Задача 16, 20 (для самостоятельного решения). Найти

$$1)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}; \qquad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{\sin x}.$$

Указания. 1) В первом примере умножить числитель и знаменатель дроби на $\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}$, сократить дробь и перейти к пределу. 2) Во втором примере перенести иррациональность в знаменатель, сократить дробь на $\sin x$ и перейти к пределу.

Ответ. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) 1.

Задача 16,21 (для самостоятельного решения). Найти

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin 5x}{2x+\sin 3x}; \qquad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}; \qquad 3)\ \lim_{x\to 1}\frac{1+\cos\pi x}{\operatorname{tg}^2\pi x}.$$

Ответ. 1) $-\frac{4}{5}$; 2) 1; 3) $\frac{1}{2}$.

Указание. В первом примере числитель и знаменатель дрсби разделить на x, во втором положить $\arcsin x = z$, в третьем примере $1+\cos\pi x = 2\cos^2\frac{\pi x}{2}$; $\operatorname{tg}\pi x = \frac{\sin \pi x}{\cos\pi x}$.

СЕМНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Число e.

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с числом e.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e; \qquad (17,1)$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e; \qquad (17,2)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k; \qquad (17,3)$$

$$\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}} = e^k. \qquad (17,4)$$

Нам придется также пользоваться теоремой о переходе к пределу в показателе степени при постоянном основании. Эта теорема формулируется так:

Если существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, то при постоянном b имеет место формула

$$\lim_{x\to a} b^{f(x)} = b^{\lim\limits_{x\to a} f(x)} \tag{17,5}$$

Короче (но менее точно): *при постоянном основании можно переходить к пределу в показателе степени.*

При отыскании пределов вида $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{\varphi(x)}$ в случае, когда существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$, имеет место формула

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^{\varphi(x)} = [\lim_{x\to a} f(x)]^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}. \tag{17,6}$$

Замечание. В формуле (17,6) a может обозначить и число, и один из символов ∞, $+\infty$ и $-\infty$.

Если в этой формуле $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \pm\infty$, а $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ конечен, но не равен 1, то вопрос о пределе $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}$ затруднений не вызывает (см. например, задачу 17,10). Случай, когда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$, а $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \pm\infty$, рассмотрен в задачах 17,13—17,25, а соответствующие указания даны на стр. 326.

Сначала мы выполним упражнения, связанные с применением формулы (17,5).

Задача 17, 1. Найти $\lim\limits_{x\to 2} 4^{\frac{2x}{x+1}}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 2} 4^{\frac{2x}{x+1}} = 4^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x}{x+1}} = 4^{\frac{2\cdot 2}{2+1}} = 4^{\frac{4}{3}} = 4\sqrt[3]{4}.$

Задача 17,2. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} 2^{\frac{3x}{x+2}}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty} 2^{\frac{3x}{x+2}} = 2^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x+2}} = 2^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{1+\frac{2}{x}}} = 2^3 = 8.$

Задача 17,3 Найти $\lim\limits_{x\to 2} a^{\frac{\sqrt{2+x}-2}{x-2}}$ $(a>0)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 2} a^{\frac{\sqrt{2+x}-2}{x-2}} = a^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+x}-2}{x-2}} = a^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{2+x-4}{(x-2)(\sqrt{2+x}+2)}} =$

$= a^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{2+x}+2}} = a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}.$

Задача 17,4 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} 2^{\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}}.$$

Указание. Ввести замену переменной: положить $\frac{\pi}{2}-x=z$. При $x\to\frac{\pi}{2}$ переменная $z\to 0$. Перейти к пределу в показателе степени.

Ответ. 2.

Задача 17,5. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}$.

Решение. Полагая в формуле (17,3) $k=-1$, получим $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=e^{-1}=\frac{1}{e}$.

Задача 17,6 (для самостоятельного решения). Найти:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{k}{x}\right)^{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{3x}}$.

Ответ. На основании формулы (17,3) получаем:

1) e^{-k}; 2) $e^{\frac{2}{3}}$;

на основании формулы (17,4):

3) e^{2}; 4) $e^{\frac{1}{3}}$.

Задача 17.7 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}.$$

Ответ. e^{x} (здесь n — величина переменная, а x — постоянная)

Задача 17,8 Найти 1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5\,\mathrm{tg}^2 x)^{3\,\mathrm{ctg}^2 x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\sin x)^{3\,\mathrm{cosec}\,x}$.

Решение. 1) Для того чтобы решение первого примера свести к известной формуле (17,4), сделаем замену переменной, положив $\mathrm{tg}^2 x=z$.

Теперь следует и $\mathrm{ctg}^2 x$, стоящий в показателе степени, выразить через z. Так как $\mathrm{ctg}^2 x=\frac{1}{\mathrm{tg}^2 x}$, то $\mathrm{ctg}^2 x=\frac{1}{z}$. Таким образом, и $\mathrm{ctg}^2 x$ выражен через новую переменную. Осталось решить вопрос о пределе новой переменной, когда старая переменная x стремится к нулю. Из равенства $\mathrm{tg}^2 x=z$ следует, что $\lim\limits_{x\to 0} z=$

$= \lim\limits_{x \to 0} \operatorname{tg}^2 x = 0$, а потому новая переменная $z \to 0$, когда $x \to 0$. Записи расположатся так:

$$\lim_{x \to 0} (1 + 5 \operatorname{tg}^2 x)^{3 \operatorname{ctg}^2 x} = \lim_{z \to 0} (1 + 5z)^{3 \frac{1}{z}} = \underbrace{[\lim_{z \to 0} (1 + 5z)^{\frac{1}{z}}]}_{\substack{\text{применить формулу} \\ (17,4).}}{}^3 = (e^5)^3 = e^{15}.$$

2) При решении второго примера сделать подстановку $\sin x = z$. Из этого равенства следует, что новая переменная $z \to 0$, когда $x \to 0$.

Ответ. e^6.

Теперь выполним ряд упражнений, связанных с использованием формулы (17,6).

Задача 17,9. Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{x}{x+1}}$.

Решение. На основании формулы (17,6)

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{x}{x+1}} \left(\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^3}\right)^{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{x+1}}; \quad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^3} = 0; \quad \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x+1} = 1;$$

поэтому

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{x}{x+1}} = 0^1 = 0.$$

Задача 17,10 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+1}{2x+3}\right)^x.$$

Ответ. 0 $\left(\text{воспользоваться формулой (17,6); } \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+1}{2x+3} = \frac{1}{2}\right)$.

Задача 17,11 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x+3}{5x+7}\right)^{\frac{2x-1}{x+2}}.$$

Ответ. $\frac{4}{25}$ (предел основания степени равен $\frac{2}{5}$, а предел показателя степени равен 2).

Задача 17,12 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+x+1}{3x^2+2x+7}\right)^{\frac{2x^2+5}{x^2-1}}.$$

Ответ. $\frac{1}{9}$ (воспользоваться формулой (17,6)).

В формуле (17,6) мы исключили из рассмотрения случай, когда $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \pm \infty$, а $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 1$ (см. замечание к этой формуле).

Теперь выполним несколько упражнений, связанных с отысканием $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^{\varphi(x)}$ в случае, когда $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 1$, а $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \pm \infty$.

В этом случае формула (17,6) неприменима, так как выражение 1^∞ не имеет смысла («неопределенность» вида 1^∞). Существует общий прием для отыскания предела в этом случае. Прием этот состоит в следующем: функцию $f(x)$ представляют в виде $f(x) = 1 + [f(x) - 1]$. Показатель степени $\varphi(x)$ запишем в виде:

$$\varphi(x) = \frac{1}{f(x)-1}[f(x)-1]\varphi(x),$$

и тогда

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}[1 + (f(x)-1)]^{\frac{1}{f(x)-1}[f(x)-1]\varphi(x)} =$$

$$= \{\lim_{x\to a}[1 + (f(x)-1)]^{\frac{1}{f(x)-1}}\}^{\lim\limits_{x\to a}[f(x)-1]\varphi(x)}. \qquad (17,7)$$

Сделаем подстановку: $f(x) - 1 = z$. Так как по предположению при $x \to a$ $f(x) \to 1$, то $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-1] = 0$, т. е. $z \to 0$, когда $x \to a$. На основании предыдущего равенства

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)} = [\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}]^{\lim\limits_{x\to 0}[f(x)-1]\varphi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[f(x)-1]\varphi(x)}.$$

Следует иметь в виду, что a может быть и числом и одним из символов ∞, $+\infty$ или $-\infty$.

Теперь все дело сведется к вычислению $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-1]\varphi(x)$.

Это общее указание использовано при решении задач 17,20—17,25.

Этим же указанием можно воспользоваться и при решении задач 17,13—17,19. Однако в этих задачах использование общего приема приведет к ненужным осложнениям и мы их решим проще.

Задача 17,13. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$.

Решение. Здесь основание степени $f(x) = \frac{x+1}{x-1} \to 1$, когда $x \to \infty$, а показатель степени $x \to \infty$. Здесь, таким образом, имеет место рассматриваемый случай «неопределенности» вида 1^∞.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right)^x =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{e}{e^{-1}} = e^2.$$

Покажем, что применение общего приема, указанного выше, приведет к более сложным выкладкам.

У нас

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1};\ 1+[f(x)-1]=1+\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)=$$
$$=1+\frac{x+1-x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}.$$

Таким образом,

$$f(x)-1=\frac{2}{x-1},$$

а потому показатель степени должен быть представлен на основании формулы (17,7) так:

$$x=\frac{x-1}{2}\,\frac{2}{x-1}\,x,$$

и теперь

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2}{x-1}x}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x-1}}=$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x-1}}=e^2.$$

Теперь ясно, что общий прием оказался сложнее.

Задача 17,14 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+4}\right)^x.$$

Указание. Числитель и знаменатель дроби разделить на $2x$, применить теорему о пределе дроби и формулу (17,3). В числителе в этой формуле $k=-\frac{1}{2}$, в знаменателе $k=2$.

Ответ. $\frac{1}{e^2\sqrt{e}}$.

Задача 17,15. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+7}{x+5}\right)^{2x+4}$.

Решение. Разделив числитель и знаменатель дроби на x, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+7}{x+5}\right)^{2x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{7}{x}\right)^{2x+4}}{\left(1+\frac{5}{x}\right)^{2x+4}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{2x}\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^4}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{2x}\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^4}=$$
$$=\frac{\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^x\right]^2\,1}{\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x\right]^2\cdot 1}=\frac{(e^7)^2}{(e^5)^2}=\frac{e^{14}}{e^{10}}=e^4,$$

так как $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^4=1$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^4=1$.

Можно было бы сразу записать

$$\left(\frac{x+7}{x+5}\right)^{2x+4}=\left(\frac{x+7}{x+5}\right)^{2x}\left(\frac{x+7}{x+5}\right)^{4}$$

и, учитывая, что предел второго сомножителя

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+7}{x+5}\right)^{4}=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x+7}{x+5}\right)^{4}=1^4=1,$$

отыскивать только предел первого множителя $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+5}\right)^{2x}$, что упростило бы записи.

Задача 17,16 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x+5}\right)^{x+3}.$$

Указание. Числитель и знаменатель дроби разделить на $3x$ и перейти к пределу. Для упрощения записей полезно представить выражение, стоящее под знаком предела, в виде

$$\left(\frac{3x+4}{3x+5}\right)^{x+3}=\left(\frac{3x+4}{3x+5}\right)^{x}\left(\frac{3x+4}{3x+5}\right)^{3}$$

и учесть, что предел второго сомножителя равен 1.

Ответ. $e^{-\frac{1}{3}}$.

Задача 17,17 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x+3}\right)^{3x+2}.$$

Указание. $\left(\frac{4x-1}{4x+3}\right)^{3x+2}=\left(\frac{4x-1}{4x+3}\right)^{3x}\left(\frac{4x-1}{4x+3}\right)^{2}$.

Учесть, что предел второго сомножителя равен 1, а для определения предела первого сомножителя числитель и знаменатель дроби нужно разделить на $4x$ и перейти к пределу в числителе и знаменателе дроби. $\dfrac{\left(1-\frac{1}{4x}\right)^{3x}}{\left(1+\frac{3}{4x}\right)^{3x}}$.

Ответ. e^{-3}

Задача 17,18. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{3x+2}\right)^{x+3}$.

Указание. $\left(\frac{3x}{3x+2}\right)^{x+3}=\left(\frac{3x}{3x+2}\right)^{x}\left(\frac{3x}{3x+2}\right)^{3}$.

Предел второго сомножителя равен 1, а при определении предела первого сомножителя нужно числитель и знаменатель дроби разделить на $3x$.

Ответ. $e^{-\frac{2}{3}}$.

Задача 17,19 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{2x+3}.$$

Ответ. e^2.

Задача 17,20. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+2}{x^2+3}\right)^x$.

Решение. Воспользуемся указаниями стр. 326. Здесь

$$f(x)=\frac{x^2+2x+2}{x^2+3},$$

а

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+2}{x^2+3}=1;$$

$$\varphi(x)=x,\ \text{а}\ \lim_{x\to\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to\infty}x=\infty.$$

Перепишем наш пример так:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+2}{x^2+3}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[1+\left(\frac{x^2+2x+2}{x^2+3}-1\right)\right]^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x^2+3}\right)^x.$$

У нас $f(x)-1=\frac{2x-1}{x^2+3}$, а потому $\frac{1}{f(x)-1}=\frac{x^2+3}{2x-1}$; на основании формулы (17,7) показатель степени $x=\frac{x^2+3}{2x-1}\frac{2x-1}{x^2+3}x$, а потому

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x^2+3}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x^2+3}\right)^{\frac{x^2+3}{2x-1}\frac{2x-1}{x^2+3}x}=$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x^2+3}\right)^{\frac{x^2+3}{2x-1}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x^2+3}x}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x^2+3}x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^2+3}}=e^2,$$

так как

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x^2+3}\right)^{\frac{x^2+3}{2x-1}}=e,\ \text{а}\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^2+3}=2$$

(если $\frac{2x-1}{x^2+3}=z$, то $\frac{x^2+3}{2x-1}=\frac{1}{z}$, $z\to 0$, когда $x\to\infty$ и

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x^2+3}\right)^{\frac{x^2+3}{2x-1}}=\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=e).$$

Задача 17,21 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+2}{x^2+x+1}\right)^{3x-1}.$$

Указание (см. указание на стр. 326).

$$f(x)=\frac{x^2+2x+2}{x^2+x+1};\quad f(x)-1=\frac{x+1}{x^2+x+1};$$

показатель степени

$$\varphi(x)=3x-1=\frac{x^2+x+1}{x+1}\,\frac{x+1}{x^2+x+1}(3x-1)$$

(см. пояснения к предыдущей задаче).

Ответ. e^3.

Задача 17,22. Найти $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$.

Решение. Предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x}{\sin a}=1$, а показатель степени $\frac{1}{x-a}$ неограниченно возрастает по абсолютной величине, когда $x\to a$. Решение примера проведем на основании указаний стр. 326. У нас

$$f(x)=\frac{\sin x}{\sin a};\quad f(x)-1=\frac{\sin x}{\sin a}-1=\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}=\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{\sin a}$$

На основании формулы (17,7) показатель степени запишем в виде

$$\varphi(x)=\frac{1}{x-a}=\frac{\sin a}{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}\,\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{\sin a}\,\frac{1}{x-a},$$

и тогда

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=\lim_{x\to a}\left[1+\left(\frac{\sin x}{\sin a}-1\right)\right]^{\frac{1}{x-a}}=$$

$$=\lim_{x\to a}\left(1+\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{\sin a}\right)^{\frac{\sin a}{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}\,\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{\sin a}\,\frac{1}{x-a}}=$$

$$=\left\{\lim_{x\to a}\left(1+\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{\sin a}\right)^{\frac{\sin a}{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}}\right\}^{\lim\limits_{x\to a}\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{\sin a}\,\frac{1}{x-a}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{\sin a}\,\frac{1}{x-a}}=e^{\operatorname{ctg}a},$$

та как $\lim\limits_{x\to a}\left(1+\dfrac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{\sin a}\right)^{\frac{\sin a}{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}}=e;$

$$\lim_{x\to a}\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{\sin a}\,\frac{1}{x-a}=$$

$$=\frac{2}{\sin a}\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}=\frac{2}{\sin a}\quad\cos a\quad\frac{1}{2}=\operatorname{ctg} a.$$

Объяснение: 1) постоянная величина $\frac{2}{\sin a}$ вынесена за знак предела,

2) $\lim\limits_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}=\cos\frac{a+a}{2}=\cos a.$

3) Для вычисления предела $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}$ применена подстановка $x-a=z$ и $z\to 0$, когда $x\to a$.

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{z}{2}}{z}=\frac{1}{2}$$

на основании формулы (16,2).

Задача 17,23. Найти $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\cos\frac{x}{m}\right)^m$.

Решение. Здесь опять-таки следует использовать указания стр. 326, так как $f(m)=\cos\frac{x}{m}$, причем x следует рассматривать как величину постоянную. Предел

$$\lim_{m\to\infty}f(m)=\lim_{m\to\infty}\cos\frac{x}{m}=1,$$

а показатель степени m неограниченно возрастает по абсолютной величине. Составим

$$f(m)-1=\cos\frac{x}{m}-1=-2\sin^2\frac{x}{2m}.$$

Показатель степени преобразуем по формуле (17,7):

$$\varphi(m)=m=\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2m}}\left(-2\sin^2\frac{x}{2m}\right)m,$$

и тогда

$$\lim_{m\to\infty}\left(\cos\frac{x}{m}\right)^m=\lim_{m\to\infty}\left[1+\left(\cos\frac{x}{m}-1\right)\right]^m=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left[1-2\sin^2\frac{x}{2m}\right]^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2m}}\left(-2\sin^2\frac{x}{2m}\right)m}=$$

$$=\left\{\lim_{m\to\infty}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2m}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2m}}}\right\}^{\lim\limits_{m\to\infty}\left(-2\sin^2\frac{x}{2m}\right)m}=e^{-2\lim\limits_{m\to\infty} m\sin^2\frac{x}{2m}}=1,$$

так как $\lim\limits_{m\to\infty} m\sin^2\frac{x}{2m}=\lim\limits_{m\to\infty}\frac{\sin^2\frac{x}{2m}}{\frac{1}{m}}=\lim\limits_{m\to\infty}\sin\frac{x}{2m}\lim\limits_{m\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{2m}}{\frac{1}{m}}$.

Если $m\to\infty$, то $\frac{x}{2m}\to 0$ и $\sin\frac{x}{2m}\to 0$.

Для вычисления второго предела $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{2m}}{\frac{1}{m}}$ сделаем подстановку $\frac{x}{2m}=z$, тогда $z\to 0$, когда $m\to\infty$ а $\frac{1}{m}=\frac{2z}{x}$, и получим, учитывая, что x — величина постоянная

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{2m}}{\frac{1}{m}}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{\frac{2z}{x}}=\frac{x}{2}\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=\frac{x}{2}\cdot 1=\frac{x}{2}$$

и, значит,

$$\lim_{m\to\infty} m\sin^2\frac{x}{2m}=0\cdot\frac{x}{2}=0,\ \text{а}\ e^0=1.$$

Задача 17,24 (для самостоятельного решения). Найти $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

Ответ. e^{-1}.

Задача 17,25 (для самостоятельного решения). Найти $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

Ответ. $e^{-\frac{1}{2}}$.

ВОСЕМНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Вычисление пределов выражений, содержащих логарифмы и показательные функции.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Теорема. *Если существует предел* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ *и этот предел положителен* $(A>0)$, *то*

$$\lim_{x\to a}[\log_b f(x)]=\log_b[\lim_{x\to a}(f(x)]\tag{18,1}$$