ЧЕТЫРНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Предел функции.

Определение предела функции.

Число A называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к a (или в точке a), если для любого наперед заданного положительного числа ε (хотя бы и как угодно малого) можно найти такое положительное число δ, что для всех значений x, входящих в область определения функции, ***отличных от a*** *и удовлетворяющих условию $|x-a|<\delta$, имеет место неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.*

Короче: число A называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, если выполнение неравенства $0<|x-a|<\delta$ влечет за собой выполнение неравенства $|f(x)-A|<\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ — наперед заданное число, а δ соответствующим образом подобрано.

В определении предела функции следует обратить внимание на то, что вовсе не требуется, чтобы функция $f(x)$ была непременно определена в точке a. Для того чтобы функция $f(x)$ имела возможность стремиться к пределу при $x\to a$, необходимо лишь чтобы в областн ее существования были точки, как угодно близкие к a и отличные от a.

Прежде чем приступить к непосредственному вычислению предела функций, приведем основные сведения из теории:

14,1. *Бесконечно малые и бесконечно большие функции.*

a) Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x\to a$, если

$$\lim_{x\to a} f(x)=0. \tag{14,1}$$

b) Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x\to a$ если имеет место одно из равенств

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty;\quad \lim_{x\to a} f(x)=+\infty;\quad \lim_{x\to a} f(x)=-\infty.$$

c) Функция $f(x)$ называется ограниченной при $x\to a$, если существует такое положительное число A, что для всех значений x из окрестности числа a выполняется неравенство $|f(x)|\leqslant A$.

14,2. *Свойства бесконечно малых функций.*

a) Если функция $f(x)$ бесконечно мала при $x\to a$, то и $-f(x)$ также бесконечно мала при $x\to a$.

b) Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ бесконечно малы при $x\to a$, то сумма их, а также и разность их: $f_1(x)+f_2(x)$ и $f_1(x)-f_2(x)$ бесконечно малы при $x\to a$ (это утверждение распространяется на любое фиксированное число функций).

c) Если при $x \to a$ функция $f(x)$ бесконечно мала, а функция $\varphi(x)$ — ограничена, то их произведение $f(x)\varphi(x)$ есть функция бесконечно малая.

14,3. *Свойства бесконечно больших функций.*

Если при $x \to a$ функция $f(x)$ имеет конечный предел ($\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$), а функция $\varphi(x)$ — бесконечно велика ($\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \infty$), то

a) сумма их — бесконечно велика, т. е. $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + \varphi(x)] = \infty$, предел отношения $f(x)$ к $\varphi(x)$ равен нулю:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0.$$

b) если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ $(b > 0)$, а $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$, причем $\varphi(x)$ положительна в окрестности точки a, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = +\infty$.

c) При положительном k, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, то

$$\lim_{x\to a} [kf(x)] = +\infty,$$

d) Произведение двух бесконечно больших функций есть функция бесконечно большая, т. е. если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \infty$, то и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

14,4. *Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями:*

a) Если $f(x)$ при $x \to a$ — бесконечно большая функция, то функция $\frac{1}{f(x)}$ бесконечно мала.

b) Если при $x \to a$ функция $\varphi(x)$ бесконечно мала, то функция $\frac{1}{\varphi(x)}$ — бесконечно большая, причем предполагается, что в окрестности точки a функция $\varphi(x)$ в нуль не обращается.

14,5. *Правила предельного перехода.*

a) Еули при $x \to a$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют конечные пределы, то и алгебраическая сумма их $f(x) \pm \varphi(x)$ имеют предел, который равен сумме их пределов, т. е. если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, а $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = b_1$, то $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm \varphi(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = b \pm b_1$.

Короче (но не совсем точно): предел алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме пределов этих функций.

b) Если при $x \to a$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют пределы, то их произведение $f(x)\varphi(x)$ также имеет предел, который равен *произведению их пределов, т. е. если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, *а* $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = b_1$, *то* $\lim\limits_{x\to a} f(x)\ \varphi(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = bb_1$.

Короче (но не совсем точно): предел произведения двух функций равен произведению пределов этих функций. Свойства a) и b) распространяются на любое фиксированное число функций.

c) Если при $x \to a$ *функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *имеют пределы и предел функции* $\varphi(x)$ *не равен нулю, то предел их частного существует и равен частному от деления их пределов, т. е. если*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \text{ а } \lim_{x\to a} \varphi(x) = b_1 \ (b_1 \neq 0),$$

то

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)} = \frac{b}{b_1}.$$

Короче (но не совсем точно): предел частного равен частному пределов, если предел знаменателя не равен нулю.

14,6. *Предел целой рациональной функции.*

Если

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

то

$$\lim_{x\to a} P(x) = P(a), \tag{14,2}$$

т. е. ***при отыскании предела целой рациональной функции можно в аналитическом выражении функции заменить аргумент его предельным значением.***

14,7. *Предел дробно-рациональной функции.*

Если

$$F(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \cdots + b_{m-1}x + b_m} = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

то

$$\lim_{x\to a} F(x) = \frac{P(a)}{Q(a)} = F(a), \text{ если } Q(a) \neq 0, \tag{14,3}$$

т. е. ***при отыскании предела дробно-рациональной функции можно в аналитическом выражении функции заменить аргумент его предельным значением, если при этом предельном значении знаменатель не обращается в нуль.***

Задача **14,1.** Найти $\lim\limits_{x\to 3} (x^2 - 7x + 4)$.

Решение. Функция $f(x) = x^2 - 7x + 4$ — целая рациональная. Для отыскания ее предела применима формула (14,2). Заменим в аналитическом выражении функции x его предельным значением и получим

$$\lim_{x\to 3}(x^2-7x+4)=3^2-7\cdot 3+4=-8.$$

Задача 14,2 (для самостоятельного решения). Найти

$$1)\ \lim_{x\to 2}(2x^3-7x^2+4x+2);\qquad 2)\ \lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{2}x^3-x+2\right).$$

Ответ. 1) -2, 2) 30.

Указание. Воспользоваться формулой (14,2).

Задача 14,3. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+x+2}{x^2+2x+8}$.

Решение. Здесь отыскивается предел дробно-рациональной функции. Прежде чем применить (14,3), надо проверить, не обращается ли в нуль знаменатель дроби при $x=3$. Проверяем: $3^2+2\cdot 3+8=23\neq 0$:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x+2}{x^2+2x+8}=\frac{3^2+3+2}{3^2+2\cdot 3+8}=\frac{14}{23}.$$

Задача 14,4 (для самостоятельного решения). Найти пределы:

$$1)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x+4};\quad 2)\ \lim_{x\to -1}\frac{x^2-x+1}{2x^3-x^2+x+2}.$$

Указания: 1) Проверить, что знаменатель дроби в первом примере при $x=1$, а во втором при $x=-1$ не обращается в нуль; 2) воспользоваться формулой (14,3).

Ответ. 1) 0; 2) $-\frac{3}{2}$.

Задача 14,5. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$.

Решение. Знаменатель дроби $\frac{x^3-8}{x-2}$ обращается в нуль при $x=2$, а потому функция $f(x)=\frac{x^3-8}{x-2}$ при $x=2$ не существует.

Теорему о пределе дроби (14,5 п. *c*) применить нельзя, так как предел знаменателя равен нулю. По той же причине нельзя применить и формулу (14,3). Но определение предела функции содержит существенную оговорку: при отыскании предела функции $f(x)$ при $x\to a$ значение функции $f(a)$ при $x=a$ может не рассматриваться. От функции $f(x)$ это определение не требует, чтобы точка $x=a$ входила в область существования функции. *Поэтому значение $x=a$ может нами не приниматься во внимание.* Именно эти соображения и дадут возможность решить задачу. В нашем случае мы должны считать, что x, стремясь к 2, никогда не становится равным 2, а потому значение функции $\frac{x^3-8}{x-2}$ при $x=2$ нас не интересует.

При $x=2$ и числитель, и знаменатель дроби обращаются в нуль. Мы имеем в данном случае отношение двух бесконечно малых функций, о котором без специального исследования ничего определенного сказать нельзя. Для решения задачи разделим числитель и знаменатель дроби $\frac{x^3-8}{x-2}$ на $x-2$. Мы имеем право это сделать потому, что значение $x=2$ не рассматривается и, значит, $x-2 \neq 0$

Если бы указанной оговорки в определении предела функции не было и мы должны были бы рассматривать и значение $x=2$, то разделить числитель и знаменатель дроби на $x-2$ мы не смогли бы, так как такое деление означало бы деление числителя и знаменателя дроби на нуль, что, конечно, недопустимо. После сокращения дроби на $x-2$ получим

$$\frac{x^3-8}{x-2}=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=x^2+2x+4,$$

и нам придется отыскивать предел не данной функции, а функции x^2+2x+4. Тогда перед учащимся должен возникнуть такой вопрос: тождественны ли функции $\frac{x^3-8}{x-2}$ и x^2+2x+4. Этот вопрос имеет положительный ответ: функции тождественны, если не рассматривать значения $x=2$. Следует иметь в виду, что две функции тождественны, если они удовлетворяют таким двум требованиям:

1) их области существования совпадают и

2) при одном и том же значении аргумента, взятом из области существования функции, численные значения функций равны.

В нашем случае эти два требования будут выполнены, если не рассматривать значения $x=2$, но ведь оно и не рассматривается. Таким образом,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)=$$
$$=2^2+2\cdot 2+4=12,$$

так как функция x^2+2x+4 — целая рациональная функция и для определения ее предела на основании формулы (14,2) следует в аналитическом выражении функции заменить аргумент его предельным значением.

Можно указать такое

***Правило.* Для того чтобы определить предел дробно-рациональной функции в случае, когда при $x \to a$ числитель и знаменатель дроби имеют пределы, равные нулю, надо числитель и знаменатель дроби разделить на $x-a$ и перейти к пределу.**

Если и после этого числитель и знаменатель новой дроби имеют пределы, равные нулю при $x \to a$, то надо произвести повторное деление на $x-a$ (это правило основывается на известном из элементарной алгебры следствии из теоремы Безу, согласно котерому, если многочлен обращается в нуль при $x=a$, то он делится без остатка на $x-a$).

Теперь для самостоятельного решения будет предложен ряд задач на определение предела дробно-рациональной функции.

Задача 14.6 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{2x^2-9x+9}.$$

Указание. При $x=3$ числитель и знаменатель дроби — функции бесконечно малые, пределы их равны нулю. Об их отношении без специального исследования ничего определенного сказать нельзя. Теорему 14,5 п. c о пределе дроби применить нельзя, так как предел знаменателя равен нулю. Следует применить указанное правило; разделить числитель и знаменатель дроби на $x-3$. Повторить рассуждения предыдущей задачи о допустимости такого деления.

Ответ. $\frac{7}{3}$.

Следует не только запомнить тот или иной прием, но главное — понять, на чем основано его применение, и каждое действие проводить совершенно сознательно, а не автоматически, «по правилам». Применяя правило, надо понимать те положения, из которых оно выведено.

Задача 14,7 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2}.$$

Указание. Здесь опять-таки функции, стоящие в числителе и знаменателе дроби, бесконечно малы при $x\to 1$. Для решения вопроса о пределе их отношения следует разделить числитель и знаменатель дроби на $x-1$. Полученные после этого деления функции при $x\to 1$ будет опять-таки бесконечно малыми. Снова каждую из них следует разделить на $x-1$. Этим указанием воспользуетесь и при решении двух следующих задач.

Ответ. $\frac{2}{3}$

Задача 14,8 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^3-6x^2}{4x^5+2x^3+x^2}.$$

Ответ. -6.

Задача 14 4 (для самостоятельного решения).

$$\text{Найти} \lim_{x\to -3}\frac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3-3x^2-45x-81}.$$

Ответ. $\frac{1}{3}$.

Задача 14,10. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$ (m и n — целые положительные числа).

Решение. При $x\to 1$ числитель и знаменатель дроби имеют предел, равный нулю, а поэтому это функции бесконечно малы. Для решения вопроса о пределе их отношения следует числитель и знаменатель дроби разделить на $x-1$. Допустимость такого деления подробно была объяснена в задаче 14,5. Повторяем, что x, стремясь к 1, не становится равным 1, а потому $x-1\neq$ $\neq 0$, и деление на $x-1$ имеет смысл.

Функция $\frac{x^m-1}{x^n-1}$ при $x=1$ не существует, но значение $x=1$ нашему рассмотрению и не должно подлежать. Воспользуемся известной формулой алгебры

$$a^m-b^m=(a-b)(a^{m-1}+a^{m-2}b+\cdots+ab^{m-2}+b^{m-1}). \quad (14,4)$$

Полагая здесь $a=x$, а $b=1$, в нашем случае получим

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}=$$

$$=\frac{\overbrace{1+1+1+\cdots+1}^{m\ \text{раз}}}{\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n\ \text{раз}}}=\frac{m}{n}.$$

Задача 14,11. Найти $\lim\limits_{x\to -1}\frac{1+\sqrt[7]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$.

Решение. При $x\to -1$ числитель и знаменатель дроби имеют пределы, равные нулю, а потому это функции — бесконечно малые. Чтобы можно было применить формулу (14,4), с помощью которой была решена предыдущая задача, следует сделать подстановку $x=y^{35}$, где показатель степени 35 — наименьшее кратное показателей корней.

Если $x=y^{35}$, то $\sqrt[7]{x}=y^5$. а $\sqrt[5]{x}=y^7$, и тогда $\frac{1+\sqrt[7]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}=\frac{1+y^5}{1+y^7}$ причем $y\to -1$, когда $x\to -1$, и задача перепишется так:

$$\lim_{x\to -1}\frac{1+\sqrt[7]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}=\lim_{y\to -1}\frac{1+y^5}{1+y^7}.$$

Теперь следует разделить числитель и знаменатель дроби на $1+y$ применить формулу (14,3).

Ответ. $\frac{5}{7}$.

Задача 14, 12 (для самостоятельного решения). Найти:

$$1)\ \lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt[6]{x}}. \qquad 2)\ \lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}.$$

Ответ. 1) $\frac{3}{2}$; 2) $\frac{5}{3}$.

Задача 14, 13. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x-5}{x^2-7x+12}$.

Решение. При $x\to 3$ имеем
предел числителя:

$$\lim_{x\to 3}(2x-5)=1;$$

предел знаменателя:

$$\lim_{x\to 3}(x^2-7x+12)=0$$

Теорема (14,5 п. *с*.) о пределе дроби неприменима. Рассмотрим обратную дробь $\frac{x^2-7x+12}{2x-5}$, и ее предел при $x\to 3$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-7x+12}{2x-5}=\frac{0}{1}=0$$

(здесь теорема о пределе дроби применима, так как предел знаменателя $2x-5$ не равен нулю). Так как предел функции $\frac{x^2-7x+12}{2x-5}$ равен 0, то эта функция при $x\to 3$ бесконечно малая, а потому функция $\frac{2x-5}{x^2-7x+12}$ при $x\to 3$ — бесконечно большая, и тогда ее предел $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x-5}{x^2-7x+12}=\infty$ (мы воспользовались теоремой 14,4 пункт (*б*.).

Задача 14, 14 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x^1-3x+2}.$$

Ответ. ∞

Задача 14,15 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}.$$

Ответ. n.

Задача 14, 22 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x^2-4}\right).$$

Указание. Произвести вычитание дробей.
Ответ. ∞.

Задача 14, 16 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right).$$

Ответ. -1,

Указание. После приведения к общему знаменателю окажется, что при $x \to -1$ числитель и знаменатель — функции бесконечно малые. Воспользоваться указанным на стр. 304 правилом.

ПЯТНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Продолжение упражнений на нахождение предела функции.

Решим несколько задач на нахождение предела дробно-рациональной функции при $x \to \infty$.

Задача 15,1. Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3 + x^2 + 5}{3x^3 + x - 1}$.

Решение. Для того чтобы можно было применить теорему о пределе дроби, надо, чтобы числитель и знаменатель дроби имели пределы и чтобы предел знаменателя не был равен нулю. В данном случае эта теорема неприменима, так как пределы числителя и знаменателя дроби не существуют. При $x \to \infty$ и числитель, и знаменатель дроби функции бесконечно большие (см. теоремы 14,4 о свойствах бесконечно больших функций. Рекомендуется еще раз повторить эти теоремы). Значит, мы имеем дело с отношением двух бесконечно больших функций. Об этом отношении, так же как и об отношении двух бесконечно малых функций, ничего определенного без специального исследования сказать нельзя. Для решения задачи следует применить прием, знакомый из решения задачи 12,1 (полезно также возвратиться к задаче 12,8): дроби разделить на высшую степень x, встречающуюся в членах дроби, а после этого перейти к пределу.

Итак,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 + x^2 + 5}{3x^3 + x - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3}}{3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}} = \frac{\lim\limits_{x \to \infty}\left(2 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x \to \infty}\left(3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to \infty} 2 + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{5}{x^3}}{\lim\limits_{x \to \infty} 3 + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} - \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^3}} = \frac{2}{3},$$

так как при $x \to \infty$ $\frac{1}{x}$ — величина бесконечно малая, а потому и $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$ и $\frac{5}{x^3}$ — величины бесконечно малые (см. теоремы 14,4); $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}\frac{1}{x}$; $\frac{1}{x^3} = \frac{1}{x}\frac{1}{x}\frac{1}{x}$, а $\frac{5}{x^3} = 5\frac{1}{x^3}$ и пределы этих величин равны нулю, когда $x \to \infty$.

После деления числителя и знаменателя на x^3 оказалось возможным применить теорему о пределе дроби, так как теперь и числитель, и знаменатель дроби имеют пределы, равные соответственно 2 и 3, и предел знаменателя не равен нулю.

Для самостоятельного решения предлагается несколько аналогичных задач.

Задача 15,2 (для самостоятельного решения). Найти:

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{5x^4-7x^2+5x-4}{x^4+x^2+x+1};$$

$$2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{(x+3)(x+4)(x+5)}{x^4+x-11};$$

$$3)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x+2}{x^2-x+1};$$

$$4)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x^2+x}{2x^3+x-1};$$

$$5)\ \lim_{x\to\infty}\frac{7x^4+2x^3-14}{5x^4+x^3+x^2+x-1}.$$

Ответ. 1) 5; 2) 0; 3) ∞; 4) $\frac{3}{2}$; 5) $\frac{7}{5}$.

Задача 15.3 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{5x^2+1}-\frac{3x^2}{15x+1}\right).$$

Указание. Произвести вычитание дробей.

Ответ. $\frac{1}{75}$.

Задача 15,4 (Для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{2x^2-x+1}\right)^3.$$

Ответ. $\frac{1}{8}$.

Задача 15,5 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2-x}{x^2-3}-\frac{3x^3-4}{x^3-x}\right)^4.$$

Ответ. 16.

Решение остальных задач этого практического задания основано на применении теоремы:

При постоянном показателе степени можно переходить к пределу в основании степени при условии, что предел основания степени существует, т. е.

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^k=[\lim_{x\to a}f(x)]^k, \tag{15,1}$$

где k — постоянная величина (для случая, когда k — целое число, мы этой теоремой пользовались неоднократно, так как она прямо следует из теоремы о пределе произведения).

Из формулы (15,1) следует, что при любом нечетном m всегда

$$\lim_{x \to a} \sqrt[m]{f(x)} = \sqrt[m]{\lim_{x \to a} f(x)}. \qquad (15,2)$$

Если же m — четное число, то эта формула верна только тогда, когда функция $f(x)$ — неотрицательна, т. е. когда $f(x) \geqslant 0$.

Выполним сначала ряд простых упражнений на применение этой теоремы.

Задача 15,6. Найти: 1) $\lim\limits_{x \to 27} \sqrt[3]{x}$; $\lim\limits_{x \to -243} \sqrt[5]{x}$.

Решение. На основании формулы (15,2) имеем:

1) $\lim\limits_{x \to 27} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x \to 27} x} = \sqrt[3]{27} = 3$;

2) $\lim\limits_{x \to -243} \sqrt[5]{x} = \sqrt[5]{\lim\limits_{x \to -243} x} = \sqrt[5]{-243} = -3$.

Задача 15,7. Найти $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{2x^2 + 7}$.

Решение. $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{2x^2 + 7} = \sqrt{\lim\limits_{x \to 2} (2x^2 + 7)} = \sqrt{2 \cdot 2^2 + 7} =$
$= \sqrt{15}$.

Задача 15,8. Найти при нечетном m

1) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt[m]{x}$; 2) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt[m]{x}}$; 3) $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt[m]{x}$.

Решение. 1) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt[m]{x} = \sqrt[m]{\lim\limits_{x \to 0} x} = \sqrt[m]{0} = 0$

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt[m]{x}} = \lim\limits_{x \to \infty} \sqrt[m]{\frac{1}{x}} = \sqrt[m]{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x}} = \sqrt[m]{0} = 0$,

т. е. при $x \to \infty$ функция $\frac{1}{\sqrt[m]{x}}$ бесконечно мала;

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt[m]{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[m]{x}}} = \infty$,

так как по результатам второго примера этой задачи при $x \to \infty$ функция $\frac{1}{\sqrt[m]{x}}$ бесконечно мала, потому функция $\sqrt[m]{x}$ — бесконечно велика.

Задача 15,9. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$.

Решение. Когда $x \to 0$, числитель и знаменатель имеют своим пределом нуль, а потому они бесконечно малы:

$$\lim_{x \to 0} (\sqrt{1+x} - 1) = \sqrt{\lim_{x \to 0} (1+x)} - 1 = 1 - 1 = 0,$$

Для того чтобы решить вопрос о пределе их отношения, перенесем иррациональность в знаменатель, умножив для этого числитель и знаменатель дроби на $(\sqrt{1+x}+1)$. Будем иметь

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)}+1}=\frac{1}{2}.$$

Так как $x\to 0$, не становясь равным нулю, то деление на x числителя и знаменателя дроби возможно.

При решении задачи мы вместо предела функции $f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ отыскали предел функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$; здесь должен быть затронут вопрос о тождественности этих функций (подобно тому как этот вопрос возник при решении задачи 14,5). О функциях $\varphi(x)$ и $f(x)$ мы можем сказать, что они тождественны $(x\neq 0)$.

Таким образом, замена функции $f(x)$ при отыскании предела функцией $\varphi(x)$ является законной.

При отыскании предела дроби, содержащей иррациональные выражения, в большом числе случаев приходится с помощью преобразований переходить от заданной функции к другой функции, и у учащегося должен возникнуть вопрос о тождественности заданной функции и той, которая получается в результате преобразований. Во всех дальнейших примерах исследованием этого вопроса мы заниматься не будем, предоставляя это читателю.

Теперь, после решения этой задачи, укажем правило для решения задач, в которых требуется определить предел дроби, содержащей иррациональные выражения в случае, когда ее числитель и знаменатель — бесконечно малые функции, т. е. когда их пределы равны нулю.

Правило. **Чтобы найти предел дроби, содержащей иррациональные выражения в случае, когда предел и числителя, и знаменателя дроби равен нулю, надо перенести иррациональность из числителя в знаменатель или из знаменателя в числитель и после этого сделать необходимые упрощения, (приведение подобных членов, сокращение и т. д.) и перейти к пределу.**

Задача 15, 10. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$.

Решение. При $x\to 2$ числитель и знаменатель дроби имеют предел, равный нулю. Перенесем иррациональность в знаменатель, для чего умножим числитель и знаменатель на $\sqrt{x^2+5}+3$.

Получим

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5-9}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}=\frac{2+2}{3+3}=\frac{2}{3}.$$

Задача 15,11 (для самостоятельного решения). Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{6+x}-2}{x+2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+21}-5}{x-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x^2}-2}{1-x}$.

Ответ. 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{2}{5}$; 4) $\frac{1}{2}$;

Задача 15,12. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x+7}-\sqrt{2x+10}}{\sqrt{4x+13}-\sqrt{x+22}}$.

Решение. При $x\to 3$ числитель и знаменатель дроби имеют предел, равный нулю. В этой задаче придется сначала числитель и знаменатель дроби умножить на $\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10}$, а потом на $\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22}$ или сразу умножить числитель и знаменатель дроби на $(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10})(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22})$. Используя это указание, получаем:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x+7}-\sqrt{2x+10}}{\sqrt{4x+13}-\sqrt{x+22}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{3x+7}-\sqrt{2x+10})(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10})(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22})}{(\sqrt{4x+13}-\sqrt{x+22})(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10})(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(3x+7-2x-10)(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22})}{(4x+13-x-22)(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22})}{(3x-9)(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10})}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22}}{3(x-3)(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22}}{3(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10})}=\frac{5}{12}$$

Задача 15,13 (для самостоятельного решения). Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3}}$; 2) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{\sqrt{x^2+7}-\sqrt{7-3x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-9}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{3x^2-39}}{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{2x^2-19}}$; 4) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}-3}$.

Ответ. 1) $\frac{7}{12}$; 2) 0; 3) $\frac{23\sqrt{13}}{24}$; 4) $-\frac{3}{2}$.

Указание. В третьем примере одним из множителей числителя будет $3x^2-x-44$. Корни этого квадратного трехчлена $x_1=4$; $x_2=-\frac{11}{3}$, вследствие чего $3x^2-x-44=3(x-4)\left(x+\frac{11}{3}\right)$.

Задача 15,14. Найти $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}-1}{x-7}$.

Решение. Здесь и предел числителя, и предел знаменателя равен нулю. Перенесем иррациональность из числителя в знаменатель. Воспользуемся известной формулой алгебры $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3+b^3$. Положим $a=\sqrt[3]{x-6}$, $b=1$. Значит, для того, чтобы получить в числителе разность кубов, надо его умножить на $\sqrt[3]{(x-6)^2}+\sqrt[3]{x-6}+1$. Умножая и знаменатель на эту величину получаем

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt[3]{x-6}-1}{x-7}=\lim_{x\to 7}\frac{(\sqrt[3]{x-6}-1)(\sqrt[3]{(x-6)^2}+\sqrt[3]{x-6}+1)}{(x-7)(\sqrt[3]{(x-6)^2}+\sqrt[3]{x-6}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{x-6-1}{(x-7)(\sqrt[3]{(x-6)^2}+\sqrt[3]{x-6}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{x-7}{(x-7)(\sqrt[3]{(x-6)^2}+\sqrt[3]{x-6}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-6)^2}+\sqrt[3]{x-6}+1}=\frac{1}{1+1+1}=\frac{1}{3}.$$

Задача 15,15 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{3x+1}}{6x}.$$

Ответ. $-\frac{1}{9}$.

Задача 15,16 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt{4x-3}-1}.$$

Ответ. $-\frac{1}{6}$.

Задача 15,17 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x}{\sqrt[3]{6x-1}+\sqrt[3]{2x+1}}.$$

Ответ. $\frac{21}{8}$.

Теперь мы рассмотрим задачи, в которых требуется определить предел функции, содержащей корни в том случае, когда аргумент стремится к ∞ или к $\pm\infty$.

Задача 15,18. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x-2}-\sqrt{x})$.

Решение. Здесь непосредственно теорема 14,5 не может быть применена, так как при $x\to+\infty$ пределы слагаемых не существуют: мы имеем дело с разностью двух бесконечно больших величин, о которой ничего определенного без специального исследования сказать нельзя.

Умножим и разделим данное выражение на сопряженное с ним и получим

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x-2}-\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x-2}-\sqrt{x})(\sqrt{x-2}+\sqrt{x})}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2-x}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}=-2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}=0,$$

так как при $x\to+\infty$ знаменатель дроби, стоящей под знаком предела, есть функция бесконечно большая (см. задачу 15,8(3)), а потому дробь $\frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}$ есть величина бесконечно малая, а ее произведение на -2 есть также бесконечно малая величина.

Задача 15,19. Найти $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$. Когда $x\to+\infty$, выражение, стоящее в скобках, есть разность двух бесконечно больших величин, о которой без специального исследования нельзя сказать ничего определенного. Умножим и разделим функцию, стоящую под знаком предела, на выражение, сопряженное с $\sqrt{x^2+1}-x$, т. е. на $\sqrt{x^2+1}+x$, и получим

$$\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x^2+1-x^2)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2},$$

так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$.

Теперь рассмотрим случай, когда $x\to-\infty$. Выражение, стоящее в скобках, имеет в этом случае положительное значение и неограниченно возрастает по абсолютной величине, множитель же x, стоящий за скобкой, неограниченно возрастает по абсолютной величине, но сохраняет отрицательное значение. Поэтому все выражение

$x(\sqrt{x^2+1}-x)$ при $x\to-\infty$ неограниченно возрастает по абсолютной величине, сохраняя отрицательное значение и

$$\lim_{x\to-\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) = -\infty.$$

Задача 15,20 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\pm\infty} (\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-4}).$$

Ответ. При $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$ искомый предел равен 0.

Задача 15,21. Найти $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x+2}$.

Решение. 1) Рассмотрим сначала случай $x\to+\infty$:

$$\sqrt{x^2+4} = \sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)} = \sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}.$$

Так как $x>0$ при $x\to+\infty$, а мы рассматриваем арифметическое значение корня, то $\sqrt{x^2}=+x$ и $\sqrt{x^2+4}=+x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}$,

а потому $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{1+\frac{2}{x}} = 1.$

2) Пусть $x\to-\infty$. По-прежнему $\sqrt{x^2+4}=\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}$, но теперь $\sqrt{x^2}=-x$, так как $x<0$, а мы рассматриваем арифметическое значение корня, и $\sqrt{x^2+4}=-x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}$, а

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x+2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} = -\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{1+\frac{2}{x}} = -1.$$

Задача 15,22 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}).$$

Указание. Учесть, что при $x>0$ имеем $\sqrt{x^2}=x$, а при $x<0$ тот же $\sqrt{x^2}=-x$.

Ответ. При $x\to+\infty$ искомый предел равен $+1$, а при $x\to-\infty$ искомый предел равен -1.

Задача 15,23 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+2}-x).$$

Ответ. 0 при $x\to+\infty$; $+\infty$ при $x\to-\infty$.

Задача 15,24 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left[(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}\right].$$

Указание. Выражение, стоящее под знаком предела, умножить и разделить на $(x+1)^{\frac{4}{3}}+(x+1)^{\frac{2}{3}}\cdot(x-1)^{\frac{2}{3}}+(x-1)^{\frac{4}{3}}$, чтобы получить в числителе разность кубов. После упрощений под знаком предела будет находиться выражение

$$\frac{4x}{(x+1)^{\frac{4}{3}}+(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}+(x-1)^{\frac{4}{3}}}.$$

Знаменатель дроби представить в виде

$$x^{\frac{4}{3}}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{3}}+\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{3}}\right]$$

и сократить дробь на x.

Ответ. 0.

Задача 15,25 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[x^{\frac{4}{3}}-(x^2-1)^{\frac{2}{3}}\right].$$

Указание. Выражение, стоящее под знаком предела, умножить и разделить на $x^{\frac{8}{3}}+x^{\frac{4}{3}}(x^2-1)^{\frac{2}{3}}+(x^2-1)^{\frac{4}{3}}$ и полученную дробь сократить на x^2.

Ответ. 0.

ШЕСТНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Определение пределов тригонометрических функций и упражнения на использование предела $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

При определении предела тригонометрической функции можно независимую переменную заменить ее предельным значением, если оно принадлежит области существования функции:

$$\lim_{x\to a}\sin x=\sin a;\qquad \lim_{x\to a}\cos x=\cos a;\qquad \lim_{x\to a}\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} a;$$

$$\lim_{x\to a}\operatorname{ctg} x=\operatorname{ctg} a;\qquad \lim_{x\to a}\sec x=\sec a;\qquad \lim_{x\to a}\operatorname{cosec} x=\operatorname{cosec} a.$$

Примеры:

1) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \sin x = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$;

2) $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = \sin 0 = 0$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$;

4) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$.

5) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x$ — не существует, так как $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ нельзя приписать никакого числового значения.

Задача 16,1. Найти $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$.

Решение. На основании приведенного выше правила для отыскания предела тригонометрических функций $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, а потому, когда $x \to \frac{\pi}{2}$, $1 - \sin x \to 0$; $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos^2 x = \cos^2\frac{\pi}{2} = 0$ и мы имеем дело с отношением двух бесконечно малых функций. Требуется, как уже хорошо известно читателю, специальное исследование, чтобы решить вопрос о пределе Зная. что $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = (1 - \sin x)(1 + \sin x)$, имеем

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} =$$

$$= \frac{1}{1 + \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x} = \frac{1}{1+\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Задача 16,2 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{y \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos y - \sin y}{1 - \operatorname{tg}^2 y}.$$

Ответ. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Задача 16,3 (для самостоятельного решения). Найти:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 4\sin^2 x}{\cos 3x}.$$

Указание. Под знаком предела находится при $x \to \frac{\pi}{6}$ отношение двух бесконечно малых функций. Следует числитель разложить на множители:

$$1 - 4\sin^2 x = 4\left(\frac{1}{4} - \sin^2 x\right) = 4\left(\frac{1}{2} - \sin x\right)\left(\frac{1}{2} + \sin x\right).$$

Знаменатель дроби

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x = 4\cos x\left(\cos^2 x - \frac{3}{4}\right) =$$
$$= 4\cos x\left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Если под знаком предела имеется сумма или разность тригонометрических функций, часто бывает полезным преобразовать их в произведение по известным формулам тригонометрии.

Учесть, что $\frac{1}{2} = \sin 30°$; $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30°$.

Ответ. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Задача 16,4. Найти $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{\sqrt{\operatorname{tg} x} - \sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}{\sqrt[3]{\sin x} - \sqrt[3]{\sin\alpha}}$.

Решение. При $x \to \alpha$ и числитель, и знаменатель дроби — функции бесконечно малые:

$$\lim_{x\to\alpha}(\sqrt{\operatorname{tg} x} - \sqrt{\operatorname{tg}\alpha}) = \lim_{x\to\alpha}\sqrt{\operatorname{tg} x} - \lim_{x\to\alpha}\sqrt{\operatorname{tg}\alpha} = \sqrt{\lim_{x\to\alpha}\operatorname{tg} x} -$$
$$- \sqrt{\operatorname{tg}\alpha} = \sqrt{\operatorname{tg}\lim_{x\to\alpha} x} - \sqrt{\operatorname{tg}\alpha} = \sqrt{\operatorname{tg}\alpha} - \sqrt{\operatorname{tg}\alpha} = 0^*.$$

Аналогичные рассуждения провести и по отношению к знаменателю. Имеем

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{\sqrt{\operatorname{tg} x} - \sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}{\sqrt[3]{\sin x} - \sqrt[3]{\sin\alpha}} =$$
$$= \lim_{x\to\alpha}\frac{(\sqrt{\operatorname{tg} x} - \sqrt{\operatorname{tg}\alpha})(\sqrt{\operatorname{tg} x} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha})(\sqrt[3]{\sin^2 x} + \sqrt[3]{\sin\alpha\cdot\sin x} + \sqrt[3]{\sin^2\alpha})}{(\sqrt[3]{\sin x} - \sqrt[3]{\sin\alpha})(\sqrt{\operatorname{tg} x} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha})(\sqrt[3]{\sin^2 x} + \sqrt[3]{\sin\alpha\ \sin x} + \sqrt[3]{\sin^2\alpha})} =$$
$$= \lim_{x\to\alpha}\frac{(\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\alpha)(\sqrt[3]{\sin^2 x} + \sqrt[3]{\sin x\ \sin\alpha} + \sqrt[3]{\sin^2\alpha})}{(\sqrt{\operatorname{tg} x} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha})(\sin x - \sin\alpha)} =$$
$$= \lim_{x\to\alpha}\frac{\sqrt[3]{\sin^2 x} + \sqrt[3]{\sin\alpha\ \sin x} + \sqrt[3]{\sin^2\alpha}}{\sqrt{\operatorname{tg} x} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}\lim_{x\to\alpha}\frac{\sin(x-\alpha)}{\cos x\cos\alpha\, 2\cos\frac{x+\alpha}{2}\sin\frac{x-\alpha}{2}} =$$

---

* $\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, где k — любое целое число. Если не сделать этой оговорки, то, например, при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ будет $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$, а $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ не имеет числового смысла.

$$= \frac{3\sqrt[3]{\sin^2 \alpha}}{2\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}} \lim_{x \to \alpha} \frac{2 \sin \frac{x-\alpha}{2} \quad \cos \frac{x-\alpha}{2}}{\cos x \cos \alpha \, 2 \cos \frac{x+\alpha}{2} \sin \frac{x-\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{3}{2} \frac{\sqrt[3]{\sin^2 \alpha}}{2\sqrt{\operatorname{tg} \alpha} \quad \cos^3 \alpha}.$$

Задача 16,5 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - \sqrt[3]{\sin \alpha}}{\sqrt{\sin x} - \sqrt{\sin \alpha}}.$$

Ответ. $\frac{2}{3} \frac{\sqrt{\sin \alpha}}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 \alpha}} \frac{1}{\cos^3 \alpha}$.

При решении остальных задач этого практического занятия следует иметь в виду, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (16,1)$$

Задача 16,6. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin kx}{x}$, ($k$ — величина постоянная).

Решение. Иногда при отыскании предела полезно произвести замену переменной с тем, чтобы упростить отыскание предела и использовать уже известные пределы.

Если под знаком предела делается замена переменной, то все величины, входящие под знак предела должны быть выражены через эту новую переменную, и из равенства, выражающего зависимость между старой переменной и новой, должен быть определен предел новой переменной.

Для решения предложенной задачи сделаем такую подстановку: $kx = y$. Из этого равенства следует, что $y \to 0$, когда $x \to 0$, а $x = \frac{y}{k}$. Тогда $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin kx}{x} = \lim\limits_{y \to 0} \frac{\sin y}{\frac{y}{k}} = \lim\limits_{y \to 0} \frac{k \sin y}{y} = k \lim\limits_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = k$,

так как $\lim\limits_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$.

Следует запомнить, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin kx}{x} = k. \qquad (16,2)$$

Задача 16,7. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin kx}{\sin lx}$.

Решение. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin kx}{\sin lx} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{\sin kx}{x}}{\frac{\sin lx}{x}} = \frac{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin kx}{x}}{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin lx}{x}} = \frac{k}{l}$.

Мы разделили числитель и знаменатель дроби на x. Это можно было сделать, так как значение $x = 0$ не должно рассматриваться. При вычислении предела числителя и знаменателя последней дроби использована формула (16,2).

Задача 16,8 (для самостоятельного решения). Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 7x}$.

Ответ. $\frac{5}{6}$.

Задача 16,9. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} kx}{x}$.

Решение $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} kx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{\cos kx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos kx}=$

$$=k\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos kx}=k\frac{1}{\cos(\lim\limits_{x\to 0} kx)}=k\frac{1}{\cos 0}=k\frac{1}{1}=k.$$

Задача 16,10 (для самостоятельного решения). Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} kx}{\operatorname{tg} lx}$.

Указание. Числитель и знаменатель дроби разделить на x и перейти к пределу. Использовать решение предыдущей задачи.

Ответ. $\frac{k}{l}$.

Задача 16,11 (для самостоятельного решения). Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 \alpha x}{x^2}$.

Указание. Дробь, стоящую под знаком предела, записать так:

$$\frac{\sin^2 \alpha x}{x^2}=\frac{\sin \alpha x}{x}\frac{\sin \alpha x}{x}.$$

Использовать теорему о пределе произведения*.

Ответ. α^2.

Задача 16,12. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos mx}{x^2}$.

Решение. При $x\to 0$ числитель и знаменатель дроби — бесконечно малые функции. Воспользуемся тем, что $1-\cos mx=$ $=2\sin^2\frac{mx}{2}$ и тогда

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos mx}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{mx}{2}}{x^2}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{mx}{2}}{x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{mx}{2}}{x}=2\frac{m}{2}\frac{m}{2}=\frac{m^2}{2}$$

(мы использовали формулу (16,2). В нашем случае $k=\frac{m}{2}$).

Задача 16,13. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\operatorname{tg} x)$.

Решение. При $x\to\frac{\pi}{2}$ функции $\sec x$ и $\operatorname{tg} x$ — бесконечно большие функции; таким образом, под знаком предела находится

---

* Можно поступить и так: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\alpha x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2=\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2=\alpha^2$

разность двух бесконечно больших функций. Теорему (14,5a о пределе разности применить нельзя, так как не существует конечных пределов каждой из функций $\sec x$ и $\operatorname{tg} x$ при $x \to \frac{\pi}{2}$. Преобразуем эту разность так:

$$\sec x - \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{\cos x (1 + \sin x)} =$$

$$= \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x (1 + \sin x)} = \frac{\cos^2 x}{\cos x (1 + \sin x)} = \frac{\cos x}{1 + \sin x}.$$

После этого получаем

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sec x - \operatorname{tg} x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} = 0.$$

К последней дроби можно было применить теорему о пределе дроби, так как предел знаменателя равен 2, а числитель дроби имеет конечный предел 0.

Задача 16, 14 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos kx - \cos lx}{x^2}.$$

Указание. Числитель дроби равен $-2 \sin \frac{k+l}{2} x \cdot \sin \frac{k-l}{2} x$; использовать также формулу (16,2).

Ответ. $\frac{l^2 - k^2}{2}$.

Задача 16, 15 (для самостоятельного решения). Найти $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{ctg} x$.

Указание. При $x \to 0$ функция $\operatorname{ctg} x$ — бесконечно большая. а x — величина бесконечно малая. Значит, мы имéем произведение функции бесконечно большой на величину бесконечно малую и требуется специальное исследование, чтобы определить предел этого произведения.

Учесть, что $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, а поэтому $x \operatorname{ctg} x = x \frac{\cos x}{\sin x}$. На основании формулы (16, 1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$.

Ответ 1.

Задача 16, 16 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin (a + x) - \sin (a - x)}{x}.$$

Указание. $\sin (a + x) - \sin (a - x) = 2 \cos a \sin x$.

Ответ. $2 \cos a$.

Задача 16, 17 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin \left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2 \cos x}.$$

Указание. Представить числитель в виде

$$2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right),$$

а знаменатель

$$1-2\cos x = 2\left(\frac{1}{2}-\cos x\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\right) =$$

$$= -4\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right).$$

Сократить дробь и перейти к пределу

Ответ. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Задача 16, 18. Найти $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.

Решение. При $x\to 1$ не существует предела $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$, а потому нельзя применить теорему (14, 5 *в*) о пределе произведения. Сделаем в нашем примере подстановку: $1-x=y$. Когда $x\to 1$, то новая переменная $y\to 0$, так как $\lim\limits_{x\to 1} y = \lim\limits_{x\to 1}(1-x)=0$. Если $1-x=y$, то $x=1-y$; выражение, стоящее под знаком предела, перепишется так:

$$(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = y\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(1-y) = y\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}y\right) = y\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}y =$$

$$= y\frac{\cos\frac{\pi}{2}y}{\sin\frac{\pi}{2}y} = \frac{y}{\sin\frac{\pi}{2}y}\cos\frac{\pi}{2}y,$$

поэтому

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin\frac{\pi}{2}y}\lim_{y\to 0}\cos\frac{\pi}{2}y =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin\frac{\pi}{2}y}{y}} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}y}{y}\right)} = \frac{2}{\pi}.$$

Задача 16, 19 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}.$$

Указание. 1) $\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$. Преобразовать дробь к виду

$$\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3} = \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x} = \frac{1}{\cos x}\,\frac{\sin x}{x}\,\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Ответ. $\frac{1}{2}$.

Задача 16, 20 (для самостоятельного решения). Найти

$$1)\ \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{\cos x}; \qquad 2)\ \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{\sin x}.$$

Указания. 1) В первом примере умножить числитель и знаменатель дроби на $\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}$, сократить дробь и перейти к пределу. 2) Во втором примере перенести иррациональность в знаменатель, сократить дробь на $\sin x$ и перейти к пределу.

Ответ. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) 1.

Задача 16,21 (для самостоятельного решения). Найти

$$1)\ \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin 5x}{2x + \sin 3x}; \qquad 2)\ \lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x}; \qquad 3)\ \lim_{x \to 1} \frac{1 + \cos \pi x}{\operatorname{tg}^2 \pi x}.$$

Ответ. 1) $-\frac{4}{5}$; 2) 1; 3) $\frac{1}{2}$.

Указание. В первом примере числитель и знаменатель дрсби разделить на x, во втором положить $\arcsin x = z$, в третьем примере $1 + \cos\pi x = 2\cos^2\frac{\pi x}{2}$; $\operatorname{tg}\pi x = \frac{\sin \pi x}{\cos \pi x}$.

СЕМНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Число e.

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с числом e.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \qquad (17,1)$$

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e; \qquad (17,2)$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k; \qquad (17,3)$$

$$\lim_{x \to 0} (1 + kx)^{\frac{1}{x}} = e^k. \qquad (17,4)$$

Нам придется также пользоваться теоремой о переходе к пределу в показателе степени при постоянном основании. Эта теорема формулируется так: