_1 = p + iq$, $\lambda_2 = p - iq$;

а) $p < 0$, $q \neq 0$. Точка покоя асимптотически устойчива (устойчивый фокус, рис. 35);

б) $p > 0$, $q \neq 0$. Точка покоя неустойчива (неустойчивый фокус, рис. 36);

в) $p=0$, $q\neq 0$. Точка покоя устойчива (центр, рис. 37).

3. Корни $\lambda_1=\lambda_2$ кратные:

а) $\lambda_1=\lambda_2<0$ Точка покоя асимптотически устойчива (устойчивый узел, рис. 38, 39).

б) $\lambda_1=\lambda_2>0$. Точка покоя неустойчива (неустойчивый узел, рис 40, 41).

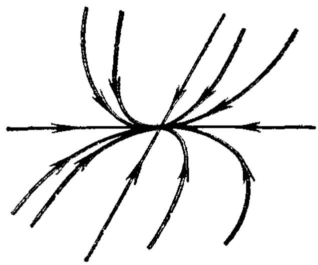

Рис. 32

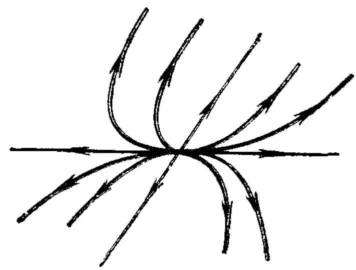

Рис. 33

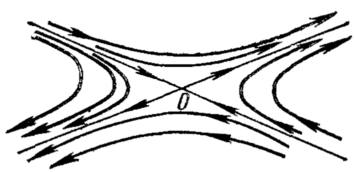

Рис 34

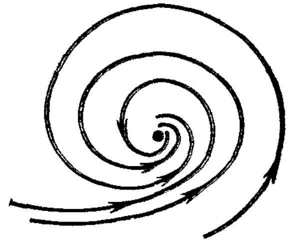

Рис. 35

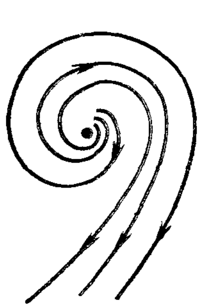

Рис 36

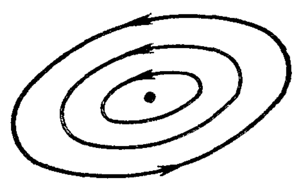

Рис 37

Пример 1. Определить характер точки покоя (0, 0) системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad \lambda^2 - 6\lambda + 7 = 0.$$

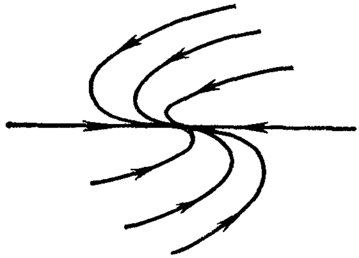

Рис. 38

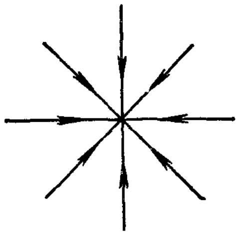

Рис. 39

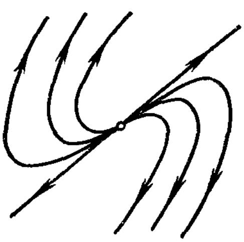

Рис. 40

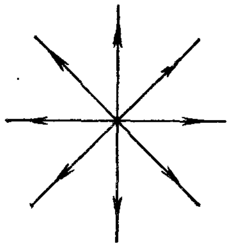

Рис. 41

Его корни $\lambda_1 = 3 + \sqrt{2} > 0$, $\lambda_2 = 3 - \sqrt{2} > 0$ вещественные, разные, положительные. Следовательно, точка покоя (0, 0) — неустойчивый узел.

Связь между типами точек покоя и значениями корней характеристического уравнения (2) можно представить наглядно. Для этого введем обозначения $\sigma = -(a_{11} + a_{22})$, $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Тогда характеристическое уравнение запишется в виде $\lambda^2 + \sigma\lambda + \Delta = 0$.

Рассмотрим плоскость с прямоугольными декартовыми координатами Δ и σ и отметим на ней области, соответствующие различным типам точек покоя (рис. 42). Из приведенной выше классификации следует, что условиями устойчивости точки покоя являются $\operatorname{Re}\lambda_1<0$, $\operatorname{Re}\lambda_2<0$. Они выполняются при $\Delta>0$ и $\sigma>0$, т. е. для точек, которые находятся в первой четверти.

Если λ_1 и λ_2 комплексные, то точка покоя будет типа фокуса. Этому условию удовлетворяют точки, которые лежат между ветвями параболы $\sigma^2=4\Delta$ и не принадлежат оси $O\Delta$ ($\sigma^2<4\Delta$, $\sigma\neq0$).

Точки полуоси $\sigma=0$, для которых $\Delta>0$, соответствуют точкам покоя типа центра.

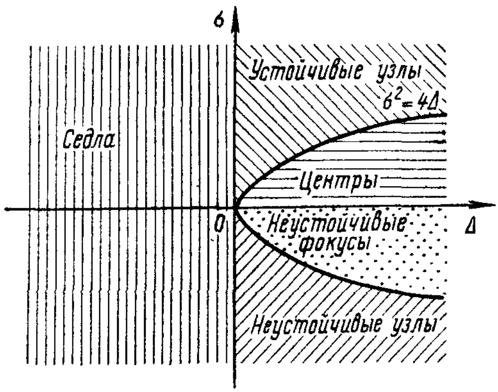

Рис. 42

Точки, расположенные вне параболы $\sigma^2=4\Delta$ ($\sigma^2>4\Delta$), соответствуют точкам покоя типа узла.

Область плоскости $O\Delta\sigma$, где $\Delta<0$, содержит точки покоя типа седла.

Исключая особые случаи (прохождение через начало координат), замечаем, что седло может перейти в узел устойчивый или неустойчивый (рис. 42). Устойчивый узел может перейти либо в седло, либо в устойчивый фокус. Случай равных корней $\lambda_1=\lambda_2$ соответствует границе между узлами и фокусами, т. е. параболе $\sigma^2=4\Delta$.

Пример 2. Исследовать уравнение упругих колебаний

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\alpha\frac{dx}{dt}+\beta^2x=0 \tag{3}$$

с учетом трения и сопротивления среды (при $\alpha>0$).

Решение. Переходим от уравнения (3) к эквивалентной ему системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y, \\ \dfrac{dy}{dt}=-2\alpha y-\beta^2x. \end{cases} \tag{4}$$

Для определения характера точки покоя (0, 0) системы (4) составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\beta^2 & -2\alpha-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \lambda^2+2\alpha\lambda+\beta^2=0;$$

отсюда

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2-\beta^2}. \qquad (5)$$

Рассмотрим следующие случаи: а) $\alpha=0$ (сопротивление среды отсутствует). Из (5) получаем $\lambda_{1,2}=\pm i\beta$. Точка покоя устойчива — центр (все движения являются периодическими);

б) $\alpha>0$, $\alpha^2-\beta^2<0$. Корни λ_1 и λ_2 — комплексно-сопряженные, причем $\mathrm{Re}\lambda<0$. Точка покоя — устойчивый фокус (колебания затухают);

в) $\alpha<0$ (случай «отрицательного трения»), $\alpha^2-\beta^2<0$. Корни λ_1 и λ_2 — комплексно-сопряженные, причем $\mathrm{Re}\lambda>0$. Точка покоя — неустойчивый фокус;

г) $\alpha>0$, $\alpha^2-\beta^2\geqslant0$ (сопротивление среды велико $\alpha\geqslant\beta$). Корни λ_1 и λ_2 — действительные и отрицательные. Точка покоя — устойчивый узел (все решения затухающие и неколеблющиеся);

д) $\alpha<0$, $\alpha^2-\beta^2\geqslant0$ (случай большого «отрицательного трения»). Корни λ_1 и λ_2 действительные и положительные. Точка покоя — неустойчивый узел

Определить характер точек покоя для следующих систем дифференциальных уравнений:

886. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + y. \end{cases}$

887. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$

888. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y. \end{cases}$

889. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - y. \end{cases}$

890. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + \dfrac{5}{7}y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 7x - 3y. \end{cases}$

891. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$

892. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3y. \end{cases}$

893. При каких значениях α точка покоя (0, 0) системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + \alpha y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$$

устойчива?

Пусть имеем систему линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\ (n \geqslant 2). \qquad (6)$$

Для нее имеют место аналогичные типы расположения интегральных кривых около начала координат (*обобщенное седло, обобщенный узел* и т. д.)

Теорема. *Если все корни характеристического уравнения для системы* (6) *имеют отрицательную вещественную часть, то точка покоя системы* (6) $x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *асимптотически устойчива. Если хотя бы один корень характеристического уравнения имеет положительную вещественную часть, что точка покоя неустойчива.*

Пример 3. Будет ли устойчива точка покоя (0, 0, 0) системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = y - z; \end{cases}$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или $(1+\lambda)(\lambda^2+3\lambda+3) = 0$. Корни этого уравнения $\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = -\dfrac{3}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ имеют отрицательные вещественные части. Следовательно, точка покоя данной системы асимптотически устойчива.

Исследовать на устойчивость точку покоя $O(0, 0, 0)$ систем:

894. а) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y + 5z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -3z; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y - z; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + 3y - z. \end{cases}$

§ 27. МЕТОД ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА

Метод функций Ляпунова состоит в непосредственном исследовании устойчивости положения равновесия системы

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

при помощи подходящим образом подобранной функции $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ — *функции Ляпунова*, причем делается это без предварительного нахождения решений системы

Ограничимся рассмотрением автономных систем

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

для которых $x_i \equiv 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, есть точка покоя.

Функция $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенная в некоторой окрестности начала координат, называется *знакоопределенной* (определенно-положительной или определенно-отрицательной), если она в области

$$|x_i| \leqslant h, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

где h — достаточно малое положительное число, может принимать значения только одного определенного знака и обращается в ноль лишь при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Так, в случае $n = 3$ функции

$$V = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \text{ и } V = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2$$

будут определенно-положительными, причем здесь величина $h > 0$ может быть взята сколько угодно большой.

Функция $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *знакопостоянной* (положительной или отрицательной), если она в области (2) может принимать значения только одного определенного знака, но может обращаться в ноль и при $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\neq 0$. Например, функция

$$V(x_1,\ x_2,\ x_3)=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2+x_3^2$$

будет знакопостоянной (положительной). В самом деле, функцию $V(x_1,\ x_2,\ x_3)$ можно записать так: $V(x_1,\ x_2,\ x_3)=(x_1+x_2)^2+x_3^2$, откуда видно, что она обращается в ноль и при $x_1^2+x_2^2+x_3^2\neq 0$, а именно при $x_3=0$ и любых x_1 и x_2 таких, что $x_1=-x_2$.

Пусть $V(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ есть дифференцируемая функция своих аргументов и пусть $x_1,\ x_2\ \ldots,\ x_n$ являются некоторыми функциями времени, удовлетворяющими системе дифференциальных уравнений (1) Тогда для полной производной функции V по времени будем иметь:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\cdot\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}f_i(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n).\qquad(3)$$

Величина $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$, определяемая формулой (3), называется *полной производной функции V по времени*, составленной в силу системы уравнений (1).

Теорема 1 (теорема Ляпунова об устойчивости). *Если для системы дифференциальных уравнений* (1) *существует знакоопределенная функция* $V(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ *(функция Ляпунова), полная производная* $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ *которой по времени, составленная в силу системы* (1), *есть функция знакопостоянная, знака противоположного с V, или тождественно равная нулю, то точка покоя* $x_i=0$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, *системы* (1) *устойчива.*

Теорема 2 (теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости). *Если для системы дифференциальных уравнений* (1) *существует знакоопределенная функция* $V(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, *полная производная которой по времени, составленная в силу системы (1), есть также функция знакоопределенная, знака, противоположного с V, то точка покоя* $x_i=0$ *системы (1) асимптотически устойчива.*

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x.\end{cases}\qquad(4)$$

Выберем в качестве функции $V(x,\ y)$ функцию $V=x^2+y^2$. Эта функция определенно-положительная. Производная функции V в силу системы (4) равна

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2xy-2xy\equiv 0.$$

Из теоремы 1 следует, что точка покоя $O(0, 0)$ системы (4) устойчива. Однако асимптотической устойчивости нет: траектории системы (4) — окружности и они не стремятся к точке $O(0, 0)$ при $t \to +\infty$.

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y^3. \end{cases} \tag{5}$$

Беря опять $V(x, y) = x^2 + y^2$, найдем

$$\frac{dV}{dt} = 2x(y - x^3) + 2y(-x - 3y^3) = -2(x^4 + 3y^4).$$

Таким образом, $\dfrac{dV}{dt}$ есть определенно-отрицательная функция. В силу теоремы 2 точка покоя $O(0, 0)$ системы (5) устойчива асимптотически.

Общего метода построения функций Ляпунова нет. В простейших случаях функцию Ляпунова можно искать в виде

$$V(x, y) = ax^2 + by^2, \quad V(x, y) = ax^4 + by^4,$$

$$V(x, y) = ax^4 + by^2 \ (a > 0, \ b > 0) \text{ и т. д.}$$

Пример 3. С помощью функции Ляпунова исследовать на устойчивость тривиальное решение $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 2y + x^2y^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - \dfrac{y}{2} - \dfrac{x^3y}{2}. \end{cases}$$

Решение. Будем искать функцию Ляпунова в виде $V = ax^2 + by^2$, где $a > 0$, $b > 0$ — произвольные параметры Имеем

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 2ax(-x - 2y + x^2y^2) + 2by\left(x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x^3y\right) = -(2ax^2 + by^2) + (2xy - x^3y^2)(b - 2a).$$

Полагая $b = 2a$, получим, что $\dfrac{dV}{dt} = -2a(x^2 + y^2) \leqslant 0$. Таким образом, при всяком $a > 0$ и $b = 2a$ функция $V = ax^2 + 2ay^2$ будет определенно-положительной, а ее производная $\dfrac{dV}{dt}$, составленная в силу данной системы, является определенно-отрицательной. Из теоремы 2 Ляпунова следует, что тривиальное решение $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ данной системы устойчиво асимптотически.

Если бы в указанной выше форме функцию $V(x, y)$ не удалось найти, то ее следовало бы поискать в форме $V=ax^4+by^4$ или $V=ax^4+by^2$ и т. д.

Теорема 3 (теорема Ляпунова о неустойчивости). *Пусть для системы дифференциальных уравнений (1) существует дифференцируемая в окрестности начала координат функция* $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ *такая, что* $V(0, 0, ..., 0)=0$. *Если ее полная производная* $\frac{dV}{dt}$, *составленная в силу системы (1), есть определенно-положительная функция и сколь угодно близко от начала координат имеются точки, в которых функция* $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ *принимает положительные значения, то точка покоя* $x_i=0$, $i=1, 2, ..., n$, *неустойчива.*

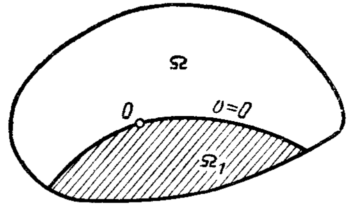

Рис. 43

Теорема 4 (теорема Четаева о неустойчивости). *Пусть для системы дифференциальных уравнений (1) существует непрерывно дифференцируемая в некоторой окрестности точки покоя* $x_i=0$, $i=1, 2, ..., n$, *функция* $v(x_1, x_2, ..., x_n)$, *удовлетворяющая в некоторой замкнутой окрестности точки покоя условиям:* 1) *в сколь угодно малой окрестности* Ω *точки покоя* $x_i=0$, $i=1, 2, ..., n$, *существует область* Ω_1, *в которой* $v(x_1, x_2, ..., x_n)>0$, *причем* $v=0$ *в тех граничных точках* Ω_1, *которые являются внутренними для* Ω (рис. 43),

2) точка покоя $O(0, 0, .., 0)$ *является граничной точкой области* Ω_1;

3) *в области* Ω_1 *производная* $\frac{dv}{dt}$, *составленная в силу системы* (1), *определенно-положительная.*

Тогда точка покоя $x_i=0$, $i=1, 2, ..., n$, *системы (1) неустойчива.*

Пример 4. Исследовать на устойчивость точку покоя $x=0$, $y=0$ системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=x, \\ \frac{dy}{dt}=-y. \end{cases}$$

Решение. Возьмем функцию $v(x, y)=x^2-y^2$. Тогда

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt}=2x^2+2y^2$$

есть функция определенно-положительная. Так как сколь угодно близко к началу координат найдутся точки, в которых $v>0$ (например, $v=x^2>0$ вдоль прямой $y=0$), то выполнены все условия теоремы 3 и точка покоя $O(0, 0)$ неустойчива (седло).

Пример 5. Исследовать на устойчивость точку покоя $x=0$, $y=0$ системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y^3 + x^5, \\ \dfrac{dy}{dt} = x^3 + y^5. \end{cases}$$

Решение. Функция $v=x^4-y^4$ удовлетворяет условиям теоремы Четаева:

1) $v>0$ при $|x|>|y|$;

2) $\dfrac{dv}{dt} = 4(x^8 - y^8)$ — определенно-положительная в области, $|x|>|y|$.

Следовательно, точка покоя $x=0$, $y=0$ неустойчива.

Исследовать на устойчивость тривиальные решения систем:

895. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3y - 2x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 3y^3. \end{cases}$ **896.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -xy^4, \\ \dfrac{dy}{dt} = x^4y. \end{cases}$

897. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2xy^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2y + 4x^2y. \end{cases}$

898. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^3}{4}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - \dfrac{y}{2} - \dfrac{1}{4}y^3. \end{cases}$

899. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y^3. \end{cases}$

900. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + x^2y^2 - \dfrac{1}{4}x^5, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - x^3y - \dfrac{1}{2}y^3. \end{cases}$

901. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x, \\ \dfrac{dy}{dt} = -y. \end{cases}$

902. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = -y - y^3. \end{cases}$

903. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = xy^4 - 2x^3 - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x^2y^3 - y^7 + 2x. \end{cases}$

904. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$

905. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^5 + y^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = x^3 - y^5. \end{cases}$

906. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = xy - x^3 + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x^4 - x^2y - x^3. \end{cases}$

907. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^3 + 2xy^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = x^2y. \end{cases}$

908. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2y - x(x-y)^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - \dfrac{3}{2}y(x-y)^2. \end{cases}$

909. Пусть $v = v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дважды непрерывно дифференцируемая определенно-положительная функция такая, что

$$v(0) = \frac{\partial v(0)}{\partial x_1} = \cdots = \frac{\partial v(0)}{\partial x_n} = 0.$$

Исследовать на устойчивость тривиальное решение $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -\dfrac{\partial v}{\partial x_1}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = -\dfrac{\partial v}{\partial x_n}. \end{cases}$$

§ 28. УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

Пусть имеем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

и пусть $x_i \equiv 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, есть точка покоя системы (1), т. е. $f_i(0, 0, \ldots, 0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Будем предполагать, что функции $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дифференцируемы в начале координат достаточное число раз.

Разложим функции f_i по формуле Тейлора по x в окрестности начала координат:

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + R_i(x_1, x_2 \ldots x_n),$$

здесь $a_{ij} = \dfrac{\partial f_i(0, 0, \ldots, 0)}{\partial x_j}$, а R_i — члены второго порядка малости относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Тогда исходная система (1) запишется так:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + R_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots n. \tag{2}$$

Вместо системы (2) рассмотрим систему

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \ (i = 1, 2, \ldots, n), \ (a_{ij} = \text{const}), \tag{3}$$

называемую *системой уравнений первого приближения* для системы (1).

Справедливы следующие предложения.

1. *Если все корни характеристического уравнения*

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

имеют отрицательные вещественные части, то нулевые решения $x_i \equiv 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, системы (3) и системы (2) асимптотически устойчивы.

2. Если хотя бы один корень характеристического уравнения (4) имеет положительную вещественную часть, то нулевое решение системы (3) и системы (2) неустойчиво.

Говорят, что в случаях 1 и 2 возможно *исследование на устойчивость по первому приближению*.

В критических случаях, когда вещественные части всех корней характеристического уравнения (4) неположительны, причем вещественная часть хотя бы одного корня равна нулю, исследование на устойчивость по первому приближению, вообще говоря, невозможно (начинают влиять нелинейные члены R_i).

Пример 1. Исследовать на устойчивость по первому приближению точку покоя $x=0$, $y=0$ системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - 5y^2, \\ \dot{y} = 3x + y + \dfrac{x^3}{2} \end{cases} \quad \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}\right). \tag{5}$$

Решение. Система первого приближения

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + y; \end{cases} \tag{6}$$

нелинейные члены удовлетворяют нужным условиям: их порядок больше или равен двум. Составим характеристическое уравнение для системы (6):

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или } \lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0. \tag{7}$$

Корни характеристического уравнения (7) $\lambda_1 = \dfrac{3+\sqrt{13}}{3}$, $\lambda_2 = \dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$ вещественные и $\lambda_1 > 0$. Следовательно, нулевое решение $x=0$, $y=0$ системы (5) неустойчиво.

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - y^3. \end{cases} \tag{8}$$

Точка покоя $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ системы (8) асимптотически устойчива, так как для этой системы функция $v = x^2 + y^2$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. В частности,

$$\frac{dv}{dt} = 2x(y - x^3) + 2y(-x - y^3) = -2(x^4 + y^4) \leqslant 0.$$

В то же время точка покоя $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y^3 \end{cases} \tag{9}$$

неустойчива в силу теоремы Четаева [20]: взяв $v = x^2 + y^2$, будем иметь $\dfrac{dv}{dt} = 2(x^4 + y^4) \geqslant 0$.

Системы (8) и (9) имеют одну и ту же систему первого приближения

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x. \end{cases} \tag{10}$$

Характеристическое уравнение для системы (10)

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или } \lambda^2 + 1 = 0$$

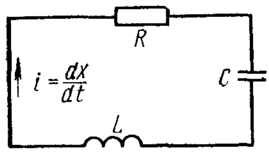

Рис. 44

имеет чисто мнимые корни, так что действительные части корней характеристического уравнения равны нулю.

Для системы первого приближения (10) начало координат является центром. Системы (8) и (9) получаются малым возмущением правых частей системы (10) в окрестности начала. Однако эти малые возмущения приводят к тому, что замкнутые траектории превращаются в спирали, в случае (8) приближающиеся к началу координат и образующие в точке $O(0, 0)$ устойчивый фокус, а в случае (9) — удаляющиеся от начала координат и образующие в точке $O(0, 0)$ неустойчивый фокус. Таким образом, в критическом случае нелинейные члены могут влиять на устойчивость точки покоя.

Пример 3. Рассмотрим замкнутый контур с нелинейными элементами (рис. 44); уравнение контура

$$L \frac{d^2x}{dt^2} + R \frac{dx}{dt} + \frac{1}{C} x + g\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0. \tag{11}$$

Здесь x — заряд конденсатора и, следовательно, $\frac{dx}{dt}$ — ток в цепи; R — сопротивление; L — индуктивность; C — емкость; $g\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ — нелинейные члены, имеющие степень не ниже второй, $g(0, 0) = 0$. Уравнение (11) эквивалентно системе

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{1}{LC} x - \dfrac{R}{L} y - \dfrac{1}{L} g(x, y), \end{cases} \tag{12}$$

для которой начало координат $O(0, 0)$, есть точка покоя.

Рассмотрим систему первого приближения

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{1}{LC} x - \dfrac{R}{L} y. \end{cases} \tag{13}$$

Характеристическое уравнение для системы (13) имеет вид

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \lambda^2 + \frac{R\lambda}{L} + \frac{1}{LC} = 0. \qquad (14)$$

Если $\frac{R^2}{L^2} < \frac{4}{LC}$, т. е. $R^2 < \frac{4L}{C}$, то уравнение (14) имеет комплексные корни с отрицательной действительной частью $p = -\frac{R}{4L}$ и, значит, начало координат $O(0, 0)$ для систем (13) и (12) асимптотически устойчиво.

Если $R^2 > \frac{4L}{C}$, то начало координат также асимптотически устойчиво (все параметры R, L, C положительны)

Асимптотическая устойчивость точки покоя видна из физических соображений: при положительном омическом сопротивлении с возрастанием t ток неизбежно исчезает.

Исследовать на устойчивость по первому приближению нулевое решение $x=0$, $y=0$ следующих систем:

910. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y - \sin y^2, \\ \dot{y} = -x - 3y + x\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right). \end{cases}$

911. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + x^2 \sin y, \\ \dot{y} = -x - 4y + 1 - \cos y^2. \end{cases}$

912. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 8\sin^2 y, \\ \dot{y} = x - 3y + 4x^3. \end{cases}$

913. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 22\sin y + x^2 - y^3, \\ \dot{y} = \sin x - 5y + e^{x} - 1. \end{cases}$

914. $\begin{cases} \dot{x} = -10x + 4e^{y} - 4\cos y^2, \\ \dot{y} = 2e^{x} - 2 - y + x^4. \end{cases}$

915. $\begin{cases} \dot{x} = 7x + 2\sin y - y^4, \\ \dot{y} = e^{x} - 3y - 1 + \frac{5}{2}x^2. \end{cases}$

916. $\begin{cases} \dot{x} = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\sin 2y - x^3 y, \\ \dot{y} = -y - 2x + x^4 - y^7. \end{cases}$

917. $\begin{cases} \dot{x} = \frac{5}{2} x e^{x} - 3y + \sin x^2, \\ \dot{y} = 2x + y e^{-\frac{y^2}{2}} - y^4 \cos x. \end{cases}$

918. $\begin{cases} \dot{x} = \frac{3}{4} \sin x - 7y (1 - y)^{\frac{1}{3}} + x^3, \\ \dot{y} = \frac{2}{3} x - 3y \cos y - 11y^5. \end{cases}$

919. $\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{4} (e^x - 1) - 9y + x^4, \\ \dot{y} = \frac{1}{5} x - \sin y + y^{14}. \end{cases}$

920. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + y \cos y - \frac{x^3}{3}, \\ \dot{y} = 3x + 2y + \frac{x^4}{12} - y^3 e^y. \end{cases}$

921. $\begin{cases} \dot{x} = 4y - x^3, \\ \dot{y} = -3x - y^3. \end{cases}$

922. $\begin{cases} \dot{x} = -2y - x^5, \\ \dot{y} = 2x - y^5. \end{cases}$

§ 29. УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО ОТНОШЕНИЮ К ИЗМЕНЕНИЮ ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим дифференциальные уравнения

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

$$y' = f(x, y) + \Theta(x, y), \tag{2}$$

где функции $f(x, y)$ и $\Theta(x, y)$ непрерывны в замкнутой области $\overline{G}$ плоскости xOy и функция $f(x, y)$ имеет в этой области непрерывную частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$;

Пусть в области $\overline{G}$ выполняется неравенство $|\Theta(x, y)| \leqslant \varepsilon$. Если $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$ есть решения уравнений (1) и (2) соответственно,