Задача 15,24 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\infty}[(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}].$$

Указание. Выражение, стоящее под знаком предела, умножить и разделить на $(x+1)^{\frac{4}{3}}+(x+1)^{\frac{2}{3}}\cdot(x-1)^{\frac{2}{3}}+(x-1)^{\frac{4}{3}}$, чтобы получить в числителе разность кубов. После упрощений под знаком предела будет находиться выражение

$$\frac{4x}{(x+1)^{\frac{4}{3}}+(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}+(x-1)^{\frac{4}{3}}}.$$

Знаменатель дроби представить в виде

$$x^{\frac{4}{3}}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{3}}+\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{3}}\right]$$

и сократить дробь на x.

Ответ. 0.

Задача 15,25 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\pm\infty}[x^{\frac{4}{3}}-(x^2-1)^{\frac{2}{3}}].$$

Указание. Выражение, стоящее под знаком предела, умножить и разделить на $x^{\frac{8}{3}}+x^{\frac{4}{3}}(x^2-1)^{\frac{2}{3}}+(x^2-1)^{\frac{4}{3}}$ и полученную дробь сократить на x^2.

Ответ. 0.

ШЕСТНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Определение пределов тригонометрических функций и упражнения на использование предела $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

При определении предела тригонометрической функции можно независимую переменную заменить ее предельным значением, если оно принадлежит области существования функции:

$$\lim_{x\to a}\sin x=\sin a;\quad \lim_{x\to a}\cos x=\cos a;\quad \lim_{x\to a}\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}a;$$

$$\lim_{x\to a}\operatorname{ctg}x=\operatorname{ctg}a;\quad \lim_{x\to a}\sec x=\sec a;\quad \lim_{x\to a}\operatorname{cosec}x=\operatorname{cosec}a.$$

Примеры:

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \sin x = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = \sin 0 = 0$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$;

4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$.

5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x$ — не существует, так как $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ нельзя приписать никакого числового значения.

Задача 16,1. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$.

Решение. На основании приведенного выше правила для отыскания предела тригонометрических функций $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, а потому, когда $x\to\frac{\pi}{2}$, $1-\sin x\to 0$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos^2 x = \cos^2\frac{\pi}{2} = 0$ и мы имеем дело с отношением двух бесконечно малых функций. Требуется, как уже хорошо известно читателю, специальное исследование, чтобы решить вопрос о пределе Зная. что $\cos^2 x = 1-\sin^2 x = (1-\sin x)(1+\sin x)$, имеем

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} =$$

$$= \frac{1}{1+\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x} = \frac{1}{1+\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Задача 16,2 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{y\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos y-\sin y}{1-\operatorname{tg}^2 y}.$$

Ответ. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Задача 16,3 (для самостоятельного решения). Найти:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{1-4\sin^2 x}{\cos 3x}.$$

Указание. Под знаком предела находится при $x\to\frac{\pi}{6}$ отношение двух бесконечно малых функций. Следует числитель разложить на множители:

$$1-4\sin^2 x = 4\left(\frac{1}{4}-\sin^2 x\right) = 4\left(\frac{1}{2}-\sin x\right)\left(\frac{1}{2}+\sin x\right).$$

Знаменатель дроби

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x = 4\cos x\left(\cos^2 x - \frac{3}{4}\right) =$$
$$= 4\cos x\left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Если под знаком предела имеется сумма или разность тригонометрических функций, часто бывает полезным преобразовать их в произведение по известным формулам тригонометрии.

Учесть, что $\frac{1}{2} = \sin 30°$; $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30°$.

Ответ. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Задача 16,4. Найти $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{\operatorname{tg} x} - \sqrt{\operatorname{tg} a}}{\sqrt[3]{\sin x} - \sqrt[3]{\sin a}}$.

Решение. При $x \to a$ и числитель, и знаменатель дроби — функции бесконечно малые:

$$\lim_{x\to a}(\sqrt{\operatorname{tg} x} - \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}) = \lim_{x\to a}\sqrt{\operatorname{tg} x} - \lim_{x\to \alpha}\sqrt{\operatorname{tg} \alpha} = \sqrt{\lim_{x\to\alpha}\operatorname{tg} x} -$$
$$- \sqrt{\operatorname{tg}\alpha} = \sqrt{\operatorname{tg}\lim_{x\to\alpha} x} - \sqrt{\operatorname{tg}\alpha} = \sqrt{\operatorname{tg}\alpha} - \sqrt{\operatorname{tg}\alpha} = 0^*.$$

Аналогичные рассуждения провести и по отношению к знаменателю. Имеем

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{\sqrt{\operatorname{tg} x} - \sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}{\sqrt[3]{\sin x} - \sqrt[3]{\sin\alpha}} =$$
$$= \lim_{x\to\alpha}\frac{(\sqrt{\operatorname{tg} x} - \sqrt{\operatorname{tg}\alpha})(\sqrt{\operatorname{tg} x} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha})(\sqrt[3]{\sin^2 x} + \sqrt[3]{\sin\alpha\cdot\sin x} + \sqrt[3]{\sin^2\alpha})}{(\sqrt[3]{\sin x} - \sqrt[3]{\sin\alpha})(\sqrt{\operatorname{tg} x} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha})(\sqrt[3]{\sin^2 x} + \sqrt[3]{\sin\alpha\ \sin x} + \sqrt[3]{\sin^2\alpha})} =$$
$$= \lim_{x\to\alpha}\frac{(\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\alpha)(\sqrt[3]{\sin^2 x} + \sqrt[3]{\sin x\ \sin\alpha} + \sqrt[3]{\sin^2\alpha})}{(\sqrt{\operatorname{tg} x} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha})(\sin x - \sin\alpha)} =$$
$$= \lim_{x\to\alpha}\frac{\sqrt[3]{\sin^2 x} + \sqrt[3]{\sin\alpha\ \sin x} + \sqrt[3]{\sin^2\alpha}}{\sqrt{\operatorname{tg} x} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}\lim_{x\to\alpha}\frac{\sin(x-\alpha)}{\cos x\cos\alpha\, 2\cos\frac{x+\alpha}{2}\sin\frac{x-\alpha}{2}} =$$

---

* $\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, где k — любое целое число. Если не сделать этой оговорки, то, например, при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ будет $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$, а $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ не имеет числового смысла.

$$= \frac{3\sqrt[3]{\sin^2 \alpha}}{2\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}} \lim_{x \to \alpha} \frac{2 \sin \frac{x-\alpha}{2} \quad \cos \frac{x-\alpha}{2}}{\cos x \cos \alpha \, 2 \cos \frac{x+\alpha}{2} \sin \frac{x-\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{3}{2} \frac{\sqrt[3]{\sin^2 \alpha}}{2\sqrt{\operatorname{tg} \alpha} \quad \cos^3 \alpha}.$$

Задача 16,5 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - \sqrt[3]{\sin \alpha}}{\sqrt{\sin x} - \sqrt{\sin \alpha}}.$$

Ответ. $\frac{2}{3} \frac{\sqrt{\sin \alpha}}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 \alpha}} \frac{1}{\cos^3 \alpha}$.

При решении остальных задач этого практического занятия следует иметь в виду, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{16,1}$$

Задача 16,6. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin kx}{x}$, ($k$ — величина постоянная).

Решение. Иногда при отыскании предела полезно произвести замену переменной с тем, чтобы упростить отыскание предела и использовать уже известные пределы.

Если под знаком предела делается замена переменной, то все величины, входящие под знак предела должны быть выражены через эту новую переменную, и из равенства, выражающего зависимость между старой переменной и новой, должен быть определен предел новой переменной.

Для решения предложенной задачи сделаем такую подстановку: $kx = y$. Из этого равенства следует, что $y \to 0$, когда $x \to 0$, а $x = \frac{y}{k}$. Тогда $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin kx}{x} = \lim\limits_{y \to 0} \frac{\sin y}{\frac{y}{k}} = \lim\limits_{y \to 0} \frac{k \sin y}{y} = k \lim\limits_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = k$,

так как $\lim\limits_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$.

Следует запомнить, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin kx}{x} = k. \tag{16,2}$$

Задача 16,7. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin kx}{\sin lx}$.

Решение. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin kx}{\sin lx} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{\sin kx}{x}}{\frac{\sin lx}{x}} = \frac{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin kx}{x}}{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin lx}{x}} = \frac{k}{l}$.

Мы разделили числитель и знаменатель дроби на x. Это можно было сделать, так как значение $x = 0$ не должно рассматриваться. При вычислении предела числителя и знаменателя последней дроби использована формула (16,2).

Задача 16,8 (для самостоятельного решения). Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 7x}$.

Ответ. $\frac{5}{6}$.

Задача 16,9. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} kx}{x}$.

Решение $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} kx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{\cos kx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos kx}=$

$$=k\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos kx}=k\frac{1}{\cos(\lim\limits_{x\to 0} kx)}=k\frac{1}{\cos 0}=k\frac{1}{1}=k.$$

Задача 16,10 (для самостоятельного решения). Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} kx}{\operatorname{tg} lx}$.

Указание. Числитель и знаменатель дроби разделить на x и перейти к пределу. Использовать решение предыдущей задачи.

Ответ. $\frac{k}{l}$.

Задача 16,11 (для самостоятельного решения). Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 \alpha x}{x^2}$.

Указание. Дробь, стоящую под знаком предела, записать так:

$$\frac{\sin^2 \alpha x}{x^2}=\frac{\sin \alpha x}{x}\frac{\sin \alpha x}{x}.$$

Использовать теорему о пределе произведения*.

Ответ. α^2.

Задача 16,12. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos mx}{x^2}$.

Решение. При $x\to 0$ числитель и знаменатель дроби — бесконечно малые функции. Воспользуемся тем, что $1-\cos mx=2\sin^2\frac{mx}{2}$ и тогда

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos mx}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{mx}{2}}{x^2}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{mx}{2}}{x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{mx}{2}}{x}=2\frac{m}{2}\frac{m}{2}=\frac{m^2}{2}$$

(мы использовали формулу (16,2). В нашем случае $k=\frac{m}{2}$).

Задача 16,13. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\operatorname{tg} x)$.

Решение. При $x\to\frac{\pi}{2}$ функции $\sec x$ и $\operatorname{tg} x$ — бесконечно большие функции; таким образом, под знаком предела находится

---

* Можно поступить и так: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 \alpha x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin \alpha x}{x}\right)^2=\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin \alpha x}{x}\right)^2=\alpha^2$

разность двух бесконечно больших функций. Теорему (14,5a о пределе разности применить нельзя, так как не существует конечных пределов каждой из функций $\sec x$ и $\operatorname{tg} x$ при $x \to \frac{\pi}{2}$. Преобразуем эту разность так:

$$\sec x - \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1-\sin x}{\cos x} = \frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{\cos x(1+\sin x)} =$$

$$= \frac{1-\sin^2 x}{\cos x(1+\sin x)} = \frac{\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)} = \frac{\cos x}{1+\sin x}.$$

После этого получаем

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sec x - \operatorname{tg} x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin x} = 0.$$

К последней дроби можно было применить теорему о пределе дроби, так как предел знаменателя равен 2, а числитель дроби имеет конечный предел 0.

Задача 16, 14 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos kx - \cos lx}{x^2}.$$

Указание. Числитель дроби равен $-2\sin\frac{k+l}{2}x \cdot \sin\frac{k-l}{2}x$; использовать также формулу (16,2).

Ответ. $\frac{l^2-k^2}{2}$.

Задача 16, 15 (для самостоятельного решения). Найти $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{ctg} x$.

Указание. При $x \to 0$ функция $\operatorname{ctg} x$ — бесконечно большая. а x — величина бесконечно малая. Значит, мы имéем произведение функции бесконечно большой на величину бесконечно малую и требуется специальное исследование, чтобы определить предел этого произведения.

Учесть, что $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, а поэтому $x \operatorname{ctg} x = x\frac{\cos x}{\sin x}$. На основании формулы (16, 1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$.

Ответ 1.

Задача 16, 16 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{x}.$$

Указание. $\sin(a+x) - \sin(a-x) = 2\cos a \sin x$.

Ответ. $2\cos a$.

Задача 16, 17 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2\cos x}.$$

Указание. Представить числитель в виде

$$2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right),$$

а знаменатель

$$1-2\cos x=2\left(\frac{1}{2}-\cos x\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\right)=$$

$$=-4\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right).$$

Сократить дробь и перейти к пределу

Ответ. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Задача 16, 18. Найти $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.

Решение. При $x\to 1$ не существует предела $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$, а потому нельзя применить теорему (14, 5 *в*) о пределе произведения. Сделаем в нашем примере подстановку: $1-x=y$. Когда $x\to 1$, то новая переменная $y\to 0$, так как $\lim\limits_{x\to 1}y=\lim\limits_{x\to 1}(1-x)=0$. Если $1-x=y$, то $x=1-y$; выражение, стоящее под знаком предела, перепишется так:

$$(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=y\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(1-y)=y\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}y\right)=y\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}y=$$

$$=y\frac{\cos\frac{\pi}{2}y}{\sin\frac{\pi}{2}y}=\frac{y}{\sin\frac{\pi}{2}y}\cos\frac{\pi}{2}y,$$

поэтому

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin\frac{\pi}{2}y}\lim_{y\to 0}\cos\frac{\pi}{2}y=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin\frac{\pi}{2}y}{y}}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}y}{y}\right)}=\frac{2}{\pi}.$$

Задача 16, 19 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}.$$

Указание. 1) $\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$. Преобразовать дробь к виду

$$\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\frac{\sin x\,(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\frac{1}{\cos x}\,\frac{\sin x}{x}\,\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Ответ. $\frac{1}{2}$.

Задача 16, 20 (для самостоятельного решения). Найти

$$1)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}; \qquad 2)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{\sin x}.$$

Указания. 1) В первом примере умножить числитель и знаменатель дроби на $\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}$, сократить дробь и перейти к пределу. 2) Во втором примере перенести иррациональность в знаменатель, сократить дробь на $\sin x$ и перейти к пределу.

Ответ. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) 1.

Задача 16,21 (для самостоятельного решения). Найти

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin 5x}{2x+\sin 3x}; \qquad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}; \qquad 3)\ \lim_{x\to 1}\frac{1+\cos\pi x}{\operatorname{tg}^2\pi x}.$$

Ответ. 1) $-\frac{4}{5}$; 2) 1; 3) $\frac{1}{2}$.

Указание. В первом примере числитель и знаменатель дрсби разделить на x, во втором положить $\arcsin x = z$, в третьем примере $1+\cos\pi x = 2\cos^2\frac{\pi x}{2}$; $\operatorname{tg}\pi x = \frac{\sin\pi x}{\cos\pi x}$.

СЕМНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Число e.

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с числом e.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e; \tag{17,1}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e; \tag{17,2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k; \tag{17,3}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}} = e^k. \tag{17,4}$$

Нам придется также пользоваться теоремой о переходе к пределу в показателе степени при постоянном основании. Эта теорема формулируется так: