Решение. Так как при $x \to 0$ бесконечно малая функция $\sin 3x \sim 3x$, то заменяя $\sin 3x$ эквивалентной ей бесконечно малой $3x$, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x^4+x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x^4+x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x(x^3+x+1)}=3.$$

Задача 19,13 (для самостоятельного решения). Пользуясь теоремой (стр. 339), найти $\lim\limits_{x\to n}\frac{\cos ax-\cos an}{n^2-x^2}$.

Ответ. $\frac{a\sin an}{2n}$.

Задача 19,14 (для самостоятельного решения). Пользуясь теоремой (стр. 339), найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\sin kx}\right)^n$.

Ответ. $\frac{1}{k^n}$.

Задача 19,15 (для самостоятельного решения). Используя ту же теорему, доказать, что

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\ln(1-x)}=-1;\quad 2)\ \lim_{x\to 0}\operatorname{cosec} x\cdot\ln(1+x)=1.$$

ДВАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Непрерывность функции. Односторонние пределы. Точки разрыва и их классификация.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Определение 1. *Если предел функции $f(x)$ при $x\to a$ существует и равен значению функции в точке $x=a$, то функция $f(x)$ называется непрерывной при $x=a$ или в точке a, т. е. для функции $f(x)$, непрерывной при $x=a$, должно выполняться равенство*

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a). \tag{20,1}$$

При этом следует иметь в виду, что для непрерывности функции при $x=a$ равенство (20,1) должно выполняться при стремлении x к a любому закону.

Для того чтобы согласно этому определению функция была непрерывной при $x=a$, требуется выполнение таких трех условий:

1. Точка a должна принадлежать области определения функции, так как иначе о значении функции $f(a)$ в этой точке не имеет смысла говорить. Функция $f(x)$ должна быть определена не только в самой точке a, но и в некоторой ее окрестности.

2. Функция $f(x)$ должна иметь конечный предел при $x \to a$

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

3. Этот предел A должен быть равен значению функции в точке $x = a$, т. е. должно выполняться равенство $f(a) = A$.

Если соотношение (20,1) не имеет места для данной функции $y = f(x)$ в данной точке $x = a$, то функция называется разрывной в точке $x = a$, а сама точка $x = a$ называется точкой разрыва функции $f(x)$.

Функция непрерывная в каждой точке некоторой области (интервала, отрезка) называется непрерывной в этой области (в интервале, на отрезке).

Определение 2. *Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x = a$, если в этой точке ее приращение Δy стремится к нулю, когда приращение аргумента Δx стремится к нулю, или иначе: функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x = a$, если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т. е. если*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \qquad (20,2)$$

Односторонние пределы функции

а) Левосторонний предел функции. *Если отыскивается предел функции $f(x)$ при условии, что x, стремясь к a, может принимать только такие значения, которые меньше a, то этот предел, если он существует, называется левосторонним пределом функции $f(x)$ (или левым пределом функции). Для того чтобы показать, что x стремится к a, оставаясь меньше a, употребляется запись: $x \to a - 0$, а левосторонний предел функции обозначается символами:*

$$1)\ \lim_{x \to a-0} f(x) \ \text{ или } \ 2)\ f(a-0).$$

б) Правосторонний предел функции. *Если отыскивается предел функции $f(x)$ при условии, что x, стремясь к a, может принимать только такие значения, которые больше a, то этот предел, если он существует, называется правосторонним пределом функции $f(x)$ (или правым пределом функции).*

То что x, стремясь к a, остается больше a, обозначается так: $x \to a + 0$, правосторонний предел функции обозначается одним из символов:

$$1)\ \lim_{x \to a+0} f(x) \ \text{ или } \ 2)\ f(a+0).$$

Очевидно, что предел функции при $x \to a$ существует только тогда, когда существуют и равны между собой ее левосторонний и правосторонний пределы, т. е. когда $f(a-0) = f(a+0)$. Символы $f(a-0)$ и $f(a+0)$ являются только сокращенным обозначением левостороннего и правостороннего пределов и ничего другого не обозначают. Их можно применять только в случаях, когда определяющие их пределы существуют. *

Определение 3. *Функция $f(x)$ называется непрерывной при $x = a$, если ее левосторонний и правосторонний пределы существуют, между собой равны и равны значению функции в этой точке, т. е. $f(a)$.*

Таким образом, для непрерывности функции в точке $x = a$ требуется, чтобы выполнялись равенства

$$f(a-0) = f(a+0) = f(a). \tag{20,3}$$

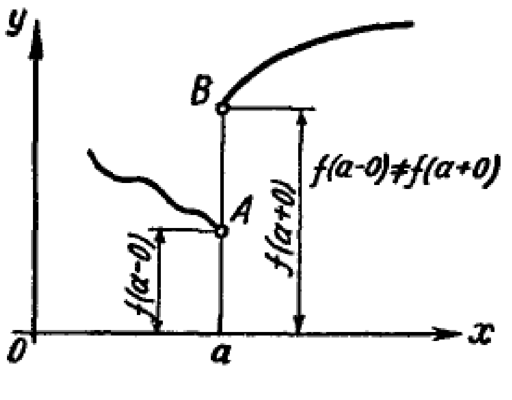
Точки разрыва и их классификация

Если равенство (20,3) в какой-либо его части не выполняется, то о точке $x = a$ говорят, что она является точкой разрыва.

1. Точка разрыва первого рода

Определение. *Если левосторонний предел функции $f(a-0)$ и ее правосторонний предел $f(a+0)$ существуют, но не равны между собой, т. е. если*

$$f(a-0) \neq f(a+0), \tag{20,4}$$



Фиг. 20,1.

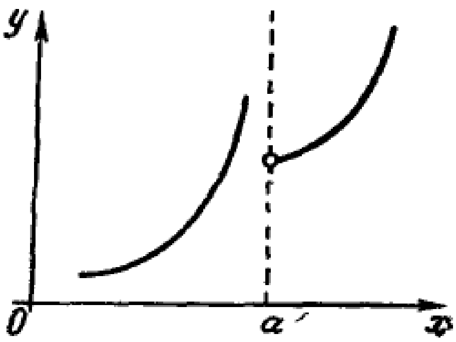
то точка a называется точкой разрыва первого рода (фиг. 20,1).

---

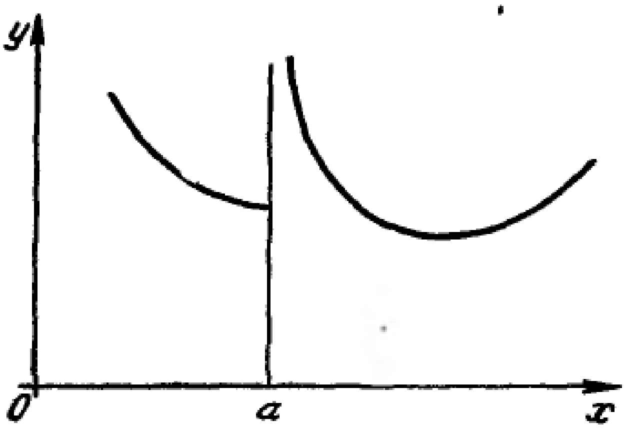
* Символ $x \to a$ означает, что x стремится к a, изменяясь по любому закону. Тем самым этот символ отличается от символов $x \to a-0$ и $x \to a+0$.

2. Точка разрыва второго рода

Определение. *Если в точке $x = a$ не существует левосторонний или правосторонний предел функции или оба одновременно, то эта точка называется точкой разрыва второго рода (фиг. 20,2; 20,3; 20,4). На фиг. 20,4 отсутствует левосторонний предел*

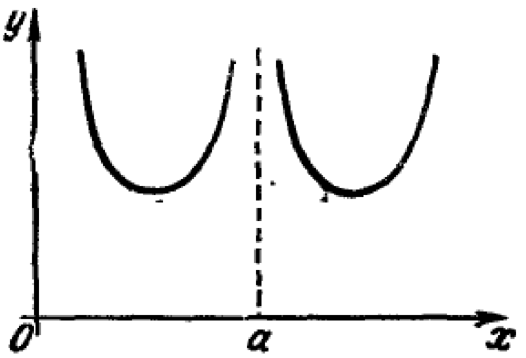


Фиг. 20,2.



Фиг. 20,3.

функции; на фиг. 20,3 нет правостороннего предела функции, а на фиг. 20,4 у функции нет ни левостороннего, ни правостороннего предела. Во всех этих случаях функция в точке $x = a$ терпит разрыв второго рода (иначе: точка $x = a$ — точка разрыва второго рода).



Фиг. 20,4.

3. Устранимый разрыв

Если в точке $x = a$ функция $f(x)$ имеет левосторонний и правосторонний пределы и эти пределы между собой равны, но их значения не совпадают со значением функции в точке a, т. е. со значением $f(a)$, то точка $x = a$ называется точкой «устранимого» разрыва. Таким образом, в этом случае

$$f(a-0) = f(a+0) \neq f(a). \tag{20,5}$$

Разрыв «устраняется» тем, что полагают $f(a)$ равным $f(a-0)$ и $f(a+0)$, т. е. принимают, что $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Свойства непрерывных функций

Теорема. *Сумма, разность, произведение и частное двух функций, непрерывных в одной и той же точке a, есть функция непрерывная в той же точке, причем в случае частного предполагается, что функция делитель не обращается в нуль при $x = a$. (Теорема остается верной для суммы и произведения любого конечного числа функций).*

Упражнения, связанные с первым определением непрерывной функции

Задача 20,1. Доказать, что функция $f(x) = 3x^3 - 4x + 5$ непрерывна при любом значении x, т. е. непрерывна на бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$.

Решение. Заданная функция определена на бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$. Возьмем из этого интервала произвольное значение $x = a$. На основании известных теорем о пределе функции мы можем написать

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (3x^3 - 4x + 5) = 3a^3 - 4a + 5.$$

Но ведь и $f(a) = 3a^3 - 4a + 5$ и, таким образом, у нас выполнено соотношение (20,1): $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, а это и значит, что рассматриваемая функция непрерывна при $x = a$. Учитывая, что a произвольное число интервала $(-\infty, +\infty)$, мы заключаем, что заданная функция непрерывна при любом значении x, т. е. на бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$.

Задача 20,2. Доказать, что любой многочлен

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

непрерывен при всех значениях x.

Решение. Пусть $x = a$ — произвольное значение x из бесконечного интервала $(-\infty, +\infty)$, в котором определена заданная функция.

Докажем, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Действительно, на основании известной теоремы о пределе целой рациональной функции имеем

$$\lim_{x \to a} f(x) = a_0a^n + a_1a^{n-1} + a_2a^{n-2} + \cdots + a_{n-1}a + a_n.$$

Но полученное выражение есть не что иное, как значение заданной функции при $x = a$, т. е. $f(a)$, и тем самым мы убедились в том, что выполняется соотношение (20,1) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, а потому и заключаем, что многочлен непрерывен всюду, т. е. при любом значении x.

Задача 20,3. Доказать, что любая дробно-рациональная функция

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

($P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены) непрерывна для всех значений x, за исключением тех из них, при которых знаменатель обращается в нуль.

Дробно-рациональная функция определена для всех значений x, кроме тех, которые знаменатель обращают в нуль. Пусть a — произвольное число, такое, что $Q(a) \neq 0$. Из соотношения (14,3) следует, что $\lim\limits_{x \to a} R(x) = R(a)$, т. е. соотношение (20,1) выполнено, и мы заключаем, что *дробно-рациональная функция непрерывна при всех значениях x, кроме тех из них, которые обращают знаменатель в нуль, т. е. дробно-рациональная функция непрерывна при всех значениях x, при которых она определена.*

Задача 20,4 (для самостоятельного решения). При каких значениях x непрерывна дробно-рациональная функция

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 5}{x^2 - 6x + 8}.$$

Ответ. Функция непрерывна всюду, кроме значений $x = 2$ и $x = 4$, при которых знаменатель дроби обращается в нуль. О непрерывности функции в этих точках не может быть и речи, так как они не принадлежат области определения функции.

Задача 20,5 (для самостоятельного решения). Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{1}{x}$.

Ответ. Функция непрерывна при всех значениях x, кроме $x = 0$. Значение $x = 0$ не принадлежит области определения функции: $f(0)$ не существует.

Упражнения, связанные с определением приращения функции

Эти упражнения будут проводиться и на следующем практическом занятии. Читатель должен приобрести прочные навыки в определении приращения функции, так как с необходимостью определять приращение функции приходится очень часто встречаться.

Задача 20,6. Найти приращение Δy функции $f(x) = x^2$ при переходе аргумента от значения $x_1 = 3$ к новому значению $x_2 = 4$.

Решение. Приращение аргумента $\Delta x = x_2 - x_1 = 4 - 3 = 1$. У нас $f(x) = x^2$, а потому $f(x_2) = f(4) = 4^2 = 16$, $f(x_1) = f(3) = 3^2 = 9$, а приращение функции $\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = f(4) - f(3) = 16 - 9 = 7$.

Задача 20,7. Найти приращение Δy функции $f(x) = x^3$ при переходе аргумента от значения x к значению $x + \Delta x$.

Решение. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Найдем $f(x + \Delta x)$. Так как у нас $f(x) = x^3$, то $f(x + \Delta x)$ получим заменой x на $x + \Delta x$ в выражении функции $f(x): f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3$, а потому

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3;$$

$$\Delta y = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3.$$

Пользуясь этой формулой, вычислите, чему равно приращение Δy функции, когда x от значения $x_1 = 2$ переходит к значению $x_2 = 2{,}01$.

Ответ. 0,120 601.

Задача 20,8 (для самостоятельного решения). Найти приращение Δy функции $f(x) = x^3$ при переходе аргумента от значения $x_1 = 2$ к новому значению $x_2 = 3$.

Ответ. $\Delta y = 19$.

Задача 20,9. Найти приращение Δy функции $f(x) = \sin x$ при переходе аргумента от значения x к значению $x + \Delta x$.

Решение. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. У нас $f(x) = \sin x$. Мы найдем $f(x + \Delta x)$, если заменим x на $x + \Delta x$ в выражении функции $f(x)$:

$$f(x + \Delta x) = \sin(x + \Delta x); \quad \Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

и, применяя формулу

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2},$$

получим

$$\Delta y = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}. \tag{20,6}$$

Задача 20,10 (для самостоятельного решения). Найти приращение Δy функции $y = \cos x$ при переходе аргумента от значения x к значению $x + \Delta x$.

Ответ. $$\Delta y = -2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}. \tag{20,7}$$

Задача 20,11 (для самостоятельного решения). Найти приращение функции $f(x) = \sin x$ при переходе аргумента от значения $x_1 = \frac{\pi}{6}$ к значению $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

Ответ. $\frac{1}{2}$.

Задача 20,12. Найти приращение функции $y = a^x$.

Решение. $f(x) = a^x$; $f(x + \Delta x) = a^{x+\Delta x}$; $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$;

$$\Delta y = a^x(a^{\Delta x} - 1). \tag{20,8}$$

Задача 20,13. Найти приращение функции $y = \ln x$.

Решение. У нас $f(x) = \ln x$; $f(x + \Delta x) = \ln(x + \Delta x)$;

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \ln(x + \Delta x) - \ln x;$$

$$\Delta y = \ln\frac{x + \Delta x}{x}; \quad \Delta y = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

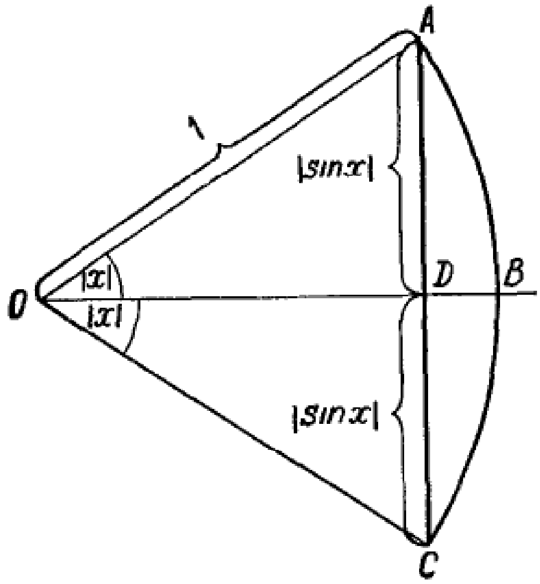
Задача 20,14 (для самостоятельного решения). Найти приращение ΔS функции $S = \frac{gt^2}{2}$ при переходе аргумента от значения t к значению $t + \Delta t$.

Ответ. $\Delta S = gt\Delta t + \frac{g\Delta t^2}{2}$.

Задача 20,15. Доказать, что при $x = 0$ функция $\sin x$ непрерывна.

Решение. Мы должны обнаружить, что $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = \sin 0 = 0$.

Учащийся не должен думать, что мы здесь имеем право просто подставить под знак минуса нуль вместо x. Это мы имели бы право сделать, если бы непрерывность функции $\sin x$ при $x = 0$ была бы уже доказана.



Фиг. 20,4 *а*

Рассмотрим окружность радиуса $OA = 1$ (фиг. 20,4 *а*). Тогда

$$AD = DC = |\sin x|;$$

$$\breve{AB} = \breve{BC} = |x|.$$

Отрезок AD короче дуги $\breve{AB}$, а потому $|\sin x| \leqslant |x|$. Если теперь угол x уменьшать, делая его все меньшим и меньшим по абсолютной величине, мы можем и синус этого угла сделать по абсолютному значению сколь угодно малым, а это значит, что при $x \to 0$ $\sin x$ есть величина бесконечно малая, и ее предел

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0, \text{ т. е. } \lim_{x\to 0} \sin x = \sin 0.$$

И так как здесь выполняется соотношение (20,1): $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, то при $x = 0$ функция $\sin x$ действительно непрерывна.

Задача 20,16. Доказать, что функция $\sin x$ непрерывна при любом значении x.

Решение. В задаче 20,9 для определения приращения $f(x) = \sin x$ была получена формула (20,6), верная при любом значении x.

Воспользуемся теперь вторым определением непрерывной функции (20,2) и докажем, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

На основании результата предыдущей задачи $\sin \frac{\Delta x}{2} \to 0$, когда $\Delta x \to 0$; что касается $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$, то он величина ограниченная при любом значении $x: |\cos x| \leqslant 1$. Произведение же величины бесконечной малой на ограниченную есть величина бесконечно малая, поэтому, когда $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Так как это выполняется при любом значении x, то мы теперь вправе утверждать, что функция $\sin x$ непрерывна при любом значении x (иначе говорят: «непрерывна всюду», «непрерывна на всей числовой оси»). Теперь уже, определяя предел $\sin x$ при $x \to a$, мы вправе с полным основанием писать:

$$\lim_{x \to a} \sin x = \sin a.$$

Задача 20,17 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $f(x) = \cos x$ непрерывна при всех значениях x.

Указание. Воспользоваться формулой (20,7).

Задача 20,18 (для самостоятельного решения). Доказать, что функции $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ непрерывны в любой точке своей области существования.

Указание. Использовать непрерывность всюду функций $\sin x$ и $\cos x$ и теорему о непрерывности частного двух непрерывных функций.

Упражнения, связанные со вторым определением непрерывной функции

Задача 20,19. Пользуясь вторым определением непрерывности функции, доказать, что функция $f(x) = 5x^2 - 6x + 2$ непрерывна в произвольной точке x.

Решение. $f(x + \Delta x) = 5(x + \Delta x)^2 - 6(x + \Delta x) + 2$;

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 10x\Delta x - 6\Delta x + 5\Delta x^2 = \\ = (10x - 6)\Delta x + 5\Delta x^2.$$

Найдем теперь предел Δy при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [(10x - 6)\Delta x + 5\Delta x^2] = 0$$

при любом значении x, что и доказывает непрерывность заданной функции при любом значении x.

Задача 20,20 (для самостоятельного решения). Пользуясь вторым определением непрерывной функции, доказать, что функция $f(x)=\frac{1+x}{1+x^2}$ непрерывна при любом значении x.

Указание. Найти Δy, после чего перейти к пределу при $\Delta x \to 0$.

Задача 20,21 (для самостоятельного решения). Доказать, что при $x=3$ функция $f(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2}$ непрерывна.

Указание. Составить $\Delta y = f(3+\Delta x)-f(3)$ и найти $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y$.

Задача 20,22 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ непрерывна при любом значении x.

Указание. Определить Δy, после чего перейти к пределу при $\Delta x \to 0$,

Упражнения, связанные с классификацией точек разрыва.

Задача 20,23. Испытать на непрерывность при $x=1$ функцию

$$f(x)=2+\frac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}.$$

Решение. Так как знаменатель $1-x$ дроби равен нулю при $x=1$, то $f(x)$ разрывна при $x=1$. Установим характер этой точки разрыва. Найдем сначала левосторонний предел функции $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)$. Если $x\to 1-0$, то можно положить $x=1-\alpha\ (\alpha>0)$ и считать, что α, оставаясь положительной, стремится к нулю. Заменяя x на $1-\alpha$

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{\alpha\to+0}\left(2+\frac{1}{1+2^{\frac{1}{1-(1-\alpha)}}}\right)=\lim_{\alpha\to+0}\left(2+\frac{1}{1+2^{\frac{1}{\alpha}}}\right)=2,$$

так как при $\alpha\to+0$ величина $\frac{1}{\alpha}$ бесконечно большая, $2^{\frac{1}{2}}$ также бесконечно велика, $1+2^{\frac{1}{\alpha}}$ —бесконечно большая величина, обратная ей величина $\frac{1}{1+2^{\frac{1}{\alpha}}}$ — бесконечно мала:

$$\lim_{\alpha\to+0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{\alpha}}}=0,$$

а потому $\lim\limits_{\alpha\to+0}\left(2+\frac{1}{1+2^{\frac{1}{\alpha}}}\right)=2.$

Таким образом,

$$f(1-0)=2.$$

Теперь определим правосторонний предел функции. Если $x \to 1+0$, можно положить $x = 1 + \alpha\ (\alpha > 0)$ и считать, что α, оставаясь положительной, стремится к нулю.

Тогда, заменяя x на $1 + \alpha$, получим:

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{\alpha \to +0} \left(2 + \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{1-(1+\alpha)}}} \right) = \lim_{\alpha \to +0} \left(2 + \frac{1}{1 + 2^{-\frac{1}{\alpha}}} \right) = 3,$$

так как при $\alpha \to +0$, $\frac{1}{\alpha}$ и $2^{\frac{1}{\alpha}}$ — величины бесконечно большие, то

$2^{-\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{\alpha}}}$ — величина бесконечно малая, а поэтому

$$\lim_{\alpha \to +0} (1 + 2^{-\frac{1}{\alpha}}) = 1; \quad \lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{1 + 2^{-\frac{1}{\alpha}}} = 1; \quad \text{а} \lim_{\alpha \to +0} \left(2 + \frac{1}{1 + 2^{-\frac{1}{\alpha}}} \right) = 3$$

и, значит, $f(1+0) = 3$.

Итак, у функции **существуют** и левосторонний предел $f(1-0) = 2$, и правосторонний предел $f(1+0) = 3$, но между собой они не равны. Из этого мы заключаем, что точка $x = 1$ является для заданной функции точкой разрыва первого рода.

Задача 20, 24 (для самостоятельного решения). Испытать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{2}{3 + 5^{\frac{1}{x-2}}}$ при $x = 2$.

Указание. 1) Найти левосторонний предел функции $\lim\limits_{x \to 2-0} f(x)$ (положить $x = 2 - \alpha\ (\alpha > 0)$ и найти предел полученной функции при $\alpha \to +0$). Получится, что $f(2-0) = \frac{2}{3}$. 2) Найти правосторонний предел функции $\lim\limits_{x \to 2+0} f(x)$ (положить $x = 2 + \alpha\ (\alpha > 0)$ и найти предел полученной функции при $\alpha \to +0$). Получится, что $f(2+0) = 0$.

Ответ. Точка $x = 2$ — точка разрыва первого рода: $f(2-0)$ и $f(2+0)$ существуют, но между собой не равны.

Задача 20, 25 (для самостоятельного решения). Испытать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{1}{3 + 5^{\frac{1}{x}}}$ при $x = 0$.

Указание. При $x = 0$ функция терпит разрыв. Левосторонний предел функции $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = \frac{1}{3}$; $f(-0) = \frac{1}{3}$.

Правосторонний предел функции $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = 0 : f(+0) = 0$ (символы 1) $x \to -0$ и 2) $x \to +0$ означают, что: 1) x стремится к нулю, оставаясь меньше нуля; 2) x стремится к нулю, оставаясь больше нуля).

Левосторонний и правосторонний пределы функции существуют $f(-0)=\frac{1}{3}$, $f(+0)=0$, но между собою не равны: $f(-0)\neq f(+0)$.

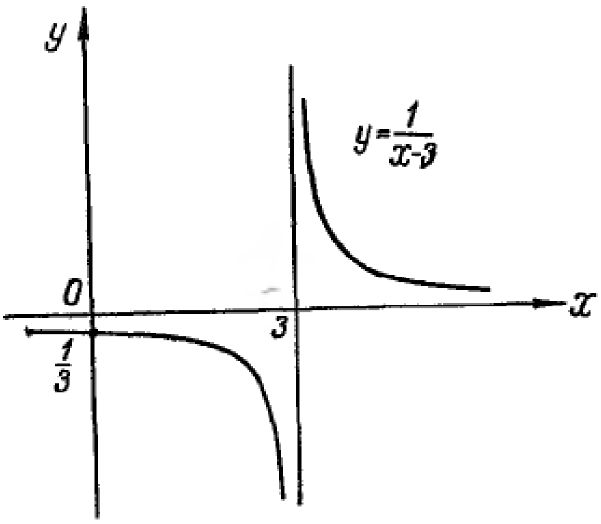
Заключение. Точка $x=0$ — точка разрыва первого рода.

Задача 20, 26 (для самостоятельного решения). Функцию $f(x)= \\ =\frac{5}{2+7^{\frac{4}{5-x}}}$ испытать на непрерывность при $x=5$.

Ответ. $f(5-0)=0$, $f(5+0)=\frac{5}{2}$: $f(5-0)\neq(5+0)$. Точка $x=5$ — точка разрыва первого рода.

Задача 20, 27 (для самостоятельного решения). Какого рода разрыв имеет функция $f(x)=3^{\frac{1}{x}}$ в точке $x=0$. Начертить график.

Ответ. Разрыв второго рода: $f(-0)=0$, $f(+0)=+\infty$.



Фиг. 20,5

Задача 20, 28. Какого рода разрыв имеет функция $y=\frac{1}{x}$ в точке $x=0$.

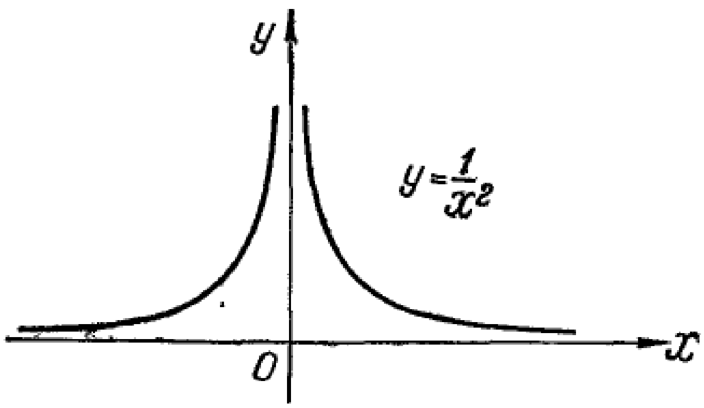
Решение. Левосторонний предел функции $\lim\limits_{x\to-0}\frac{1}{x}=-\infty$, а ее правосторонний предел $\lim\limits_{x\to+0}\frac{1}{x}=+\infty$. Таким образом, здесь не существуют ни предел слева, ни предел справа, а потому точка $x=0$ — точка разрыва второго рода.

Задача 20, 29 (для самостоятельного решения). Какого рода разрыв имеет функция $y=\frac{1}{x-3}$ в точке $x=3$ (фиг. 20,5).

Ответ. Второго рода: при $x\to3$ не существуют ни предел слева, ни предел справа.

Задача 20, 30 (для самостоятельного решения). Какого рода разрыв имеет функция $y=\frac{1}{x^2}$ в точке $x=0$?

Ответ. Второго рода (фиг. 20,6).



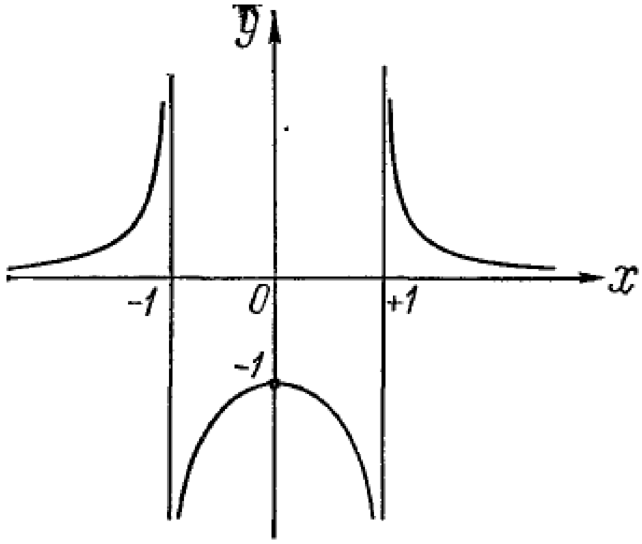
Фиг. 20,6

Задача 20, 31 (для самостоятельного решения) Определить точки разрыва функции $y=\frac{1}{x^2-1}$ и род этих точек разрыва.

Ответ. Точка $x = -1$ и $x = +1$ — точки разрыва второго рода (фиг. 20,7).

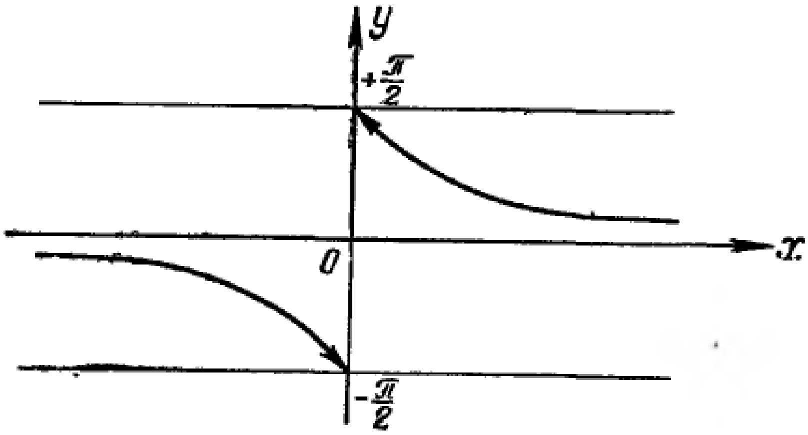
Задача 20, 32. Какого рода разрыв в точке $x = 0$ имеет функция $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

Решение. В точке $x = 0$ функция $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ не существует. Определим левосторонний и правосторонний пределы функции: $\lim\limits_{x\to-0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$, так как при $x \to -0$ величина $\frac{1}{x} \to -\infty$, а $\operatorname{arctg}\frac{1}{x} \to -\frac{\pi}{2}$; $f(-0) = -\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to+0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = +\frac{\pi}{2}$ потому, что при $x \to +0$ величина $\frac{1}{x} \to +\infty$, а $\operatorname{arctg}\frac{1}{x} \to +\frac{\pi}{2}$; $f(+0) = +\frac{\pi}{2}$.



Фиг. 20,7

Таким образом, оба предела — левосторонний и правосторонний — в точке $x = 0$ существуют, но между собою не равны: $f(-0) \neq f(+0)$, и точка $x = 0$ — точка разрыва первого рода (фиг. 20,8).



Фиг. 20,8

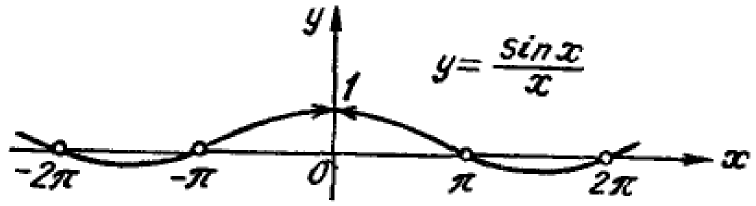
Задача 20, 33. Какого рода разрыв имеет функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ в точке $x = 0$?

Решение. В этой точке функция разрывна, так как $f(0)$ не существует. Однако нам известно, что при стремлении x к нулю по любому закону ($x \to 0$)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

и, таким образом, существуют левосторонний предел функции $f(-0)$, правосторонний предел функции $f(+0)$ и они между собою равны: $f(-0) = f(+0) = 1$. Но $f(0)$ не существует. На кривой, которая является графиком этой функции, отсутствует точка (она как бы «вырвана»), абсцисса которой равна нулю. Если условиться, что при $x = 0$ функция $\frac{\sin x}{x} = 1$, то тем самым график функции станет сплошным (непрерывным), и разрыв будет «устранен» (фиг. 20,9).

Заключение: Для функции $\frac{\sin x}{x}$ точка $x = 0$ является точкой «устранимого» разрыва, так как $f(-0) = f(+0)$, и функция



Фиг. 20,9.

в этой точке может быть доопределена так, что можно взять $f(0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$.

Замечание. Термин «устранимый» взят в кавычки потому, что фактически разрыв функции $\frac{\sin x}{x}$ в точке $x = 0$ ничем устранить нельзя, так как он существует в действительности. Можно только условно принять, что значение функции в этой точке равно 1. Такое соглашение восстановит на кривой отсутствующую на ней точку $(0,1)$.

Это замечание следует иметь в виду и при решении других задач, в которых разрыв будет «устранимым».

Задача 20,34. Испытать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$ в точке $x = 2$.

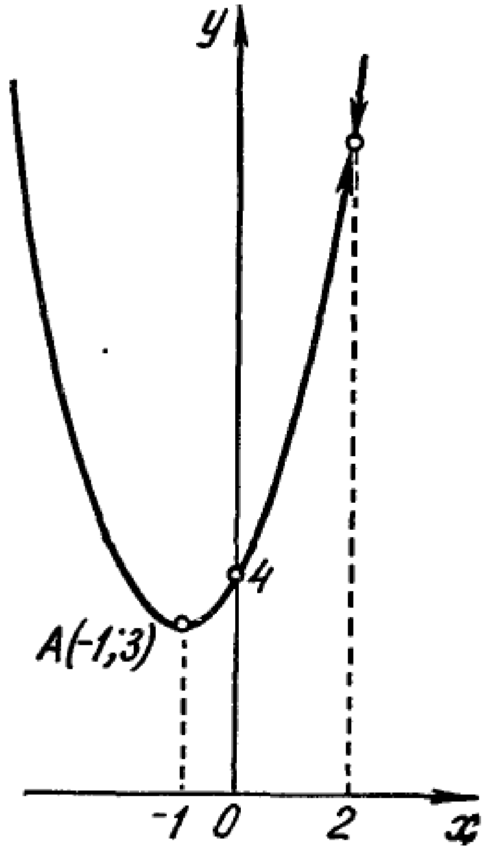
Решение. Так как при $x = 2$ функция не существует и тем самым нарушено первое условие непрерывности, то в этой точке функция терпит разрыв. Найдем левосторонний и правосторонний пределы функции

$$\lim_{x\to 2-0} = \frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x\to 2-0}(x^2+2x+4) = 12, \quad f(2-0) = 12;$$

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x\to 2+0}(x^2+2x+4) = 12; \quad f(2+0) = 12.$$

Таким образом, существует и предел этой функции при $x \to 2$, так как $f(2-0) = f(2+0)$. В точке $x = 2$ разрыв можно «устранить», если значение функции в этой точке принять равным 12, т. е. если условиться, что $f(2) = \lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = 12$.

Точка $x = 2$ — точка «устранимого» разрыва. Графиком функции $f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$ является парабола (фиг. 20, 10), на которой нет точки с абсциссой $x = 2$. На графике эта точка обозначена кружком и к ней направлены стрелки. Сплошной ход кривой в этой точке оборвался. Слева и справа от точки $x = 2$ график функции — непрерывная линия.



Фиг. 20, 10.

Задача 20, 35 (для самостоятельного решения). 1) Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$ и начертить график функции. 2) Чему должно быть равно $f(-3)$, чтобы пополненная этим значением функция была непрерывна при $x = -3$?

Ответ. Точка $x = -3$ — точка «устранимого» разрыва. Следует взять $f(-3) = -6$.

Задача 20, 36 (для самостоятельного решения). 1) Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{x^3+1}{x+1}$ и начертить график функции. Как следует доопределить эту функцию при $x = -1$, чтобы при $x = -1$ она была непрерывной?

Задача 20, 37. Доказать, что функция $f(x) = x^3 \cos^2 x + \frac{x^4}{x^2+1}$ непрерывна при всех значениях x.

Решение. Воспользуемся теоремами о сумме произведении и частном непрерывных функций Так как функция $\cos x$ непрерывна при всех значениях x, то и ее квадрат есть функция, непрерывная при всех значениях x, как произведение двух непрерывных функций: $\cos^2 x = \cos x \cos x$.

Функция $\varphi(x) = x$ непрерывна всюду, а потому и функция $\varphi_1(x) = x^3$ также всюду непрерывна, как произведение непрерывных функций: $\varphi_1(x) = (x)^3 = xxx$.

Произведение $x^3 \cos^2 x$ — функция непрерывная, как произведение непрерывных функций x^3 и $\cos^2 x$.

Второе слагаемое $\frac{x^4}{x^2+1}$ — функция непрерывная, как частное двух непрерывных функций, причем знаменатель дроби не имеет действительных корней (уравнение $x^2+1=0$ не имеет действительных решений).

Заключение. Заданная функция непрерывна при всех значениях x.

Задача 20, 38 (для самостоятельного решения). Пользуясь теоремами о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций, решить вопрос о непрерывности функций:

$$1)\ f(x)=\frac{x^2}{9-x^2};\qquad 2)\ \varphi(x)=\frac{\sin x}{1-x^3};\qquad 3)\ \varphi(x)=\frac{x^2+x+1}{\sin x}.$$

Ответ. 1) функция непрерывна при всех значениях x, кроме значений $x_1=-3$ и $x_2=3$.

2) Функция непрерывна для всех значений x, кроме $x=1$.

3) Функция непрерывна для всех x, кроме $x=n\pi$, где n — любое целое число.

ДВАДЦАТЬ ПЕРВОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Задачи, приводящие к вычислению производной. Непосредственное вычисление производной из определения. Геометрический и механический смысл производной.

Это практическое занятие является первым по разделу «производная и дифференциал функции». К вычислению производной данной функции мы приходим всякий раз, когда требуется определить скорость изменения одной величины (функции), в зависимости от изменения другой величины (независимой переменной).

Определение 1. *Средней скоростью изменения функции $y=f(x)$ при переходе независимой переменной от значения x к значению $x+\Delta x$ называется отношение приращения Δy функции к приращению Δx независимой переменной:*

$$V_{\text{ср}}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (21,1)$$

Определение 2. *Истинной (мгновенной) скоростью изменения функции y при данном значении x называют предел, к которому стремится средняя скорость изменения функции при стремлении к нулю Δx:*

$$V=\lim_{\Delta x\to 0}V_{\text{ср}};$$

$$V=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (21,2)$$

При вычислении этого предела следует x считать величиной постоянной. Переменной же величиной здесь является Δx (конечно, значение x можно выбрать произвольно из области существования