Задача 18,14 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \to e} \frac{\ln x - 1}{x - e}.$$

У к а з а н и е. В числителе дроби заменить 1 на $\ln e$. Тогда выражение, стоящее под знаком предела, запишется так:

$$\frac{\ln x - 1}{x - e} = \frac{\ln x - \ln e}{x - e} = \frac{\ln \frac{x}{e}}{x - e} = \ln\left(\frac{x}{e}\right)^{\frac{1}{x-e}},$$

и теперь

$$\lim_{x \to e} \ln\left(\frac{x}{e}\right)^{\frac{1}{x-e}} = \ln \lim_{x \to e}\left(\frac{x}{e}\right)^{\frac{1}{x-e}} = \ln \lim_{x \to e}\left[1 + \frac{x}{e} - 1\right]^{\frac{1}{x-e}} =$$

$$= \ln \lim_{x \to e}\left(1 + \frac{x-e}{e}\right)^{\frac{e}{x-e}\cdot\frac{1}{e}} = \ln\left[\lim_{x \to e}\left(1 + \frac{x-e}{e}\right)^{\frac{e}{x-e}}\right]^{\frac{1}{e}} = \ln e^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{e}.$$

О т в е т. $\frac{1}{e}$.

ДЕВЯТНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

С о д е р ж а н и е: Сравнение бесконечно малых величин.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ — *бесконечные малые функции при* $x \to a$, т. е. $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ и $\lim_{x \to a} \varphi(x) = 0$, причем a может быть как числом, так и одним из символов $+\infty$, $-\infty$, ∞. Тогда имеют место приводимые ниже определения.

Определение 1. *Если* $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$, *то функция* $f(x)$ *называется бесконечно малой функцией высшего порядка малости, по сравнению с функцией* $\varphi(x)$, *а функция* $\varphi(x)$ *называется бесконечно малой функцией низшего порядка малости, по сравнению с функцией* $f(x)$.

Определение 2. *Если* $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty$, *то функция* $f(x)$ *называется бесконечно малой функцией низшего порядка малости, по сравнению с* $\varphi(x)$, *а* $\varphi(x)$ *называется бесконечно малой функцией высшего порядка малости, по сравнению с функцией* $f(x)$.

Определение 3. *Если* $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A$ и $A \neq 0$, *то бесконечно малые функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *называются бесконечно малыми одного и того же порядка.*

Определение 4. *Если* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=1$, *то бесконечно малые функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *называются эквивалентными, или равносильными. В этом случае пишут:* $f(x)\sim\varphi(x)$.

Определение 5. *Если* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{[\varphi(x)]^k}=A$ *и* $A\neq 0$, *то бесконечно малая функция* $f(x)$ *называется бесконечно малой k-го порядка малости, по сравнению с бесконечно малой функцией* $\varphi(x)$ (из этих определений вовсе не следует, что отношение двух бесконечно малых функций всегда имеет конечный или бесконечный предел. Может оказаться, что отношение двух бесконечно малых функций не имеет ни конечного, ни бесконечного предела).

Теорема (о замене бесконечно малых функций им эквивалентными). *Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если каждую из них или какую-либо одну заменить эквивалентными им.*

Задача 19,1. Доказать, что если $x\to 0$, то функция x^k, где $k>1$, — бесконечно малая высшего порядка, чем x.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^k}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^{k-1}=0$, так как по условию $k-1>0$. Этим и доказано требуемое.

Задача 19,2. Доказать, что при $x\to 0$ функции $\sin x$ и $\operatorname{tg}x$ — эквивалентные бесконечно малые.

Решение. Если мы докажем, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\operatorname{tg}x}=1$, то тем самым будет доказано, что $\operatorname{tg}x\sim\sin x$ при $x\to 0$.

Действительно, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\operatorname{tg}x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}}=\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$.

Задача 19,3 (для самостоятельного решения). Доказать, что при $x\to 0$ 1) функции $\sin x\sim x$; 2) $\ln(1+x)\sim x$; 3) $e^x-1\sim x$; 4) $\sin kx\sim kx$; 5) $\ln(1+kx)\sim kx$.

Указание. Рассмотреть $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}$;* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}$ и убедиться, что каждый из этих пределов равен 1. Полезно запомнить, что $\ln(1+kx)\sim kx$, $\sin kx\sim kx$ при $x\to 0$.

Задача 19,4. Доказать, что при $x\to 0$ функции $\sin kx$ и $l\cdot x$ $(k\neq 0,\ l\neq 0)$ — бесконечно малые одного и того же порядка.

Доказательство. Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{lx}$ и убедимся, что он равен постоянной величине, отличной от нуля (см. определение 3). Действительно, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{lx}=\frac{k}{l}\neq 0$.

---

*См. Задачу 18,4.

В частности, например, $\sin 2x$ и $3x$ при $x \to 0$ будут бесконечно малыми одного и того же порядка.

Задача 19,5. Показать, что если x — бесконечно малая первого порядка, то $1 - \cos x$ — бесконечно малая второго порядка, по сравнению с x.

Решение. Чтобы показать требуемое, надо на основании определения 5 показать, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ есть величина постоянная, не равная нулю. Действительно, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} =$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Замечание. При решении следующих задач полезно знать, что если $x \to a$, то $\lim\limits_{x\to a} x^0 = 1$, так как переменная величина, стремясь к a, возводится в степень, равную нулю, а потому сохраняет постоянное значение, равное 1. Предел ее поэтому равен 1.

Задача 19,6. Считая, что x — бесконечно малая первого порядка, определить порядок малости функции $\sin x - \operatorname{tg} x$.

Решение. Отличие этой задачи от предыдущей состоит в том, что в предыдущей задаче порядок малости функции $1 - \cos x$ задавался, и требовалось только подтвердить это расчетом. В этой задаче порядок малости функции $\sin x - \operatorname{tg} x$, не задан, а подлежит определению. Будем считать, что порядок малости этой функции равен k и найдем k такое, чтобы $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^k}$ имел конечное значение, отличное от нуля (см. определение 5 на стр. 339):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^k} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \frac{\sin x}{\cos x}}{x^k} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos x - \sin x}{x^k\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos x - \sin x}{x^k} = 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x - 1)}{x^k} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\, 2\sin^2\frac{x}{2}}{x^k} = -2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^{k-1}} =$$

$$= -2\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\frac{1}{x^{k-3}} = -2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2\lim_{x\to 0} x^{3-k} =$$

$$= -2\left(\frac{1}{2}\right)^2\lim_{x\to 0} x^{3-k} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0} x^{3-k}.$$

Теперь дело решает предел $\lim\limits_{x\to 0} x^{3-k}$. Если предположить, что $3 - k > 0$, то $\lim\limits_{x\to 0} x^{3-k} = 0$. Если же $3 - k < 0$, то $\lim\limits_{x\to 0} x^{3-k} = \infty$.

Чтобы получить конечный и отличный от нуля $\lim\limits_{x\to 0} x^{3-k}$, надо отбросить предположения $3-k>0$ и $3-k<0$, так как в первом случае искомый предел равен нулю, а во втором — бесконечности. Только тогда, когда $3-k=0$, т. е. когда $k=3$, мы получим, на основании сделанного замечания (см. задачу 19,5), что $\lim\limits_{x\to 0} x^{3-k}=1$, а искомый предел равен $-\frac{1}{2}$, т. е. имеет конечное и отличное от нуля значение. Итак, $k=3$ и при $x\to 0$ функция $\sin x-\operatorname{tg} x$ — бесконечно малая третьего порядка малости, по сравнению с x.

Задача 19,7. Считая, что x — бесконечно малая величина первого порядка, определить порядок малости бесконечно малой функции

$$\ln(1+x^2+x^3).$$

Решение. Будем считать, что искомый порядок малости равен k и определим k так, чтобы $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^3)}{x^k}$ имел конечное значение, отличное от нуля.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^3)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^3)}{x^2+x^3}\,\frac{x^2+x^3}{x^k}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^3)}{x^2+x^3}\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^3}{x^k}.$$

Первый предел равен 1 (подстановка: $x^2+x^3=z$ приводит к хорошо известному пределу: $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\ln(1+z)}{z}=1$).

Отыщем теперь второй предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^3}{x^k}=\lim_{x\to 0}(x^{2-k}+x^{3-k})=\lim_{x\to 0}x^{2-k}(1+x).$$

Последний предел имеет конечное значение только в том случае, когда $2-k=0$, т. е. $k=2$, так как если $k<2$, то этот предел равен нулю, а если $k>2$, то при $x\to 0$ x^{2-k} — величина бесконечно большая, при $k=2$ $\lim\limits_{x\to 0}x^{2-k}=1$.

Таким образом, если $k=2$, то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^3)}{x^k}=1\cdot 1\neq 0$.

Итак, при $x\to 0$ бесконечно малая функция $\ln(1+x^2+x^3)$ имеет второй порядок малости относительно бесконечно малой x.

Задача 19, 8 (для самостоятельного решения). Считая, что x — бесконечно малая величина первого порядка, определить порядок бесконечно малой функции

$$\ln(1+x+x^2).$$

Ответ. Первого порядка малости ($k=1$).

Задача 19,9. Считая, что x — бесконечно малая величина первого порядка, определить порядок малости бесконечно малой функции

$$\cos 3x - \cos x.$$

Решение. Определим число k так, чтобы $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x - \cos x}{x^k}$ имел конечное значение, не равное нулю. Учитывая, что $\cos 3x - \cos x = -2\sin 2x \sin x$, искомый предел перепишем в виде

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x - \cos x}{x^k} = -\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x\sin x}{x^k} =$$

$$= -2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{k-2}} = -2\cdot 2\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}x^{2-k}.$$

Если взять $k<2$, то $\lim\limits_{x\to 0}x^{2-k}=0$, и тогда весь искомый предел будет равен нулю, а мы ищем такое значение k, при котором искомый предел был бы конечен, но не равен нулю.

Если взять $k>2$, то $\lim\limits_{x\to 0}x^{2-k}=\infty$, что также не годится, так как тогда искомый предел не конечен. И только тогда, когда $k=2 \lim\limits_{x\to 0}x^{2-k}=1$, а искомый предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{x^k}=-4\cdot 1 = -4$, т. е. имеет конечное и не равное нулю значение.

Итак, $k=2$. При $x\to 0$ бесконечно малая функция $\cos 3x - \cos x$ имеет второй порядок малости, по сравнению с x — бесконечно малой первого порядка.

Задача 19,10 (для самостоятельного решения). Считая, что x — бесконечно малая величина первого порядка, определить порядок босконечно малой функции $\cos 2x - \cos x$.

Ответ. $k=2$.

Теперь выполним упражнения, связанные с использованием теоремы (стр. 339) о замене бесконечно малых функций им эквивалентными. Эта теорема во многих случаях значительно упрощает определение пределов.

Задача 19,11. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin 4x}$.

Решение. При $x\to 0$ числитель и знаменатель дроби — функции бесконечно малые. Из задачи 19,3 нам известно, что при $x\to 0$ бесконечно малая функция $\ln(1+3x)\sim 3x$, $\sin 4x\sim 4x$, а потому, используя эту теорему, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin 4x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}.$$

Задача 19,12. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x^4+x^2+x}$.

Решение. Так как при $x \to 0$ бесконечно малая функция $\sin 3x \sim 3x$, то заменяя $\sin 3x$ эквивалентной ей бесконечно малой $3x$, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x^4+x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x^4+x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x(x^3+x+1)}=3.$$

Задача 19,13 (для самостоятельного решения). Пользуясь теоремой (стр. 339), найти $\lim\limits_{x\to n}\dfrac{\cos ax-\cos an}{n^2-x^2}$.

Ответ. $\dfrac{a\sin an}{2n}$.

Задача 19,14 (для самостоятельного решения). Пользуясь теоремой (стр. 339), найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{\sin kx}\right)^n$.

Ответ. $\dfrac{1}{k^n}$.

Задача 19,15 (для самостоятельного решения). Используя ту же теорему, доказать, что

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\ln(1-x)}=-1;\quad 2)\ \lim_{x\to 0}\operatorname{cosec} x\cdot\ln(1+x)=1.$$

ДВАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Непрерывность функции. Односторонние пределы. Точки разрыва и их классификация.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Определение 1. *Если предел функции $f(x)$ при $x \to a$ существует и равен значению функции в точке $x=a$, то функция $f(x)$ называется непрерывной при $x=a$ или в точке a, т. е. для функции $f(x)$, непрерывной при $x=a$, должно выполняться равенство*

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a). \tag{20,1}$$

При этом следует иметь в виду, что для непрерывности функции при $x=a$ равенство (20,1) должно выполняться при стремлении x к a любому закону.

Для того чтобы согласно этому определению функция была непрерывной при $x=a$, требуется выполнение таких трех условий:

1. Точка a должна принадлежать области определения функции, так как иначе о значении функции $f(a)$ в этой точке не имеет смысла говорить. Функция $f(x)$ должна быть определена не только в самой точке a, но и в некоторой ее окрестности.