$$=\left\{\lim_{m\to\infty}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2m}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2m}}}\right\}^{\lim\limits_{m\to\infty}\left(-2\sin^2\frac{x}{2m}\right)m}=e^{-2\lim\limits_{m\to\infty} m\sin^2\frac{x}{2m}}=1,$$

так как $\lim\limits_{m\to\infty} m\sin^2\frac{x}{2m}=\lim\limits_{m\to\infty}\frac{\sin^2\frac{x}{2m}}{\frac{1}{m}}=\lim\limits_{m\to\infty}\sin\frac{x}{2m}\lim\limits_{m\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{2m}}{\frac{1}{m}}$.

Если $m\to\infty$, то $\frac{x}{2m}\to 0$ и $\sin\frac{x}{2m}\to 0$.

Для вычисления второго предела $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{2m}}{\frac{1}{m}}$ сделаем подстановку $\frac{x}{2m}=z$, тогда $z\to 0$, когда $m\to\infty$ а $\frac{1}{m}=\frac{2z}{x}$, и получим, учитывая, что x — величина постоянная

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{2m}}{\frac{1}{m}}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{\frac{2z}{x}}=\frac{x}{2}\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=\frac{x}{2}\cdot 1=\frac{x}{2}$$

и, значит,

$$\lim_{m\to\infty} m\sin^2\frac{x}{2m}=0\cdot\frac{x}{2}=0,\text{ а } e^0=1.$$

Задача 17,24 (для самостоятельного решения). Найти $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

Ответ. e^{-1}.

Задача 17,25 (для самостоятельного решения). Найти $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

Ответ. $e^{-\frac{1}{2}}$.

ВОСЕМНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Вычисление пределов выражений, содержащих логарифмы и показательные функции.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Теорема. *Если существует предел* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ *и этот предел положителен* $(A>0)$, *то*

$$\lim_{x\to a}[\log_b f(x)]=\log_b[\lim_{x\to a}(f(x)] \qquad (18,1)$$

Короче (но менее точно): можно переходить к пределу под знаком логарифма.

Замечание. Требование теоремы о том, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ должен быть положительным, связано с тем, что число A в правой части формулы (18,1) стоит под знаком логарифма, а логарифмическая функция определена только для положительных значений аргумента.

Между десятичными и натуральными логарифмами существует связь, выражаемая формулой

$$\lg x = M \ln x, \tag{18,2}$$

где M — модуль перехода: $M = \lg e = \frac{1}{\ln 10} = 0{,}43\,429.$

Сначала выполним упражнения на непосредственное применение формулы (18,1).

Задача 18,1. Найти $\lim\limits_{x\to 9} \lg(x+1)$.

Решение. На основании формулы (18,1)

$$\lim_{x\to 9}\left[\lg(x+1)\right] = \lg\left[\lim_{x\to 9}(x+1)\right] = \lg 10 = 1.$$

Задача 18,2. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\frac{x^2+x+5}{x^2-2}$.

Решение. На основании формулы (18,1) можно записать, что

$$\lim_{x\to\infty}\left[\ln\frac{x^2+x+5}{x^2-2}\right] = \ln\left[\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+5}{x^2-2}\right] = \ln\underbrace{\left[\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}\right]}_{\text{числитель и знаменатель разделены на } x^2} =$$

$$= \ln 1 = 0.$$

Задача 18,3. Найти $\lim\limits_{x\to 4}\left[\ln\frac{x-4}{\sqrt{x+4}-\sqrt{8}}\right]$.

Решение. Воспользуемся опять формулой (18,1):

$$\lim_{x\to 4}\left[\ln\frac{x-4}{\sqrt{x+4}-\sqrt{8}}\right] = \ln\left[\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x+4}-\sqrt{8}}\right] =$$

$$= \ln\left[\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x+4}+\sqrt{8})}{(\sqrt{x+4}-\sqrt{8})(\sqrt{x+4}+\sqrt{8})}\right] =$$

$$= \ln\left[\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x+4}+\sqrt{8})}{x+4-8}\right] = \ln\left[\lim_{x\to 4}(\sqrt{x+4}+\sqrt{8})\right] =$$

$$= \ln 2\sqrt{8} = \ln 4\sqrt{2}.$$

Перейдем теперь к вычислению пределов, которые играют важную роль в дифференциальном исчислении.

Задача 18,4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=$

$=\ln\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln e=1.$

Результатом этой задачи нам придется часто пользоваться, а потому для ссылок запишем его отдельно:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1. \tag{18,3}$$

Получите самостоятельно более общий результат:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}=\alpha. \tag{18,3a}$$

Задача 18,5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$, считая, что a — положительная постоянная величина, не равная 1.

Решение. Сделаем подстановку:

$$a^x-1=z. \tag{18,4}$$

На основании указания стр. 319 мы должны: 1) величину x, стоящую под знаком предела, выразить через z и 2) определить предел новой переменной z, когда старая переменная $x\to 0$.

Из подстановки (18,4) следует, что $a^x=1+z$, $x\ln a=\ln(1+z)$; $x=\frac{\ln(1+z)}{\ln a}$, а $\lim\limits_{x\to 0}z=\lim\limits_{x\to 0}(a^x-1)=0$, т. е. при $x\to 0$ и $z\to 0$.

Теперь уже $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{z}{\frac{\ln(1+z)}{\ln a}}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{\ln a}{\frac{\ln(1+z)}{z}}=\frac{\ln a}{\lim\limits_{z\to 0}\frac{\ln(1+z)}{z}}=$

$=\ln a$, так как на основании (18,3) предел знаменателя равен 1, а предел $\lim\limits_{x\to 0}\ln a=\ln a$, ибо a, а вместе с ним $\ln a$ — величина постоянная. Итак,

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a. \tag{18,5}$$

Если в формуле (18,5) взять $x=\frac{1}{y}$, то $a^x=a^{\frac{1}{y}}$, $y=\frac{1}{x}$ и

$\lim\limits_{x\to 0}y=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$, и тогда $\lim\limits_{y\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{y}}-1}{\frac{1}{y}}=\ln a$, т. е.

$$\lim_{y\to\infty}y\left(a^{\frac{1}{y}}-1\right)=\ln a. \tag{18,6}$$

Если $y \to \infty$, принимая целые и положительные значения, то это равенство можно переписать так:

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1) = \ln a. \tag{18,7}$$

Задача 18,6. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{3^{2x}-1}$.

Решение. Решение этой задачи потребует некоторых искусственных преобразований для того, чтобы можно было использовать результаты двух предыдущих задач. Выражение, стоящее под знаком предела, умножим и разделим на x:

$$\frac{\ln(1+x)}{3^{2x}-1} = \frac{\ln(1+x)}{x}\frac{x}{3^{2x}-1} = \frac{\ln(1+x)}{x}\frac{1}{\frac{9^x-1}{x}}, \text{ так как } 3^{2x} = 9^x.$$

и теперь

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{3^{2x}-1} = \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\ln(1+x)}{x}}_{\substack{\text{Использовать}\\ \text{формулу (18,3)}}}\underbrace{\frac{1}{\frac{9^x-1}{x}}}_{\substack{\text{Использовать}\\ \text{формулу (18,5)}}} = \frac{1}{\ln 9}.$$

Задача 18,7 (для самостоятельного решения). Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{\operatorname{tg} x}-1}{x}$.

Указание. $\frac{3^{\operatorname{tg} x}-1}{x} = \frac{3^{\operatorname{tg} x}-1}{\operatorname{tg} x}\frac{\operatorname{tg} x}{x}$. При отыскании предела первого множителя положить $\operatorname{tg} x = z$ и воспользоваться результатом задачи 18,5.

Ответ. $\ln 3$.

Задача 18,8 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 1}(1+5\ln x)^{\frac{1}{\ln x}}.$$

Указание. Сделать подстановку $5\ln x = z$ и воспользоваться формулой (17,2).

Ответ. e^5.

Задача 18,9. (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}.$$

Указание. В числителе дроби отнять и прибавить 1, записать дробь в виде

$$\frac{a^x-1-b^x+1}{x} = \frac{a^x-1-(b^x-1)}{x} = \frac{a^x-1}{x} - \frac{b^x-1}{x}$$

и воспользоваться формулой (18,5).

Ответ. $\ln\frac{a}{b}$.

Задача 18,10 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{x}.$$

Ответ. $\alpha - \beta$.

Задача 18,11. Доказать, что если

$$\lim_{x \to a} [\ln f(x)] = A, \quad \text{то} \quad \lim_{x \to a} f(x) = e^A.$$

Доказательство. На основании того, что мы имеем право переходить к пределу под знаком логарифма, можно вместо $\lim\limits_{x \to a} [\ln f(x)]$ записать $\ln [\lim\limits_{x \to a} f(x)] = A$, т. е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = e^A$.

Итак, если $\lim\limits_{x \to a} [\ln f(x)] = A$, то

$$\lim_{x \to a} f(x) = e^A. \tag{18,8}$$

Задача 18,12. Найти $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{3}{x}}$.

Решение. Сделаем подстановку $(1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{3}{x}} = y$, откуда

$$\ln y = \frac{3}{x} \ln (1 + \operatorname{tg} x) \text{ и } \lim_{x \to 0} \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{3}{x} \ln (1 + \operatorname{tg} x) =$$

$$= 3 \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{\ln (1 + \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}}_{\mathrm{I}} \underbrace{\frac{\operatorname{tg} x}{x}}_{\mathrm{II}}.$$

При вычислении первого предела положить $\operatorname{tg} x = z$, использовать результат задачи 18,4; получится, что $\lim\limits_{x \to 0} (\ln y) = 3 \cdot 1 \cdot 1$, т. е. $\lim\limits_{x \to 0} (\ln y) = 3$, и на основании (18,8) $\lim\limits_{x \to 0} y = e^3$, а значит, $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{3}{x}} = e^3$.*

Задача 18,13 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \to 0} (1 + \sin x)^{\frac{5}{x}}.$$

Ответ. e^5.

---

* Задачу можно решить и иначе: $(1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{3}{x}} = (1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x} \frac{3 \operatorname{tg} x}{x}} = [(1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}]^{\frac{3 \operatorname{tg} x}{x}}$; $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{3}{x}} = [\lim\limits_{x \to 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}]^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{3 \operatorname{tg} x}{x}} = e^3$ (при вычислении предела в квадратной скобке положить $\operatorname{tg} x = z$, а $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$).

Задача 18,14 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}.$$

Указание. В числителе дроби заменить 1 на $\ln e$. Тогда выражение, стоящее под знаком предела, запишется так:

$$\frac{\ln x-1}{x-e}=\frac{\ln x-\ln e}{x-e}=\frac{\ln\frac{x}{e}}{x-e}=\ln\left(\frac{x}{e}\right)^{\frac{1}{x-e}},$$

и теперь

$$\lim_{x\to e}\ln\left(\frac{x}{e}\right)^{\frac{1}{x-e}}=\ln\lim_{x\to e}\left(\frac{x}{e}\right)^{\frac{1}{x-e}}=\ln\lim_{x\to e}\left[1+\frac{x}{e}-1\right]^{\frac{1}{x-e}}=$$

$$=\ln\lim_{x\to e}\left(1+\frac{x-e}{e}\right)^{\frac{e}{x-e}\cdot\frac{1}{e}}=\ln\left[\lim_{x\to e}\left(1+\frac{x-e}{e}\right)^{\frac{e}{x-e}}\right]^{\frac{1}{e}}=\ln e^{\frac{1}{e}}=\frac{1}{e}.$$

Ответ. $\frac{1}{e}$.

ДЕВЯТНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Сравнение бесконечно малых величин.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ — *бесконечные малые функции при* $x\to a$, т. е. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$, причем a может быть как числом, так и одним из символов $+\infty$, $-\infty$, ∞. Тогда имеют место приводимые ниже определения.

Определение 1. *Если* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0$, *то функция* $f(x)$ *называется бесконечно малой функцией высшего порядка малости, по сравнению с функцией* $\varphi(x)$, *а функция* $\varphi(x)$ *называется бесконечно малой функцией низшего порядка малости, по сравнению с функцией* $f(x)$.

Определение 2. *Если* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\infty$, *то функция* $f(x)$ *называется бесконечно малой функцией низшего порядка малости, по сравнению с* $\varphi(x)$, *а* $\varphi(x)$ *называется бесконечно малой функцией высшего порядка малости, по сравнению с функцией* $f(x)$.

Определение 3. *Если* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=A$ и $A\neq 0$, *то бесконечно малые функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *называются бесконечно малыми одного и того же порядка.*