действительных корней (уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет действительных решений).

Заключение. Заданная функция непрерывна при всех значениях x.

Задача 20, 38 (для самостоятельного решения). Пользуясь теоремами о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций, решить вопрос о непрерывности функций:

$$1)\ f(x) = \frac{x^2}{9 - x^2}; \qquad 2)\ \varphi(x) = \frac{\sin x}{1 - x^3}; \qquad 3)\ \varphi(x) = \frac{x^2 + x + 1}{\sin x}.$$

Ответ. 1) функция непрерывна при всех значениях x, кроме значений $x_1 = -3$ и $x_2 = 3$.

2) Функция непрерывна для всех значений x, кроме $x = 1$.

3) Функция непрерывна для всех x, кроме $x = n\pi$, где n — любое целое число.

ДВАДЦАТЬ ПЕРВОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Задачи, приводящие к вычислению производной. Непосредственное вычисление производной из определения. Геометрический и механический смысл производной.

Это практическое занятие является первым по разделу «производная и дифференциал функции». К вычислению производной данной функции мы приходим всякий раз, когда требуется определить скорость изменения одной величины (функции), в зависимости от изменения другой величины (независимой переменной).

Определение 1. *Средней скоростью изменения функции $y = f(x)$ при переходе независимой переменной от значения x к значению $x + \Delta x$ называется отношение приращения Δy функции к приращению Δx независимой переменной:*

$$V_{\text{ср}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (21,1)$$

Определение 2. *Истинной (мгновенной) скоростью изменения функции y при данном значении x называют предел, к которому стремится средняя скорость изменения функции при стремлении к нулю Δx:*

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} V_{\text{ср}};$$

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (21,2)$$

При вычислении этого предела следует x считать величиной постоянной. Переменной же величиной здесь является Δx (конечно, значение x можно выбрать произвольно из области существования функции, но после того как этот выбор сделан, значение x должно оставаться постоянным, а изменению может подвергаться только Δx).

Найденный из (21,2) предел будет являться функцией x. О скорости изменения функции при данном значении x имеет смысл говорить лишь в том случае, когда предел (21,2) существует и не зависит от того, каким способом Δx стремится к нулю.

Функция, полученная в результате определения предела (21,2), называется производной функцией от функции $f(x)$. Сокращенно найденная из (21,2) функция называется просто производной.

Определение производной. *Производной функции $f(x)$ по независимой переменной x называется предел, к которому стремится отношение приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда приращение аргумента стремится к нулю. Операция нахождения производной называется дифференцированием функции.*

Производная функции при частном значении x есть число, если при этом значении x производная имеет конечное значение.

Обозначение производной. Производная обозначается одним из символов: y'_x, y', $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$, а ее значение при $x = x_0$ обозначается так:

$$y'_x(x_0);\; y'(x_0);\; y'_0;\; \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0};\; f'(x_0).$$

Когда мы нашли производную функцию $f'(x)$, тем самым мы нашли скорость изменения данной функции в точке x.

Механическое значение производной

1. Средняя скорость. Закон движения точки считается заданным, если ее путь s* есть известная функция времени t, т. е. если

$$s = f(t) \tag{21,3}$$

(s — расстояние движущегося тела от начала отсчета). Будем считать, что $s > 0$, если оно находится справа от начала отсчета и $s < 0$, если оно находится слева от начала отсчета. Средняя скорость движения $V_{\text{ср}}$ за время от момента t до момента $t + \Delta t$ вычисляется по формуле

$$V_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \tag{21,4}$$

Истинная скорость движения в момент времени t по определению есть предел, к которому стремится средняя скорость $V_{\text{ср}}$ за промежуток времени Δt, когда промежуток времени $\Delta t \to 0$. Или

* Предполагается, что точка движется в одном направлении.

иначе: скоростью движения в данный момент времени t называется предел отношения приращения пути Δs к приращению времени Δt, когда приращение времени Δt стремится к нулю.

Скорость в момент времени t определяется равенствами

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} V_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \qquad (21,5)$$

Из сравнения (21,5) с (21,2) видно, что скорость точки в момент времени t есть производная от пути s по времени t.

Геометрическое значение производной

Производная от функции $f(x)$, вычисленная при заданном значении x, равна тангенсу угла, образованного положительным направлением оси Ox и положительным направлением касательной, проведенной к графику этой функции в точке с абсциссой x.*

Упражнения этого практического занятия имеют целью закрепить у студента понимание определения производной, ее механического и геометрического значения.

Мы будем решать задачи, в которых производная вычисляется не из готовой формулы, как это делается на следующих практических занятиях, а непосредственно. исходя из ее определения.

После твердого усвоения определения производной мы перейдем к упражнениям, которые помогут выработать прочные навыки вычисления производных.

Задача 21,1. Вычислить производную функции $y = x^2$ при $x = 3$.

Решение. Проведем решение этой задачи двумя способами:

1) сначала найдем производную как функцию x, а потом вычислим ее значение при $x = 3$, т. е. $y'(3)$.

2) значение производной будем вычислять, исходя из значения $x = 3$:

$$y = x^2, \text{ т. е. } f(x) = x^2;$$

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2.$$

Теперь найдем приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2 = (2x + \Delta x)\Delta x$.

Разделим теперь приращение функции Δy на приращение аргумента Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2x + \Delta x)\Delta x}{\Delta x}; \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

В этом месте мы можем сказать, что найденное отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ есть не что иное, как средняя скорость изменения данной функции $f(x) = x^2$ в промежутке $(x, x + \Delta x)$.

* Положительным направлением на касательной считается то, в котором возрастает абсцисса.

Для того чтобы найти производную y' этой функции, нужно найти предел полученного отношения при $\Delta x \to 0$. Переходя к пределу, получаем

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

(еще раз напоминаем, что здесь при отыскании предела величину x мы должны считать постоянной).

Итак $y' = 2x$.

При $x = 3$ значение производной $y'(3) = 2 \cdot 3 = 6$. Найденное число 6 есть не что иное, как скорость изменения функции $f(x) = x^2$ при $x = 3$.

2) Найдем теперь значение производной данной функции при $x = 3$, минуя нахождение производной, как функции x.

У нас $f(x) = x^2$; $f(3) = 3^2$.

Перейдем от значения $x = 3$ к значению $x = 3 + \Delta x$;

$$f(3 + \Delta x) = (3 + \Delta x)^2; \quad f(3) = 9;$$

$$\Delta y = f(3 + \Delta x) - f(3) = (3 + \Delta x)^2 - 9 = 6\Delta x + (\Delta x)^2 = (6 + \Delta x)\Delta x;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6 + \Delta x; \quad y'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6 + \Delta x) = 6.$$

Найдя производную $y'(3)$, мы нашли и тангенс угла между положительными направлениями оси Ox и касательной к графику функции $y = x^2$ в точке с абсциссой $x = 3$, т. е. угловой коэффициент касательной к параболе $y = x^2$ в точке с абсциссой $x = 3$.

Задача 21,2 (для самостоятельного решения). Вычислить производную функции $y = x^3$ при $x = 2$.

Дать геометрическое истолкование полученного результата. Задачу решить двумя способами по примеру решения предыдущей задачи. Найти среднюю скорость изменения функции в промежутке от $x_1 = 3$ до $x_2 = 3{,}1$.

Ответ. $y'(2) = 12$; средняя скорость изменения функции на интервале $(3;\ 3{,}1)$ $v_{ср} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2$. Подставляя сюда $x = 1$, $\Delta x = 0{,}1$, получим $v_{ср} = 27{,}91$.

Задача 21,3. Точка движется по прямой по закону $S = t^3$, где S — путь, измеряемый в сантиметрах, а t — время в секундах. Найти среднюю скорость точки за время от $t = 2$ *сек* до $t_1 = (2 + \Delta t)$ *сек*, считая, что $\Delta t = 1$; $0{,}5$, $0{,}01$; $0{,}001$. Вычислить также истинную скорость точки в момент $t = 2$ *сек*.

Решение. Согласно результату предыдущей задачи, если $y = x^3$, то $\Delta y = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$. Так как в задаче, которую мы решаем, функция обозначена буквой S, а аргумент буквой t, то выражение для Δy надо переписать, заменив y на S, а x на t:

$$\Delta S = 3t^2\Delta t + 3t\Delta t^2 + \Delta t^3,$$

а средняя скорость будет равна

$$V_{ср} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = 3t^2 + 3t\Delta t + \Delta t^2.$$

Если $\Delta t = 1$ *сек*, то, приняв, что $t = 2$ *сек*, получим

$$V_{ср} = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 1^2 = 19 \text{ см/сек};$$

при $t = 2$ *сек*, а $\Delta t = 0{,}01$ *сек*;

$$V_{ср} = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 \cdot 0{,}01 + (0{,}01)^2 = 12{,}0601 \text{ см/сек};$$

при $t = 2$ *сек*, а $\Delta t = 0{,}001$ *сек*;

$$V_{ср} = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 \cdot 0{,}001 + (0{,}001)^2 = 12{,}006\,001 \text{ см/сек}.$$

Найдем теперь истинную скорость в момент времени $t = 2$ *сек*. У нас

$$V_{ср} = 3t^2 + 3t\Delta t + \Delta t^2.$$

Истинная скорость по (21,4) будет равна

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} V_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} (3t^2 + 3t\Delta t + \Delta t^2) = 3t^2.$$

При $t = 2$ *сек* получаем $V = 3 \cdot 2^2 = 12$ *см/сек*.

Все полученные нами средние скорости отличаются от истинной, но из рассмотрения полученных значений средних скоростей мы приходим к выводу, что они тем ближе к истинной скорости в момент $t = 2$ *сек*, чем меньше Δt.

Задача 21,4 (для самостоятельного решения). Точка движется по прямой по закону $S = 5t^3 - 3t^2 + 4$, где путь S измеряется в сантиметрах, а время t — в секундах. Найти среднюю скорость за промежуток времени от $t_1 = 1$ до $t_2 = (1 + \Delta t)$, считая $\Delta t = 0{,}5;\ 0{,}3;\ 0{,}1$.

Определить также истинную скорость в момент $t = 1$ *сек*.

Указание. 1) Найти ΔS; 2) $V_{ср} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$.

Ответ. При $\Delta t = 0{,}5$ $V_{ср} = 15{,}25$ *см/сек*; при $\Delta t = 0{,}1$ $V_{ср} = 10{,}21$ *см/сек*; $V = 15t^2 - 6t$, $V(1) = 9$ *см/сек*.

Задача 21,5. Функция $y = \frac{2x+1}{3x+1}$. Вычислить производную при $x = 1$.

Решение. Сначала найдем производную y' как функцию x, а потом вычислим $y'(1)$.

Наращенное значение функции $y + \Delta y$ мы найдем, если заменим в аналитическом выражении функции x на $x + \Delta x$. Имеем

$$y + \Delta y = \frac{2(x+\Delta x)+1}{3(x+\Delta x)+1}; \quad \Delta y = \frac{2(x+\Delta x)+1}{3(x+\Delta x)+1} - \frac{2x+1}{3x+1} =$$

$$= -\frac{\Delta x}{[3(x+\Delta x)+1](3x+1)}, \text{ а } \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{[3(x+\Delta x)+1](3x+1)}.$$

Эта формула дает выражение средней скорости изменения данной функции на интервале $(x, x+\Delta x)$. Чтобы найти производную, перейдем к пределу, устремляя Δx к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ -\frac{1}{[3(x+\Delta x)+1](3x+1)} \right\};$$

$$y' = -\frac{1}{(3x+1)^2}; \quad y'(1) = -\frac{1}{16}.$$

Найденный результат геометрически истолковывается так: угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \frac{2x+1}{3x+1}$ в точке с абсциссой $x = 1$ равен $-\frac{1}{16}$; $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{16}$.

Если точка движется по прямой по закону $y = \frac{2x+1}{3x+1}$, где x — время в секундах, а y — путь в метрах, то найденное значение производной $y'(1) = -\frac{1}{16}$ — скорость движения в момент времени $t = 1$ *сек*, а знак минус у скорости показывает, что с увеличением времени расстояние движущейся точки от начала отсчета пути уменьшается.

Эту задачу можно решить и иначе: вычислить значение производной заданной функции при $x = 1$, минуя определение ее производной при любом x.

Перейдем от значения $x = 1$ к значению $x = 1 + \Delta x$. У нас $f(x) = \frac{2x+1}{3x+1}$. Тогда $f(1) = \frac{2 \cdot 1+1}{3 \cdot 1+1} = \frac{3}{4}$;

$$f(1+\Delta x) = \frac{2(1+\Delta x)+1}{3(1+\Delta x)+1} = \frac{2\Delta x+3}{3\Delta x+4};$$

в точке $x = 1$ приращение функции $\Delta y = f(1+\Delta x) - f(1)$;

$$\Delta y = \frac{2\Delta x+3}{3\Delta x+4} - \frac{3}{4} = \frac{-\Delta x}{4(3\Delta x+4)}; \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{4(3\Delta x+4)};$$

а

$$y'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{4(3\Delta x+4)} = -\frac{1}{16}.$$

Таким образом, найдена производная заданной функции при $x = 1$ без определения производной как функции x.

Задача 21,6 (для сомостоятельного решения). Найти производную функции $y = \sqrt{x}$ при $x = 9$.

Ответ. $y'(9) = \frac{1}{6}$

Задача 21,7 (для самостоятельного решения). Доказать, что для линейной функции $y = kx + b$ отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ есть величина постоянная.

Задача 21,8 (для самостоятельного решения). Пользуясь определением производной, найти производную функции $y=\sqrt{x^2-1}$ при $x=\sqrt{5}$.

Указания: 1) $\Delta y=\sqrt{(x+\Delta x)^2-1}-\sqrt{x^2-1}$; 2) при определении $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ следует числитель и знаменатель дроби умножить на $\sqrt{(x+\Delta x)^2-1}+\sqrt{x^2-1}$; 3) $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

Ответ. $y'(\sqrt{5})=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Задача 21,9 (для самостоятельного решения). Закон движения точки по прямой задан формулой $s=t^3-3t^2+3t+5$ (s — в метрах, t — в секундах). В какие моменты времени t скорость точки равна нулю?

Ответ. $V=3t^2-6t+3$; $V=0$ при $t=1$ *сек*.

Задача 21,10 (для самостоятельного решения). Две точки движутся по прямой по законам $s_1=t^3-5t^2+17t-4$; $s_2=t^3-3t$. В какой момент времени их скорости равны?

Ответ. $t=2$ *сек* ($V_1=3t^2-10t+17$; $V_2=3t^2-3$).

Задача 21,11 (для самостоятельного решения). Тело, брошенное вверх, движется по закону $s=-4{,}905t^2+981t+950$ (s — в метрах, t — в секундах). Найти: 1) скорость тела в любой момент времени и его начальную скорость; 2) в какой момент времени скорость тела станет равной нулю и какую наивысшую высоту в этот момент времени достигнет тело.

Ответ. 1) $V=-9{,}81t+981$; $V_0=981$ *м/сек*; 2) $t=100$ *сек*; $s(100)=50$ *км*.

ДВАДЦАТЬ ВТОРОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: *Дифференцирование алгебраических функций.*

Это практическое занятие отводится для упражнений в определении производных алгебраических функций. Эти упражнения продолжаются и на следующем практическом занятии. Операция определения производной функции называется дифференцированием функции.

Вычисление производных мы будем вести не непосредственно, исходя из определения производной, а по формулам, с выводом которых читатель уже знаком. Здесь приводится для ссылок и справок -

СВОДКА ФОРМУЛ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ

Во всех приведенных ниже формулах функции u и v считаются функциями независимой переменной $x: u=u(x)$; $v=v(x)$. Эту таблицу читатель должен твердо выучить наизусть.

$$y=c \ (c \text{ — постоянная});\ y'=0 \qquad (22{,}1)$$

(производная постоянной величины равна нулю),

$$y = x; \quad y' = 1 \qquad (22,2)$$

(производная независимой переменной равна 1)

$$y = cu \ (c \text{ — постоянная}); \quad y' = cu' \qquad (22,3)$$

(постоянный множитель можно выносить за знак производной)

$$y = u \pm v; \ y' = u' \pm v' \qquad (22,4)$$

$$y = v \cdot u; \ y' = u'v + uv' \qquad (22,5)$$

$$y = \frac{u}{v}. \quad y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \qquad (22,6)$$

$$y = \frac{a}{u}; \quad y' = -\frac{a}{u^2} \ u' \ (a \text{ — постоянная величина}); \qquad (22,7)$$

$$y = u^n, \ y' = nu^{n-1} \ u' \qquad (22,8)$$

(n — любое действительное число)

$$y = \sqrt{u}; \qquad y' = \frac{1}{2\sqrt{u}}u'; \qquad (22,9)$$

$$y = a^u; \ y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'; \ y = e^u; \ y' = e^u u'; \ a > 0, \ a \neq 1; \qquad (22,10)$$

$$y = \log_a u; \qquad y' = \frac{1}{u}u' \log_a e = \frac{u'}{u \ln a}; \qquad (22,11)$$

$$y = \ln u; \qquad y' = \frac{1}{u}u'; \qquad (22,12)$$

$$y = \sin u; \qquad y' = \cos u \ \ u'; \qquad (22,13)$$

$$y = \cos u; \qquad y' = -\sin u \ \ u'; \qquad (22,14)$$

$$y = \operatorname{tg} u; \qquad y' = \frac{1}{\cos^2 u}u'; \qquad (22,15)$$

$$y = \operatorname{ctg} u; \qquad y' = -\frac{1}{\sin^2 u}u'; \qquad (22,16)$$

$$y = \sec u; \qquad y' = \sec u \operatorname{tg} u \cdot u'; \qquad (22,17)$$

$$y = \operatorname{cosec} u; \qquad y' = -\operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{ctg} u \ \ u'; \qquad (22,18)$$

$$y = \arcsin u; \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'; \qquad (22,19)$$

$$y = \arccos u; \qquad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'; \qquad (22,20)$$

$$y = \operatorname{arctg} u; \qquad y' = \frac{1}{1+u^2}u'; \qquad (22,21)$$

$$y = \operatorname{arcctg} u; \qquad y' = -\frac{1}{1+u^2}u'. \qquad (22,22)$$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Если $y = f(u)$, а u является не независимой переменной, а функцией независимой переменной $x: u = \varphi(x)$, то, таким образом, $y = f(\varphi(x))$.

Функция y называется в этом случае сложной функцией x. Переменная u называется промежуточной переменной. Производная сложной функции определяется на основании такой теоремы:

Пусть $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$, причем для соответствующих друг другу значений x и u существуют конечные производные y'_u и u'_x. Тогда сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет конечную производную по x, и эта производная определяется по формуле

$$y'_x = y'_u u'_x{}^*, \tag{22,23}$$

причем производная y'_u вычисляется так, как если бы и было независимой переменной. Короче: производная сложной функции равна произведению производной данной функции по промежуточной переменной на производную от промежуточной переменной по независимой переменной.

Эта теорема распространяется и на сложные функции, которые задаются с помощью цепи, содержащей три и более звена. Например, если $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = \psi(x)$, т. е. если $y = f\{\varphi([\psi(x)]\}$, то

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x. \tag{22,24}$$

Формулы (22,23) и (22,24) дифференцирования сложной функции являются очень важными.

Прежде чем приступить к решению задач, сделаем замечание, которым нам неоднократно придется пользоваться:

Если функция, которую надо продифференцировать, не является сложной, то мы в формулах (22,3) — (22,22) будем полагать, что $u = x$, т. е. u — независимая переменная, а тогда по формуле (22,2) $u'_x = 1$ (производная независимой переменной равна единице), и поэтому, применяя указанные формулы, на u' умножать не придется, так как такое умножение равносильно умножению на единицу, а, как известно, умножение на единицу не изменяет произведения.

Сначала решим самые простые задачи.

Задача 22,1. Найти производные функций:

$$1)\ y = x^4;\quad 2)\ y = x^5;\quad 3)\ y = \sqrt{x};\quad 4)\quad y = \sqrt[4]{x^3}.$$

Решение. Учитывая замечание, которое только что сделано, по формуле (22,8), полагая в ней $u = x$, имеем:

1) В этом примере показатель степени $n = 4$, а потому $y' = 4x^3$;

2) Здесь $n = 5$, а потому $y' = 5x^4$;

---

* Индексы у производных указывают на то, по какому переменному производится дифференцирование.

3) Если $y = \sqrt{x}$, то, переписав пример в виде $y = x^{\frac{1}{2}}$, полагая в формуле (22,8) $n = \frac{1}{2}$, получаем $y' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

При решении этого примера можно было сразу воспользоваться формулой (22,9).

4) Пример можно переписать так: $y = x^{\frac{3}{4}}$. Здесь $n = \frac{3}{4}$, а $y' = \frac{3}{4} x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$.

Задача 22,2. Найти производные функций:

1) $y = 5x^3$, 2) $y = -4x^2$, 3) $y = 7\sqrt{x}$; 4) $y = \frac{8}{x^2}$, 5) $y = 4\sqrt[3]{x^2}$.

Решение. При решении всех этих примеров можно пользоваться формулой (22,8) и надо учесть, что постоянный множитель можно выносить за знак производной (формула (22,3)).

1) $y' = 5(x^3)'$ (здесь постоянный множитель 5 вынесен за знак производной); $y' = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2$ $((x^3)' = 3x^2)$;

2) $y' = -4(x^2)' = -4 \cdot 2x = -8x$ (постоянный множитель -4 вынесен за знак производной, а $(x^2)' = 2x$);

3) $y = 7x^{\frac{1}{2}}$; $y' = 7(x^{\frac{1}{2}})' = 7 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = 7\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{7}{2\sqrt{x}}$ $\left(\text{Постоянный множитель 7 вынесен за знак производной, а } (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}\right)$. Здесь можно было сразу воспользоваться формулой (22,9), и тогда, если $y = 7\sqrt{x}$, то $y' = 7\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{7}{2\sqrt{x}}$.

Учащемуся рекомендуется запомнить (это очень часто встречается), что если $y = \sqrt{x}$, то $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

4) Перепишем пример в виде $y = 8x^{-2}$, тогда $y' = 8(x^{-2})' = 8(-2x^{-3})$, $y' = -\frac{16}{x^3}$ (постоянный множитель 8 вынесен за знак производной, а $(x^{-2})' = -2x^{-2-1} = -2x^{-3}$). Можно было сразу воспользоваться формулой (22,7), взяв в ней $a = 8$; $u = x^2$, а $u' = 2x$. Здесь уже на u' придется умножить, так как u — не независимая переменная, а ее функция: $u = x^2$.

Имеем $y = \frac{8}{x^2}$; $y' = -\frac{8}{x^4}\underbrace{(x^2)'}_{\text{производная знаменателя}} = -\frac{8}{x^4}2x = -\frac{16}{x^3}$, т. е. то же, что и раньше, но функцию, данную для дифференцирования, не пришлось преобразовать.

5) Данную функцию перепишем в виде $y = 4x^{\frac{2}{3}}$; тогда $y' = 4(x^{\frac{2}{3}})' = 4 \cdot \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{8}{3\sqrt[3]{x}}$.

Задача 22,3 (для самостоятельного решения). Найти производные функций: 1) $y = 7x^6$; 2) $y = 8\sqrt{x}$; 3) $y = \frac{4}{x^5}$.

Ответ. 1) $y' = 42x^5$; 2) $y' = \frac{4}{\sqrt{x}}$; 3) $y' = -\frac{20}{x^6}$.

Задача 22,4. Найти производные функции:

1) $y = \frac{6}{\sqrt{x}}$; 2) $y = \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}$; 3) $y = -\frac{5}{4x^3}$; 4) $y = \frac{7\sqrt{x}}{8}$.

Решение. Здесь для решения всех примеров удобно применить формулу (22,7):

$$1)\ y' = -\frac{6}{(\sqrt{x})^2}\underbrace{(\sqrt{x})'}_{\substack{\text{производная}\\ \text{знаменателя}}} = -\frac{6}{x}\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{3}{x\sqrt{x}};$$

$$2)\ y' = -\frac{4}{(\sqrt[3]{x^2})^2}\underbrace{(\sqrt[3]{x^2})'}_{\substack{\text{производная}\\ \text{знаменателя}}} = -\frac{4}{\sqrt[3]{x^4}}(x^{\frac{2}{3}})' = -\frac{4}{x\sqrt[3]{x}}\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} =$$

$= -\frac{8}{3x\sqrt[3]{x^2}}$ (здесь можно было также воспользоваться формулой (22,8), но данную функцию переписать в виде $y = 4x^{-\frac{2}{3}}$, тогда $y' = 4(x^{-\frac{2}{3}})' = 4\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{8}{3}x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{8}{3}\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}}\Big)$;

$$3)\ y' = \frac{5}{(4x^3)^2}\underbrace{(4x^3)'}_{\substack{\text{производная}\\ \text{знаменателя}}} = \frac{5}{16x^6}4(x^3)' = \frac{20}{16x^6}3x^2 = \frac{15}{4x^4}$$ (можно поступить и иначе: данную функцию переписать в виде

$$y = -\frac{5}{4}x^{-3};\ y' = -\frac{5}{4}(x^{-3})' = -\frac{15}{4}x^{-4} = \frac{15}{4x^4}\Big);$$

$$4)\ y' = \frac{7}{8}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{7}{16\sqrt{x}}.$$

Если дифференцируется дробь с постоянным знаменателем, то применять формулу (22,6) для дифференцирования дроби не следует, а поступить надо так: взять производную только от числителя дроби, а знаменатель оставить без изменения:

$$y = \frac{u}{c} = \frac{1}{c}u;\ y' = \frac{1}{c}u' = \frac{u'}{c}.$$

Следует запомнить: ***производная от дроби с постоянным знаменателем равна производной числителя, разделенной на тот же знаменатель.***

Использование здесь формулы (22,6) привело бы к ненужному усложнению: $y = \frac{u}{c}$; $y' = \frac{u'c - c'u}{c^2} = \frac{u'c - 0 \quad u}{c^2} = \frac{u'c}{c^2} = \frac{u'}{c}$ ($c' = 0$ потому, что производная постоянной величины равна нулю).

Если отыскивается производная от дроби с постоянным числителем, то также не следует применять формулу (22,6) для дифференцирования дроби, а надо воспользоваться формулой (22,7) для дифференцирования дроби с постоянным числителем;

$$y = \frac{a}{u}; \quad y' = -\frac{a}{u^2} u'.$$

Если здесь пользоваться формулой для дифференцирования дроби, то получим

$$y = \frac{a}{u}; \quad y' = \frac{a'u - au'}{u^2} = \frac{0 \quad u - au'}{u^2} = -\frac{au'}{u^2} = -\frac{a}{u^2} u'.$$

Такой способ вычисления производной от дроби с постоянным числителем следует считать нецелесообразным.

Задача 22,5 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

$$1) \ y = \frac{a}{x^n}; \quad 2) \ y = \frac{5}{\sqrt[4]{x^3}}; \quad 3) \ y = \frac{\sqrt[6]{x^5}}{8}; \quad 4) \ y = \frac{4\sqrt{x}}{7}.$$

Ответ. 1) $y' = -\frac{an}{x^{n+1}}$; 2) $y' = -\frac{15}{4x\sqrt[4]{x^3}}$; 3) $y' = \frac{5}{48\sqrt[6]{x}}$; 4) $y' = \frac{2}{7\sqrt{x}}$.

Задача 22,6. Найти производную функции $y = 5x^3 - 3x^2 + x - 1$.

Решение. Заданная функция есть алгебраическая сумма нескольких функций. Известно (формула (22,4), что производная алгебраической суммы функций равна такой же алгебраической сумме производных этих функций, а потому $y' = (5x^3)' - (3x^2)' + x' - (1)'$. Здесь мы дифференцирование выполним без промежуточных записей:

$$y' = 15x^2 - 6x + 1$$

(производная от x равна $1: x' = 1$, а производная 1 равна нулю, как производная постоянной величины).

Задача 22,7 (для самостоятельного решения). Найти производные функций: 1) $y = a\sqrt{x} + x\sqrt{a}$; 2) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{13}{5}x^5 - 2x^6 + \frac{4}{7}x^7$; 3) $y = 9x^7 - \frac{3}{x^5} - \frac{3}{x^{11}} - \frac{a}{x^m}$;

4) $y = 3x^2\sqrt[3]{x} - 4x\sqrt[4]{x^3} + 9\sqrt[3]{x^2} - 6\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{4}{7x^2\sqrt[3]{x}}$.

Указание. Перейти к дробным показателям степеней.

Ответ. 1) $y' = \frac{a}{2\sqrt{x}} + \sqrt{a}$ (при дифференцировании второго слагаемого учесть, что $\sqrt{a}$ — постоянная величина, а $x' = 1$);

2) $y' = x^2(1 - 6x + 13x^2 - 12x^3 + 4x^4)$;

3) $y' = 63x^6 + \frac{15}{x^6} + \frac{33}{x^{12}} + \frac{am}{x^{m+1}}$;

4) $y' = 7x\sqrt[3]{x} - 7\sqrt[4]{x^3} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x\sqrt{x}} + \frac{4}{3x^3\sqrt[3]{x}}$.

Задача 22,8 (для самостоятельного решения). Найти производные функций 1) $y = \frac{5x^2}{\sqrt[5]{x^2}} + 30\sqrt[15]{x} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$. **Указание.** $\frac{5x^2}{\sqrt[5]{x^2}} = 5x^{\frac{8}{5}}$;
2) $y = 27x^3 - \frac{81}{2}x^2\sqrt[3]{x^2} + 12x^2 + \frac{12}{5}x\sqrt[3]{x^2}$.

Ответ. 1) $y' = 8\sqrt[5]{x^3} + \frac{2\sqrt[15]{x}}{x} - \frac{2}{x\sqrt[3]{x}}$; 2) $y' = (9x - 6\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x})^2$.

Задача 22,9. Найти производную функции $y = (5x^2 + 7x + 2)^3$.

Решение. Здесь мы имеем дело со сложной функцией. Положим $u = 5x^2 + 7x + 2$, тогда $y = u^3$. Следует писать так: $y = u^3$; $u = 5x^2 + 7x + 2$.

Для того чтобы найти производную, воспользуемся формулой (22,23) для дифференцирования сложной функции:

$$y' = 3u^2u' = 3(5x^2 + 7x + 2)^2(5x^2 + 7x + 2)' =$$
$$= 3(5x^2 + 7x + 2)^2 \cdot (10x + 7).$$

Однако можно обойтись и без промежуточных записей, т. е. без введения переменной u. Мы настоятельно рекомендуем читателю после того, как он сделает несколько упражнений, выполненных при помощи введения вспомогательной переменной, от введения такой переменной отказаться и дифференцирование выполнять сразу.

Формула (22,8) должна быть понята так: производная от степенной функции u^n, где u есть функция x, равна $nu^{n-1}u'$, т. е. равна показателю степени, умноженному на ту же функцию u, но в степени на единицу меньшей, а полученное произведение надо еще умножить на производную от основания степени u.

В нашем случае получаем: $y' = 3\underbrace{(5x^2 + 7x + 2)^2}_{\text{производная степенной функции}} \cdot \underbrace{(10x + 7)}_{\text{производная основания степени}}$

Выполним еще несколько аналогичных задач, но без столь подробных пояснений.

Задача 22,10. Найти производную функции $y = (5x^3 + 4x^2 + 8)^4$.

Решение. 1) $y = u^4$, где $u = 5x^3 + 4x^2 + 8$. По формуле (22,23) $y' = 4u^3u' = 4(5x^3 + 4x^2 + 8)^3(15x^2 + 8x)$ (производная от 8 равна 0). Проведем решение без введения промежуточной переменной: $y' = 4\underbrace{(5x^3 + 4x^2 + 8)^3}_{\substack{\text{производная}\\ \text{степени}}}\ \underbrace{(15x^2 + 8x)}_{\substack{\text{производная}\\ \text{степени}\\ \text{основания}}}$

Задача 22,11 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

$$1)\ y = (5x^2 + 7)^3; \qquad 2)\ y = (1 + 5x - 8x^2)^5;$$

$$3)\ y = (a + bx)^m; \qquad 4)\ y = \left(1 + 2\sqrt{x} - \frac{3}{x^2}\right)^4.$$

Найти производные, введя сначала промежуточную переменную, а потом минуя ее введение.

Ответ. 1) $y' = 30x(5x^2 + 7)^2$;
2) $y' = 5(1 + 5x - 8x^2)^4(5 - 16x)$;
3) $y' = bm(a + bx)^{m-1}$;
4) $y' = 4\left(1 + 2\sqrt{x} - \frac{3}{x^2}\right)^3\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{6}{x^3}\right)$.

Задача 22,12. Найти производные функций:

$$1)\ y = \sqrt{x^2 + 2}; \quad 2)\ y = \sqrt{3x}; \quad 3)\ y = \frac{2}{(3x^2 - 5)^3}.$$

Решение. 1) Положив $u = x^2 + 2$, получим $y = \sqrt{u}$, и поэтому на основании формулы (22,23)

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}}u' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 2}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}.$$

Можно было бы сразу воспользоваться формулой (22,9) для дифференцирования квадратного корня из функции, не вводя промежуточной переменной u.

Эту формулу следует понимать так: чтобы получить производную от квадратного корня из функции, надо единицу разделить на два корня квадратных из той же функции и полученную дробь умножить на производную от функции, стоящей под корнем.

Следовало поступить так: 1) $y = \sqrt{x^2 + 2}$; $y' = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x^2 + 2}}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{от квадратного}\\ \text{корня из}\\ \text{функции}}} \cdot \underbrace{2x}_{\substack{\text{производ-}\\ \text{ная от}\\ \text{функции,}\\ \text{стоящей}\\ \text{под корнем}}}$

2) $y=\sqrt{3x}$; $\quad y'=\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{3x}}}_{\substack{\text{производная квад-}\\ \text{ратного корня}\\ \text{из функции}}}\cdot\underbrace{3}_{\substack{\text{производная от}\\ \text{функции, стоя-}\\ \text{щей под корнем}}}$.

3) $y=\frac{2}{(3x^2-5)^3}$; $y'=-\underbrace{\frac{2}{(3x^2-5)^6}}_{\substack{\text{производная дро}\\ \text{би с постоянным}\\ \text{числителем}}}\cdot 3\underbrace{(3x^2-5)^2 6x}_{\substack{\text{производная}\\ \text{знаменателя}}}$;

$$y'=-\frac{36}{(3x^2-5)^4}.$$

Для упражнения выполним еще один совершенно аналогичный пример, но без введения переменной u.

Задача 22,13. Найти производную функции $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

Решение. По формуле (22,7) $y'=-\underbrace{\frac{1}{x^2+x+1}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{дроби}}}\underbrace{(\sqrt{x^2+x+1})'}_{\substack{\text{производная}\\ \text{знаменателя}\\ \text{дроби}}}=$

$$=-\underbrace{\frac{1}{x^2+x+1}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{дроби}}}\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x^2+x+1}}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{знаменателя}}}\cdot\underbrace{(2x+1)}_{\substack{\text{производная}\\ \text{функции, стоящей}\\ \text{под корнем}}}=-\frac{2x+1}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Задача 22,14. (для самостоятельного решения). Найти производные функций: 1) $y=\sqrt{3x^2+5x+1}$; 2) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}$; 3) $y=\frac{10}{(4x^3-5x^2+7x-1)^4}$.

Ответ. 1) $y'=\frac{6x+5}{2\sqrt{3x^2+5x+1}}$; 2) $y'=-\frac{x}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}}$;

3) $y'=-\frac{40(12x^2-10x+7)}{(4x^3-5x^2+7x-1)^5}$.

Задача 22,15. Найти производные функций: 1) $Q=\sqrt[3]{3t-2t^2}$;

2) $S=\sqrt[4]{(2t^2-t^3)^3}$.

Решение. 1) Перепишем пример в виде $Q=(3t-2t^2)^{\frac{1}{3}}$;

$$Q'=\underbrace{\frac{1}{3}(3t-2t^2)^{-\frac{2}{3}}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{степени}}}\underbrace{(3-4t)}_{\substack{\text{производная осно-}\\ \text{вания степени}}}.\text{ Окончательно } Q'=\frac{3-4t}{3\sqrt[3]{(3t-2t^2)^2}}.$$

2) Перепишем пример в виде $S=(2t^2-t^3)^{\frac{3}{4}}$;

$$S'=\frac{3}{4}\underbrace{(2t^2-t^3)^{-\frac{1}{4}}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{степени}}}\cdot\underbrace{(4t-3t^2)}_{\substack{\text{производная осно-}\\ \text{вания степени}}}.$$

Окончательно $S' = \frac{3t(4-3t)}{4\sqrt[4]{2t^2-t^3}}$.

Задача 22,16 (для самостоятельного решения). Найти производные функций: 1) $y = \sqrt[3]{4+2\sqrt{3x}+3x}$; 2) $y = \sqrt[4]{(3+4\sqrt[3]{2x})^3}$;

Ответ.

1) $y' = \frac{1+\sqrt{3x}}{\sqrt{3x}\sqrt[3]{(4+2\sqrt{3x}+3x)^2}}$; 2) $y' = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{x^2}\sqrt[4]{3+4\sqrt[3]{2x}}}$.

Теперь решим несколько задач, в которых требуется найти производную произведения и частного функций. Нам придется пользоваться формулами (22,5) и (22,6).

Задача 22,17. Найти производную функции $y = x^2(5x-4)^6$.

Решение. Здесь надо продифференцировать произведение двух функций. Будем считать, что в формуле (22,5) $u = x^2$, $v = (5x-4)^6$. Каждую из этих функций мы уже умеем дифференцировать, а потому на основании указанной формулы $y' = (x^2)' \times (5x-4)^6 + x^2[(5x-4)^6]'$. Теперь выполним дифференцирование: $y' = 2x(5x-4)^6 + x^2 \quad 6(5x-4)^5 \cdot 5$, а после упрощений получим $y' = 8x(5x-4)^5(5x-1)$.

Задача 22,18 (для самостоятельного решения). Найти производную функции $y = (5x^2-7x+2)(15x^2+5)^3$.

Ответ. $y = (10x-7)(15x^2+5)^3 + 90x(15x^2+5)^2(5x^2-7x+2)$.

Задача 22,19. Найти производную функции

$$y = (3x^2+5ax-2a^2)\sqrt{a^2+3x^2}.$$

Решение. По формуле (22,5) имеем при $u = 3x^2+5ax-2a^2$; $v = \sqrt{a^2+3x^2}$; $y' = (3x^2+5ax-2a^2)' \cdot \sqrt{a^2+3x^2} + (3x^2+5ax-2a^2)(\sqrt{a^2+3x^2})'$.

Выполняя дифференцирование, получим $y' = (6x+5a) \times \sqrt{a^2+3x^2} + (3x^2+5ax-2a^2)\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{a^2+3x^2}}}_{\text{производная корня}} \cdot \underbrace{6x}_{\text{производная подкоренного выражения}}$; после упрощений

$$y' = \frac{5a^3+30ax^2+27x^3}{\sqrt{a^2+3x^2}}.$$

Задача 22,20. Найти производную функции

$$y = (9a^2-6abx+5b^2x^2)\sqrt[3]{(a+bx)^2}.$$

Решение. Эту задачу мы решим без промежуточных записей (формула (22,5)):

$$y' = \underbrace{(-6ab+10b^2x)}_{\text{производная первого сомножителя}}\sqrt[3]{(a+bx)^2} + (9a^2-6abx+5b^2x^2) \times$$

$$\times \underbrace{\frac{2}{3}(a+bx)^{-\frac{1}{3}} \cdot b}_{\text{производная второго сомножителя}}.$$

Теперь следует сделать упрощения, после которых должно получиться

$$y' = \frac{40b^3x^2}{3\sqrt[3]{a+bx}}.$$

Задача 22,21 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

$$1)\ y = \left(40 - 12x + \frac{27}{5}x^2\right)\sqrt{5+3x};$$

$$2)\ y = \left(\frac{2}{27x} - \frac{1}{9x^2}\right)\sqrt{3x+x^2};\quad 3)\ y = (8x^3 - 21)\sqrt[3]{(7+4x^3)^2}.$$

Ответ.

$$1)\ y' = \frac{81x^2}{2\sqrt{5+3x}};\quad 2)\ y' = \frac{2}{2x^2\sqrt{3x+x^2}};\quad 3)\ y' = \frac{160x^5}{\sqrt[3]{7+4x^3}}.$$

Задача 22,22 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

$$1)\ y = \left(\frac{10}{3} - 2x + x^2\right)\sqrt{(5+2x)^3};\quad 2)\ y = (3x^4+4)\sqrt[4]{9x^4-3};$$

$$3)\ y = \left(\frac{2}{3x^3} + \frac{28}{27x}\right)\sqrt{7x^2-9}.$$

Ответ.

$$1)\ y' = 7x^2\sqrt{5+2x};\quad 2)\ y' = \frac{135x^7}{\sqrt[4]{(9x^4-3)^3}};\quad 3)\ y' = \frac{18}{x^4\sqrt{7x^2-9}}.$$

Задача 22,23. Найти производную функции $y = uvw$, где u, v, w — функции $x: u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$.

Решение. Запишем данную функцию в виде $y = (uv)w$ и применим к ней формулу (22,5):

$$y' = (uv)'w + uvw', \text{ но } (uv)' = u'v + uv',$$

а поэтому $y' = (u'v + uv')w + uvw'$; раскрывая скобки, будем иметь окончательно

$$y' = u'vw + uv'w + uvw'. \tag{22,24}$$

Можно указать, что вообще, если $y = u_1u_2u_3\ \dots\ u_n$, то

$$y' = u_1'u_2u_3\ \dots\ u_n + u_1u_2'u_3\ \dots\ u_n + u_1u_2u_3'\ \dots\ u_n + \\ + \dots + u_1u_2u_3\ \dots\ u_n'.$$

Этот результат словесно выражается так: *чтобы вычислить производную произведения любого числа функций, надо продифференцировать первую функцию и умножить полученную производную на произведение всех остальных функций, затем найти производную второй функции и умножить ее на произведение всех остальных функций. Точно так же поступить со всеми функциями-сомножителями и все полученные таким образом произведения сложить.*

Задача 22,23а. Найти производную функции

$$y=(2a+3bx)(2a-3bx)^2\sqrt{4a+6bx}.$$

Решение. На основании формулы (22,24), полученной в предыдущей задаче,

$$y'=(2a+3bx)'(2a-3bx)^2\sqrt{4a+6bx}+$$
$$+(2a+3bx)[(2a-3bx)^2]'\sqrt{4a+6bx}+$$
$$+(2a+3bx)(2a-3bx)^2(\sqrt{4a+6bx})'.$$

Выполняя дифференцирование, получим

$$y'=3b(2a-3bx)^2\sqrt{4a+6bx}+(2a+3bx)\cdot 2\cdot(2a-3bx)\cdot(-3b)\times$$
$$\times\sqrt{4a+6bx}+(2a+3bx)(2a-3bx)^2\frac{1}{2\sqrt{4a+6bx}}\cdot 6b$$

и после упрощений окончательно

$$y'=\frac{3}{2}b(3bx-2a)(21bx+2a)\sqrt{4a+6bx}.$$

Задача 22,24 (для самостоятельного решения). Найти производную функции

$$y=(4x-7)(3x+7)\sqrt[3]{3x+7}.$$

Ответ.

$$y'=28x\sqrt[3]{3x+7}.$$

Задача 22,25 (для самостоятельного решения). Найти производную функции

$$y=\frac{a-x}{a+x}.$$

Ответ.

$$y'=-\frac{2a}{(a+x)^2}.$$

Задача 22,26. Найти производную функции

$$y=\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}.$$

Решение. Здесь следует применить формулу (22,6) для дифференцирования дроби. При решении этой задачи и следующей будем делать подробные записи, а в дальнейшем от них откажемся. Надо научиться дифференцировать бегло, без промежуточных записей. Здесь $u=a^2-x^2$, $v=a^2+x^2$;

$$y'=\frac{(a^2-x^2)'(a^2+x^2)-(a^2+x^2)'(a^2-x^2)}{(a^2+x^2)^2}.$$

Выполняя дифференцирование в числителе, получим, что

$$y' = \frac{-2x(a^2+x^2) - 2x(a^2-x^2)}{(a^2+x^2)^2},$$

а после очевидных упрощений

$$y' = -\frac{4a^2x}{(a^2+x^2)^2}.$$

Задача 22,27. Найти производную функции

$$y = \frac{5+3x+x^2}{5-3x+x^2}.$$

Решение. Применяя формулу (22,6), имеем

$$y' = \frac{(5+3x+x^2)'(5-3x+x^2) - (5-3x+x^2)'(5+3x+x^2)}{(5-3x+x^2)^2}.$$

Выполняя дифференцирование, получим

$$y' = \frac{(3+2x)(5-3x+x^2) - (-3+2x)(5+3x+x^2)}{(5-3x+x^2)^2},$$

а после упрощений

$$y' = \frac{6(5-x^2)}{(5-3x+x^2)^2}.$$

Задача 22,28 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

$$1)\ y = \frac{x}{1+x^2};\quad 2)\ y = \frac{1+x^2}{1-x^2};\quad 3)\ y = \frac{x^m}{(1-x)^n}.$$

Ответ.

$$1)\ y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2};\qquad 2)\ y' = \frac{4x}{(1-x^2)^2};\qquad 3)\ y' = \frac{x^{m-1}[m(1-x)+nx]}{(1-x)^{n+1}}.$$

Задача 22,29. Найти производную функции

$$y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Решение. По формуле (22,6), считая $u = x$, $v = \sqrt{1+x^2}$, получаем

$$y' = \frac{x'\sqrt{1+x^2} - (\sqrt{1+x^2})'\,x}{(\sqrt{1+x^2})^2},$$

а выполняя дифференцирование, имеем

$$y' = \frac{1\;\sqrt{1+x^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\;2x\;x}{1+x^2};$$

после упрощений получим, что

$$y' = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

ДВАДЦАТЬ ТРЕТЬЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Дифференцирование тригонометрических функций.

Задача 23,1. Найти производные функций:

1) $y=\sin kx$; 2) $y=\cos lx$; 3) $y=\operatorname{tg} px$; 4) $y=\operatorname{ctg} qx$.

Решение. 1) По формуле (22,13), полагая $u=kx$, имеем:

$$y=\sin u;\quad u=kx;\quad y'=\cos u\cdot u';\quad y'=\underbrace{\cos kx}_{\substack{\text{производная}\\ \text{синуса}}}\cdot\underbrace{k}_{\substack{\text{производная}\\ u=kx}};\quad y'=k\cos kx.$$

2) По формуле (22,14), полагая

$$y=\cos u;\ u=lx;\ y'=-\sin u\cdot u';\ y'=-\underbrace{\sin lx}_{\substack{\text{производная}\\ \text{косинуса}}}\cdot\underbrace{l}_{\substack{\text{производная}\\ u=lx}};\ y'=-l\sin lx.$$

3) По формуле (22,15), полагая

$$y=\operatorname{tg} u;\ u=px;\ y'=\frac{1}{\cos^2 u}u';\ y'=\underbrace{\frac{1}{\cos^2 px}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{тангенса}}}\underbrace{p}_{\substack{\text{производная}\\ u=px}};\ y'=\frac{p}{\cos^2 px},$$

или $y'=p\sec^2 px$.

4) По формуле (22,16), полагая

$$y=\operatorname{ctg} u;\ u=qx;\ y'=-\frac{1}{\sin^2 u}u';\ y'=-\underbrace{\frac{1}{\sin^2 qx}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{котангенса}}}\underbrace{q}_{\substack{\text{производная}\\ u=qx}};\ y'=-\frac{q}{\sin^2 qx}.$$

или $y'=-q\operatorname{cosec}^2 qx$.

После нескольких упражнений студент сам откажется от введения промежуточной переменной u, подразумевая ее в тех местах, где она нужна.

Задача 23,2 (для самостоятельного решения). Найти производные функций: 1) $y=\sin 3x$; 2) $y=\sin 5x$; 3) $y=\sin 15x$; 4) $y=\cos 4x$; 5) $y=-\cos 3x$; 6) $y=\cos 9x$.

Ответ. 1) $y'=3\cos 3x$; 2) $y'=5\cos 5x$; 3) $y'=15\cos 15x$; 4) $y'=-4\sin 4x$; 5) $y'=3\sin 3x$; 6) $y'=-9\sin 9x$.

Задача 23,3. Найти производные функций:

1) $y=\sin 2x^2$; 2) $y=\sin\sqrt{x}$; 3) $y=\operatorname{tg}\frac{1+x}{x}$; 4) $y=\cos\sqrt{\frac{1}{1+x}}$.

Решение. 1) Мы прежде всего вычисляем производную синуса, а так как синус берется от $2x^2$, то вычисляем производную $2x^2$. Производная данной функции равна произведению этих производных. Пользуясь формулой (22,13), получаем

$$y'=\underbrace{\cos 2x^2}_{\substack{\text{произ-}\\ \text{водная}\\ \text{синуса}}}\ \underbrace{4x}_{\substack{\text{произ-}\\ \text{водная}\\ 2x^2}};\qquad y'=4x\cos 2x^2.$$

2) При решении этого примера мы также прежде всего должны вычислить производную синуса, а так как синус вычисляется от $\sqrt{x}$, то надо взять производную от этого корня и полученные производные перемножить. Формула (22,13) дает

$$y' = \underbrace{\cos\sqrt{x}}_{\text{производная синуса}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\text{производная корня}}; \qquad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}.$$

3) Здесь прежде всего надо продифференцировать тангенс, но так как он берется от дроби, то следует найти производную дроби и эти производные перемножить. По формуле (22,15) $\left(u = \frac{1+x}{x}\right)$.

$$y' = \underbrace{\frac{1}{\cos^2\frac{1+x}{x}}}_{\text{производная тангенса}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1+x}{x}\right)'}_{\text{производная дроби}} = \frac{1}{\cos^2\frac{1+x}{x}} \cdot \frac{1\cdot x-(1+x)\cdot 1}{x^2} =$$

$$= -\frac{1}{x^2}\sec^2\frac{1+x}{x}.$$

4) В этом примере следует сначала продифференцировать косинус. Так как косинус вычисляется от квадратного корня, то вслед за этим надо продифференцировать корень. Но корень вычисляется от дроби, а поэтому надо продифференцировать дробь и все три полученные производные перемножить. Здесь цепочка из трех звеньев:

$$y = \cos u; \quad u = \sqrt{v}; \quad v = \frac{1}{1+x}.$$

Производная

$$y' = \underbrace{-\sin\sqrt{\frac{1}{1+x}}}_{\text{производная косинуса}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{1+x}}}}_{\text{производная корня}} \cdot \underbrace{\left[-\frac{1}{(1+x)^2}\right]}_{\text{производная дроби}}.$$

Окончательно

$$y' = \frac{1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} \cdot \sin\sqrt{\frac{1}{1+x}}.$$

Аналогичное упражнение выполните самостоятельно.

Задача 23,4 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

$$1)\ y = \sin\sqrt{\frac{1}{1-x}}; \qquad 2)\ y = \sqrt{\sin x};$$

$$3)\ y = \sqrt{\frac{1}{\cos x}}; \qquad 4)\ y = \frac{1-\sin x}{1+\sin x}.$$

Ответы даются в таком виде, который позволяет проверить решение. Упрощение ответа сделайте сами.

Ответ.

$$1)\ y' = \cos\sqrt{\frac{1}{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{1-x}}}\cdot\left[-\frac{1}{(1-x)^2}\right]\cdot(-1);$$

$$2)\ y' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cdot\cos x;\quad 3)\ y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{\cos x}}}\cdot\left(-\frac{1}{\cos^2 x}\right)\cdot(-\sin x);$$

$$4)\ y' = -\frac{2\cos x}{(1+\sin x)^2}.$$

Задача 23,5. Найти производную функции $y = 3\sin^2 x$.

Решение. Запишем пример так: $y = 3(\sin x)^2$. Если $u = \sin x$, то $y = 3u^2$, и тогда

$$y' = 6uu' = 6\sin x\underbrace{\cos x}_{\text{производная } u}.$$

Теперь покажем, как решить задачу, не вводя u. Прежде всего продифференцируем степень, а так как в степень возводится $\sin x$, то продифференцируем и $\sin x$. Найденные производные перемножим, постоянный множитель 3 вынесем за знак производной:

$$y' = 3\cdot\underbrace{2\sin x}_{\text{производная степени}}\ \underbrace{\cos x}_{\text{производная синуса}};\quad y' = 6\sin x\cos x,$$

или

$$y' = 3\sin 2x.$$

Задача 23,6. Найти производную функции $y = \cos^6 x$.

Решение. Запишем пример в виде $y = (\cos x)^6$ и положим $y = u^6$, а $u = \cos x$; тогда $y' = 6u^5u' = 6(\cos x)^5\cdot(-\sin x)$; $y' = -6\sin x\cos^5 x$.

Теперь ту же задачу решим без введения u.

У нас дифференцируется шестая степень косинуса: сначала продифференцируем степень, а так как в степень возводится косинус, то надо найти производную и от косинуса, а затем эти производные перемножить.

Итак,

$$y = \cos^6 x;\quad y' = \underbrace{6\cos^5 x}_{\text{производная от шестой степени косинуса}}\cdot\underbrace{(-\sin x)}_{\text{производная от }\cos x};$$

$$y = -6\sin x\cos^5 x.$$

Теперь самостоятельно, но без введения u (u держать в уме) решите несколько аналогичных примеров.

Задача 23,7 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

1) $y = \sin^3 x$; 2) $y = \operatorname{tg}^3 x$; 3) $y = \operatorname{ctg}^4 x$;
4) $y = 5\cos^5 x$; 5) $y = 7\operatorname{tg}^6 x$; 6) $y = 8\sin^2 x$.

Ответ. 1) $y' = 3\sin^2 x\cos x$; 2) $y' = 3\operatorname{tg}^2 x\sec^2 x$;
3) $y' = -4\operatorname{ctg}^3 x\operatorname{cosec}^2 x$; 4) $y' = -25\cos^4 x\sin x$;
5) $y' = 42\operatorname{tg}^5 x\sec^2 x$; 6) $y' = 16\sin x\cos x = 8\sin 2x$.

Задача 23,8. Найти производную функций:

1) $y = \sqrt{\sin x}$; 2) $y = \sqrt{\sin^2 x + 3\cos^3 4x}$; 3) $y = \dfrac{1}{\cos^3 x}$.

Решение. 1) Вычисляем производную от квадратного корня, а так как корень извлекается из $\sin x$, то следует вычислить производную от синуса и перемножить эти производные. Последовательно получаем

$$y' = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}}_{\substack{\text{производ-}\\\text{ная от}\\\text{квадратно-}\\\text{го корня}}}\ \underbrace{\cos x}_{\substack{\text{произ-}\\\text{водная}\\\text{от си-}\\\text{нуса}}}.$$

2) Здесь корень квадратный извлекается из суммы $\sin^2 x + 3\cos^3 4x$. Поэтому сначала вычисляем производную от квадратного корня, а потом умножаем ее на производную от подкоренного выражения:

$$y' = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\sin^2 x + 3\cos^3 4x}}}_{\substack{\text{производная}\\\text{корня}}}[\underbrace{(2\sin x\cos x)}_{\substack{\text{производная от}\\\sin^2 x}} + 3\cdot\underbrace{3\cos^2 4x}_{\substack{\text{производ-}\\\text{ная от сте-}\\\text{пени cos}}}\ \underbrace{(-\sin 4x)}_{\substack{\text{производ-}\\\text{ная от}\\\cos 4x}}\cdot\underbrace{4}_{\substack{\text{про-}\\\text{извод-}\\\text{ная от}\\4x}}].$$

3) Сначала возьмем производную дроби, затем вычислим производную от знаменателя дроби и перемножим эти производные:

$$y' = -\underbrace{\frac{1}{\cos^6 x}}_{\substack{\text{произ-}\\\text{водная}\\\text{дроби}}}\cdot\underbrace{3\cos^2 x\cdot(-\sin x)}_{\substack{\text{производная зна-}\\\text{менателя дроби}}} = \frac{3\sin x}{\cos^4 x}.$$

Задача 23,9 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

1) $y = \sin(px + g)$;

2) $y = \frac{1}{7}\sin 7x + \frac{3}{5}\sin 5x + \frac{1}{3}\sin 3x - 5\sin x$;

3) $y = \frac{1}{8}\sin 8x + \frac{2}{3}\sin 6x + \sin 4x - 2\sin 2x - 5x$;

4) $y = \frac{1}{9}\cos 9x + \frac{3}{7}\cos 7x - \frac{8}{3}\cos 3x - 6\cos x$.

Задача 23,10. Найти y', если

$$y = x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x.$$

Решение. Производную от первого, второго и третьего слагаемых будем искать, как производную от произведения

$$y' = \underbrace{3x^2 \sin x + x^3 \cos x}_{\text{производная первого слагаемого}} + \underbrace{6x \cos x - 3x^2 \sin x}_{\text{производная второго слагаемого}} - \underbrace{6 \sin x - 6x \cos x}_{\text{производная третьего слагаемого}} + \underbrace{6 \sin x}_{\text{производная четвертого слагаемого}};$$

после приведения подобных членов получаем $y' = x^3 \cos x$.

Задача 23,11 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

1) $x = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x$; 2) $y = \left(\frac{2}{\cos^4 x} + \frac{3}{\cos^2 x}\right) \sin x$;

3) $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x - 2x$; 4) $y = \left(\cos^2 x + \frac{2}{3}\right) \sin^3 x$.

Указание. При дифференцировании первого сомножителя во втором примере учесть решение третьего примера задачи 23,8.

Ответ. 1) $y' = \frac{1}{\cos^4 x}$; 2) $y' = \frac{8 - 3\cos^4 x}{\cos^5 x}$;

3) $y' = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$; 4) $y' = 5 \sin^2 x \cos^3 x$.

Задача 23,12 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

1) $y = \frac{1}{3} \cos x \operatorname{ctg} x - \frac{1}{6} \cos 2x \sin x - \frac{3}{2} \sin x - \frac{4}{3} \operatorname{cosec} x$;

2) $y = \frac{15}{8} x + \operatorname{ctg} x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x$.

Ответ. 1) $y' = \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}$; 2) $y' = -\frac{\cos^6 x}{\sin^2 x}$.

Задача 23,13. Найти производную функции

$$y = \frac{3 \operatorname{cosec} x - 2 \sin x}{5 \cos^5 x} - \frac{16}{5} \operatorname{ctg} 2x.$$

Решение. Первое слагаемое — дробь, а потому при его дифференцировании должна быть использована формула (22,6):

$$y' = \frac{1}{5}\frac{(3\operatorname{cosec} x - 2\sin x)'\cos^5 x - (\cos^5 x)'(3\operatorname{cosec} x - 2\sin x)}{\cos^{10} x} -$$

$$-\frac{16}{5}\left(-\frac{1}{\sin^2 2x}\cdot 2\right) =$$

$$= \frac{(-3\operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x - 2\cdot\cos x)\cos^5 x - (-5\cos^4 x\sin x)\cdot(3\operatorname{cosec} x - 2\sin x)}{5\cos^{10} x} +$$

$$+\frac{32}{5}\frac{1}{\sin^2 2x},$$

а после упрощений окончательно получим $\left(\text{если заменить } \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}, \text{ а } \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}\right)$, что

$$y' = \frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^6 x}.$$

ДВАДЦАТЬ ЧЕТВЕРТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание; Дифференцирование обратных тригонометрических функций.

Задача 24,1. Найти производные функций:

1) $y = \arcsin 2x$; 2) $y = \arccos x^m$;

3) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}\ (x > 0)$; 4) $y = \operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{x}}\ (x > 0)$.

Решение. 1) Задачу перепишем в виде

$$y = \arcsin u,\quad u = 2x.$$

Тогда по формуле (22,19)

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}(2x)';\quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\underbrace{2}_{\substack{\text{произ-}\\\text{водная}\\\text{от}\\u = 2x}};\quad y' = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

Можно было обойтись и без введения промежуточного аргумента. Присмотритесь к формуле (22,19). **Производная от функции $y = \arcsin u$ находится так: единица делится на квадратный корень из единицы минус квадрат той функции, которая стоит**

под знаком арксинуса, и эта дробь умножается на производную этой функции. Поэтому сразу можно было бы писать:

$$y' = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}}_{\substack{\text{производ-}\\ \text{ная от}\\ \text{арксинуса}}} \cdot \underbrace{2}_{\substack{\text{производ}\\ \text{ная от}\\ \text{функции,}\\ \text{стоящей}\\ \text{под зна-}\\ \text{ком арк-}\\ \text{синуса}}} = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

Таким образом, мы функцию u не ввели, а держали ее в уме.

2) Здесь мы используем формулу (22,20), которая только знаком отличается от формулы (22,19) и проведем решение с введением и без введения промежуточного аргумента. Перепишем задачу так:

$$y = \arccos u; \quad u = x^m; \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot (x^m)' =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \underbrace{mx^{m-1}}_{\substack{\text{произ-}\\ \text{водная}\\ \text{функции}\\ u = x^m}} = -\frac{mx^{m-1}}{\sqrt{1-x^{2m}}};$$

$(u = x^m$, а потому $u^2 = x^{2m})$.

Теперь решим эту задачу, не вводя промежуточного аргумента.

$$y' = -\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^{2m}}}}_{\substack{\text{производ-}\\ \text{ная от арк-}\\ \text{косинуса}}} \cdot \underbrace{mx^{m-1}}_{\substack{\text{произ-}\\ \text{водная от}\\ \text{функции,}\\ \text{стоящей}\\ \text{под знаком}\\ \text{арккосинуса}}}.$$

3) При решении этого примера будем пользоваться формулой (22,21). Опять-таки сначала введем промежуточный аргумент u, а потом проведем решение без этого осложнения.

Перепишем задачу так: $y = \operatorname{arctg} u$; $u = \sqrt{x}$;

$$y' = \frac{1}{1+u^2} (\sqrt{x})' = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ (так как } u = \sqrt{x}, \text{ то } u^2 = x).$$

Запомните, что производная функции $y = \operatorname{arctg} u$ равна дроби, у которой числитель равен 1, а знаменатель равен 1 плюс квадрат функции, стоящей под знаком арктангенса, и дробь умножается на производную этой функции:

$$y = \operatorname{arctg} \sqrt{x};$$

$$y' = \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{\substack{\text{произ-}\\ \text{водная}\\ \text{от арк-}\\ \text{тан-}\\ \text{генса}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{от функции,}\\ \text{стоящей под}\\ \text{знаком арк-}\\ \text{тангенса}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}.$$

4) Здесь следует воспользоваться формулой (22,22). Поступим, как и раньше: сначала введем промежуточную функцию u, а потом проведем решение, не вводя ее.

Перепишем задачу:

$$y = \operatorname{arcctg} u, \quad u = \frac{1}{\sqrt{x}};$$

$$y' = -\frac{1}{1+u^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{1+u^2}\Bigl(\underbrace{-\frac{1}{x}}_{\substack{\text{произ-}\\\text{водная}\\\text{дроби}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\substack{\text{производ-}\\\text{ная зна-}\\\text{менателя}\\\text{дроби}}}\Bigr).$$

Так как $u = \frac{1}{\sqrt{x}}$, то $u^2 = \frac{1}{x}$, а потому

$$y' = -\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x}\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\right),$$

и окончательно

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}.$$

Мы получили такой же ответ, как и в предыдущей задаче. Этот результат не является случайным, потому что при $\alpha > 0$ имеет место формула $\operatorname{arctg} \alpha = \operatorname{arcctg} \frac{1}{\alpha}$, а в нашем случае $\operatorname{arctg} \sqrt{x} = \operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{x}}$.

В дальнейшем нам придется ссылаться на соотношения между обратными тригонометрическими функциями.

Читателя, интересующегося относящимися сюда выводами, отсылаем к книге: С. И. Новоселов. Обратные тригонометрические функции.

Задача 24,2 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

1) $y = \arcsin 5x$; 2) $y = \arcsin \sqrt{x}\,(x > 0)$; 3) $y = \arcsin mx$;
4) $y = \arccos 6x$; 5) $y = \arccos (1 - x^2)$; 6) $y = \arccos \frac{1}{x}$.

Ответ. 1) $y' = \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$; 2) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$;
3) $y' = \frac{m}{\sqrt{1-m^2x^2}}$; 4) $y' = -\frac{6}{\sqrt{1-36x^2}}$;
5) $y' = \frac{2x}{\sqrt{1-(1-x)^2}}$; 6) $y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Задача 24,3 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

1) $y = \operatorname{arctg} 5x$; 2) $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$; 3) $y = \operatorname{arctg} 3x^2$;

4) $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$; 5) $y = \operatorname{arcctg} mx$; 6) $\operatorname{arcctg}\frac{1}{1+x^2}$.

Ответ. 1) $y' = \frac{5}{1+25x^2}$; 2) $y' = -\frac{1}{1+x^2}$; 3) $y' = \frac{6x}{1+9x^4}$;

4) $y' = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg} x}} \cdot \frac{1}{1+x^2}$; 5) $y' = -\frac{m}{1+m^2x^2}$;

6) $y' = \frac{2x}{2+2x^2+x^4}$.

В двух следующих задачах даны упражнения в дифференцировании степеней обратных тригонометрических функций.

Задача 24,4. Найти производные функций:

1) $y = \arcsin^2 x$; 2) $y = \arcsin^3 3x$; 3) $y = \operatorname{arctg}^4 \sqrt{x}$.

Решение. 1) Этот пример решим сначала с помощью введения промежуточного аргумента u. Перепишем задачу так: $y = (\arcsin x)^2$.

Пусть $y = u^2$, $u = \arcsin x$.

Поэтому $y' = 2uu' = 2(\arcsin x)(\arcsin x)'$;

$$y' = \arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

Этот же пример решим без введения промежуточного аргумента. У нас $y = \operatorname{arsin}^2 x$.

Прежде всего следует продифференцировать степень, а так как в степень возводится $\arcsin x$, то вслед за этим надо продифференцировать $\arcsin x$ и производные перемножить:

$$y' = 2\arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2) Мы настоятельно рекомендуем не вводить промежуточных аргументов.

а) продифференцируем сначала степень;

в) так как в степень возводится $\arcsin 3x$, надо взять производную от $\arcsin 3x$;

с) вычислим производную от $3x$ потому, что арксинус вычисляется от $3x$. Полученные производные перемножим.

Записи расположатся так:

$$y' = \underbrace{3\arcsin^2 3x}_{\substack{\text{производная}\\ \text{от степени}\\ \text{арксинуса}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{от арксинуса}}} \cdot \underbrace{3}_{\substack{\text{про-}\\ \text{извод-}\\ \text{ная } 3x}}$$

3) Этот пример также решим без введения промежуточного аргумента.

$$y' = \underbrace{4\operatorname{arctg}^3 \sqrt{x}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{степени}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{арктангенса}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\substack{\text{произ-}\\ \text{водная}\\ \text{корня}}}$$

Задача 24,5 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

1) $y = \arcsin^3 x^2$; 2) $y = \operatorname{arctg}^2 \frac{1}{x^2}$; 3) $y = \arccos^4 5x$;

4) $y = \operatorname{arcctg} \sqrt{x^3}$; 5) $y = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$.

Ответ. 1) $y' = 3\arcsin^2 x^2 \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$; 2) $y' = -\frac{4x}{x^4+1}\operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}$.

3) $y' = -\frac{20 \arccos^3 5x}{\sqrt{1-25x^2}}$; 4) $y' = -\frac{3}{2}\frac{\sqrt{x}}{1+x^3}$;

5) $y' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Задача 24,6. * Продифференцировать:

1) $y = \arcsin \sqrt{1-x^2}$; 2) $y = \operatorname{tg}(\arcsin x)$;

3) $y = \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{1+\sin x}$; 4) $y = \operatorname{arctg} \frac{a+b\cos x}{b+a\cos x}$.

Решение. 1) При дифференцировании не будем вводить промежуточных аргументов:

$$y' = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}}}_{\substack{\text{производная от}\\ \text{арксинуса}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{корня}}} \cdot \underbrace{(-2x)}_{\substack{\text{производ-}\\ \text{ная под-}\\ \text{коренного}\\ \text{выражения}}};$$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-1+x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1-x^2}}.$$

А так как $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & \text{если } x > 0; \\ -x, & \text{если } x < 0, \end{cases}$

то получаем, что при $x > 0$ $y' = -\frac{x}{x\sqrt{1-x^2}}$; $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

а при $x < 0$ $y' = -\frac{x}{-x\sqrt{1-x^2}}$; $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

В первом случае ($x > 0$) получилась производная, равная производной от $\arccos x$, а во втором ($x < 0$) производная получилась

---

* В этой и следующих задачах буквы a и b имеют такие значения, что содержащие их функции вещественны. Неоднозначность знака не указывается.

такая же, как от арксинуса. Этот результат не случаен. Из тригонометрии известно, что если $0 \leqslant x \leqslant 1$, то

$$\arcsin \sqrt{1 - x^2} = \arccos x,$$

а при значениях $-1 \leqslant x \leqslant 0$

$$\arcsin \sqrt{1 - x^2} = \pi - \arccos x.$$

2) $\underbrace{y' = \sec^2 (\arcsin x)}_{\text{производная тангенса}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}_{\substack{\text{производ-}\\\text{ная арк-}\\\text{синуса}}};$

3) $y = \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{\cos^2 x}{(1 + \sin x)^2}}}_{\substack{\text{производная арк-}\\\text{тангенса}}} \underbrace{\frac{-\sin x (1 + \sin x) - \cos x \cdot \cos x}{(1 + \sin x)^2}}_{\text{производная дроби}}; \quad y' = -\frac{1}{2}.$

4) $$y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{a + b \cos x}{b + a \cos x}\right)^2} \cdot \frac{-b \sin x (b + a \cos x) - (-a \sin x)(a + b \cos x)}{(b + a \cos x)^2};$$

$$y' = \frac{-b^2 \sin x + a^2 \sin x}{(b + a \cos x)^2 + (a + b \cos x)^2} \text{ и окончательно}$$

$$y' = \frac{(a^2 - b^2) \sin x}{(a^2 + b^2) + (a^2 + b^2) \cos^2 x + 4ab \cos x}.$$

Задача 4,7 (для самостоятельного решения). Продифференцировать:

1) $y = \arcsin x + \arccos x$; 2) $y = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x$;

3) $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{a + x}{1 - ax}$

и объяснить простоту полученных результатов.

Ответ. 1) 0; 2) 0; 3) $y' = \frac{1}{1 + x^2}$.

Задача 24,8. Показать, что каждая из функций

1) $y = 2 \arcsin \sqrt{\frac{x - b}{a - b}}$; 2) $y = 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{x - b}{a - x}}$;

3) $y = \arcsin \frac{2\sqrt{(a - x)(x - b)}}{a - b}$

имеет производную, равную $\frac{1}{\sqrt{(a - x)(x - b)}}$.

Решение. Дифференцирование проведем с подробными записями, но без введения промежуточных аргументов:

1) $$y' = 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{x - b}{a - b}}\right)^2}}}_{\text{производная арксинуса}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\frac{x - b}{a - b}}}}_{\substack{\text{производная}\\\text{корня}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{a - b}}_{\substack{\text{производ-}\\\text{ная под-}\\\text{коренного}\\\text{выражения}}}.$$

В этом примере мы прежде всего дифференцируем арксинус (постоянный множитель 2 сразу вынесен за знак производной). Арксинус берется от корня и, следовательно, нужно взять производную корня. Корень извлекается из дроби, а потому следует вычислить производную дроби (дробь имеет постоянный знаменатель $a-b$, а производная от дроби с постоянным знаменателем равна производной числителя дроби, разделенной на тот же знаменатель). Производная заданной функции равна произведению полученных выше производных.

После упрощений получаем:

$$y' = \frac{2}{\sqrt{1-\frac{x-b}{a-b}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-b}{a-b}}} \cdot \frac{1}{a-b} = \frac{1}{\sqrt{(a-x)(x-b)}}.$$

$$2)\ y' = 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{x-b}{a-x}}\right)^2}}_{\text{производная от арктангенса}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\frac{x-b}{a-x}}}}_{\text{производная корня}} \cdot \underbrace{\frac{(a-x)+(x-b)}{(a-x)^2}}_{\text{производная подкоренного выражения}}.$$

Упрощения проведите самостоятельно и получите, что

$$y' = \frac{1}{\sqrt{(a-x)(x-b)}}.$$

$$3)\ y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{(a-x)(x-b)}}{a-b}\right)^2}} \cdot \frac{2}{a-b} \cdot \frac{1}{2\sqrt{(a-x)(x-b)}} \times$$

$$\times [-1\cdot(x-b) + 1\cdot(a-x)] = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4(a-x)(x-b)}{(a-b)^2}}} \cdot \frac{2}{a-b} \times$$

$$\times \frac{(-2x+a+b)}{2\sqrt{(a-x)(x-b)}} = \frac{1}{\sqrt{(a-b)^2-4(a-x)(x-b)}} \cdot \frac{a+b-2x}{\sqrt{(a-x)(x-b)}}.$$

Но выражение под корнем в знаменателе первой дроби равно $(a+b-2x)^2$, а потому получаем, что $y' = \frac{1}{\sqrt{(a-x)(x-b)}}$.

Задача 24,9 (для самостоятельного решения). Продифференцировать функцию

$$y = \arccos\sqrt{\frac{\cos 3x}{\cos^3 x}}.$$

Ответ.

$$y' = -\sqrt{\frac{3}{\cos x \cos 3x}}.$$

ДВАДЦАТЬ ПЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Дифференцирование показательной и логарифмической функций. Логарифмическое дифференцирование.

При дифференцировании показательной и логарифмической функций мы будем пользоваться формулами (22,10), (22,11) и (22,12) из основной таблицы формул.

Задача 25,1. Найти производные функций:

1) $y = a^{3x}\,(a > 0)$; 2) $y = 7^{\frac{1}{4x}}$ 3) $y = 2^{x^3}$;

4) $y = 4^{\sin^2 x}$ 5) $y = e^{x^4}$; 6) $y = e^{\sqrt{x^2+x+2}}$;

7) $y = e^{\sqrt{\sin x}}$; 8) $y = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$;

9) $y = e^{\operatorname{tg} x}$; 10) $y = e^{\arcsin^2 x}$.

Решение. 1) По формуле (12,10), если $y' = a^u (a > 0)$, то $y' = a^u \cdot u' \cdot \ln a$.

В нашем случае, полагая $y = a^u$, $u = 3x$, имеем $y' = a^u \ln a \cdot 3 = 3a^{3x} \ln a$.

Здесь снова возникает вопрос о целесообразности введения промежуточного аргумента u.

Можно обойтись без этого. Техника дифференцирования у читателя уже выработалась, а потому все последующие примеры должны решаться без введения вспомогательных переменных. Пример первый должен решаться так: $y' = a^{3x} \ln a\,(3x)'$;

$$y' = \underbrace{a^{3x} \ln a}_{\substack{\text{производ-}\\\text{ная пока-}\\\text{зательной}\\\text{функции}}} \cdot \underbrace{3}_{\substack{\text{производ-}\\\text{ная пока-}\\\text{зателя}\\\text{степени}}}.$$

2) Здесь также будем пользоваться формулой (22,10):

$$y' = \underbrace{7^{\frac{1}{4x}} \cdot \ln 7}_{\substack{\text{производная}\\\text{показательной}\\\text{функции}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}_{\substack{\text{производная}\\\text{показателя}\\\text{степени}}} = -\frac{1}{4}\frac{1}{x^2} 7^{\frac{1}{4x}} \cdot \ln 7.$$

3) По формуле (22,10) имеем:

$$y' = \underbrace{2^{x^3} \ln 2}_{\substack{\text{производ-}\\\text{ная пока-}\\\text{зательной}\\\text{функции}}} \cdot \underbrace{3x^2}_{\substack{\text{произ-}\\\text{водная}\\\text{показа-}\\\text{теля}\\\text{степени}}} = 3x^2 2^{x^3} \ln 2.$$

4) По формуле (22,10) имеем

$$y' = \underbrace{4^{\sin^2 x} \cdot \ln 4}_{\substack{\text{производная}\\\text{показательной}\\\text{функции}}} \cdot \underbrace{2\sin x}_{\substack{\text{произ-}\\\text{водная}\\\text{степени}\\\text{синуса}}} \cdot \underbrace{\cos x}_{\substack{\text{произ-}\\\text{водная}\\\text{синуса}}} = 4^{\sin^2 x} \sin 2x \cdot \ln 4.$$

5) Из формулы (22,10) следует, что производная от функции $y = e^{x^4}$ равна ей же самой, умноженной на производную показателя степени u. Получаем $y' = e^{x^4}(x^4)' = 4x^3e^{x^4}$.

6) $$y' = e^{\sqrt{x^2+x+2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x^2+x+2}}}_{\text{производная корня}} \cdot \underbrace{(2x+1)}_{\text{производная подкоренного выражения}}.$$

7) Здесь также следует воспользоваться формулой (22,10):

$$y' = e^{\sqrt{\sin x}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}}_{\text{производная корня}} \cdot \underbrace{\cos x}_{\text{производная синуса}}.$$

8) Применим формулу для дифференцирования произведения:

$$y' = (e^x)'(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)' =$$
$$= e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + e^x(3x^2 - 6x + 6);$$
$$y' = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6 + 3x^2 - 6x + 6).$$

Окончательно после приведения подобных членов в скобке $y' = x^3e^x$.

9) $$y' = e^{\operatorname{tg} x}(\operatorname{tg} x)' = \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}.$$

10) $$y' = e^{\arcsin^2 x} \cdot \underbrace{2\arcsin x}_{\text{производная степени арксинуса}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{\text{производная арксинуса}}.$$

Задача 25,2 (для самостоятельного решения). Продифференцировать функции:

1) $y = a^{x^n}$ $(a > 0)$; 2) $y = (a^x)^n$ $(a > 0)$;

3) $y = e^{\operatorname{arc\,tg} x}$; 4) $y = \frac{x^4}{e^x}$;

5) $y = e^{\frac{1}{x}}$; 6) $y = e^{-x}$.

Ответ. 1) $y' = a^{x^n} \cdot \ln a \cdot nx^{n-1}$; 2) $y' = na^{nx} \cdot \ln a$;

3) $y' = e^{\operatorname{arc\,tg} x}\,\frac{1}{1+x^2}$; 4) $y' = \frac{(4x^3 - x^4)}{e^x}$;

5) $y' = -\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}$; 6) $y = -e^{-x}$;

Задача 25,3. Продифференцировать функции:

1) $y = \ln(ax + b)$; 2) $y = \ln^5 x$; 3) $y = \ln \sin x$;

4) $y = \ln \operatorname{arc\,tg} x$; 5) $y = x \ln x$; 6) $y = \frac{\ln x}{x}$;

7) $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$; 8) $y = \ln(\ln x)$.

Решение. По формуле (22,12), если $y = \ln u$, то $y' = \frac{1}{u} u'$. Чтобы получить производную от функции $\ln u$, где u — функция x, надо единицу разделить на функцию u, стоящую под знаком логарифма; полученную дробь следует умножить на производную этой функции:

$$y' = \frac{1}{ax+b}(ax+b)' = \frac{1}{ax+b} a = \frac{a}{ax+b}.$$

2) Здесь дифференцируется степень логарифма, а потому

$$y' = \underbrace{5 \ln^4 x}_{\text{производная степени}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{производная логарифма}}; \quad y' = \frac{5 \ln^4 x}{x};$$

3) $y' = \underbrace{\frac{1}{\sin x}}_{\text{производная логарифма}} \cdot \underbrace{\cos x = \operatorname{ctg} x}_{\text{производная синуса}}$

4) Аналогично решается пример 4: $y' = \frac{1}{\operatorname{arc\,tg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}$.

5) Здесь следует применить формулу для дифференцирования произведения

$$y' = x' \ln x + x (\ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

6) По формуле для дифференцирования дроби имеем

$$y' = \frac{(\ln x)' x - x' \ln x}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

7) $y' = \underbrace{\frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}}_{\text{производная логарифма}} \underbrace{\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)}_{\text{производная от функции, стоящей под знаком логарифма}}.$

После упрощений получим, что $y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

8) $y' = \underbrace{\frac{1}{\ln x}}_{\text{производная логарифма}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{производная от функции, стоящей под знаком логарифма}}; \quad y' = \frac{1}{x \ln x};$

Задача 25,3а (для самостоятельного решения). Продифференцировать функции:

1) $y = \ln(15e^x + x^2)$; 2) $y = 5^{\ln(x^2+x+1)}$.

Ответ. 1) $y' = \frac{15e^x + 2x}{15e^x + x^2}$; 2) $y' = 5^{\ln(x^2+x+1)} \ln 5 \cdot \frac{2x+1}{x^2+x+1}$.

Задача 25.4. Продифференцировать функции:

1) $y = \ln\frac{x}{1-x^4}$;

2) $y = \ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; 3) $y = \ln\frac{1+x}{1-x}$.

Решение. Во всех этих примерах прежде чем вычислить производную, целесообразно выполнить логарифмирование.

1) Перепишем пример в виде $y = \ln x - \ln(1-x^4)$, а теперь

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x^4}(1-x^4)' = \frac{1}{x} + \frac{4x^3}{1-x^4};$$

окончательно

$$y' = \frac{1+3x^4}{x(1-x^4)}.$$

2) Перепишем пример в виде $y = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$, и тогда

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x^2}\;2x; \quad y' = \frac{1}{x(1+x^2)}.$$

3) В преобразованном виде пример запишется так:

$$y = \ln(1+x) - \ln(1-x),$$

а поэтому

$$y' = \frac{1}{1+x}(1+x)' - \frac{1}{1-x}(1-x)',$$

или

$$y' = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \quad y' = \frac{2}{1-x^2}.$$

Задача 25,5 (для самостоятельного решения). Продифференцировать функции:

1) $y=\ln\frac{x^2-2}{\sqrt{(6-2x^2)^3}}$; 2) $y = \ln\frac{\sqrt[21]{(x+4)^{13}}\,\sqrt[28]{(x-3)^{13}}}{\sqrt[12]{x+1}}$;

3) $y = \ln\frac{x^2(2x+4)^7}{(6+7x+2x^2)(2x+3)^7}$; 4) $y = \ln\sqrt{\frac{\sqrt{3}-x\sqrt{7}}{\sqrt{3}+x\sqrt{7}}}$.

Указание. Прежде чем вычислять производную, целесообразно выполнить логарифмирование.

Ответ. 1) $y' = \frac{x^3}{(x^2-2)(3-x^2)}$; 2) $y' = \frac{x^2+x+1}{x^3+2x^2-11x-12}$;

3) $y' = \frac{12}{x(6+7x+2x^2)}$; 4) $y' = \frac{\sqrt{21}}{7x^2-3}$.

Задача 25,6 (для самостоятельного решения). Продифференцировать функции;

1) $y = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2+2x^2}-x}{\sqrt{2+2x^2}+x} + \ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

Указание. Под знаком логарифма в первом слагаемом выгодно освободиться от иррациональности в знаменателе. После этого дробь сначала прологарифмировать и только потом приступить к дифференцированию. Производная второго слагаемого найдена в задаче 25,3 (пример 7).

2) $y = \operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \ln\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$.

Ответ. 1) $y' = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}$; 2) $y' = \frac{2ax^2}{x^4-a^4}$.

Задача 25,7 (для самостоятельного решения). Продифференцировать функции:

1) $y = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\ln\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2} + 2\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)$;

2) $y = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\ln\frac{1-x\sqrt{2}+x^2}{1+x\sqrt{2}+x^2} + 2\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)$;

3) $y = \frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\ln\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} + 2\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}\right)$.

Указание. В каждом примере, прежде чем дифференцировать первую дробь, надо ее прологарифмировать.

Ответ. 1) $y' = \frac{1}{1+x^4}$; 2) $y' = \frac{x^2}{1+x^4}$; 3) $y' = \frac{1}{1+x^2+x^4}$.

ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Если требуется продифференцировать произведение нескольких функций или дробь, числитель и знаменатель которой содержат произведения, часто представляется выгодным обе части данного выражения сначала прологарифмировать, по основанию e, а потом уже приступить к дифференцированию. Этот прием получил название логарифмического дифференцирования. Производная от логарифма функции называется логарифмической производной.

К этому приему удобно прибегать и при дифференцировании выражений, содержащих корни из дробей. К нему прибегают всегда, когда следует продифференцировать функцию вида

$$y = [f(x)]^{\varphi(x)},$$

т. е. когда и основание степени, и показатель степени есть функции x.

Способ логарифмического дифференцирования будет подробно рассмотрен на ряде примеров.

Задача 25,8. Найти производную функций:

1) $y=(x+5)^2(2x-7)^3(x-2)(x+3)$;

2) $y=\dfrac{\sqrt[4]{x^2+7x-8}\cdot\sqrt[6]{x^4-1}}{\sqrt[3]{x^3-3x^2+x-4}}$;

3) $y=\dfrac{(x+5)^2(x-4)^3}{(x+2)^5(x+4)^2}$; 4) $y=\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.

Решение. Во всех предложенных примерах целесообразно сначала прологарифмировать по основанию e обе части равенства, а потом уже дифференцировать.

1) Если $y=(x+5)^2(2x-7)^3(x-2)(x+3)$, то $\ln y=$ $=2\ln(x+5)+3\ln(2x-7)+\ln(x-2)+\ln(x+3)$.

Будем считать функцию $\ln y$ сложной функцией переменной x и найдем ее производную:

Производная функции $\ln y$ с учетом того, что y есть функция x, равна $\frac{1}{y}y'$, а потому, вычисляя производную левой и правой частей равенства, получим

$$\frac{1}{y}y'=\frac{2}{x+5}+\frac{3}{2x-7}\cdot 2+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+3}.$$

Умножая обе части этого равенства на y и учитывая, что y есть заданная функция, получим

$$y'=(x+5)^2(2x-7)^3(x-2)(x+3)\left[\frac{2}{x+5}+\frac{6}{2x-7}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+3}\right].$$

2) Поступая так же, как в первом примере, получим

$$\ln y=\frac{1}{4}\ln(x^2+7x-8)+\frac{1}{6}\ln(x^4-1)-\frac{1}{3}\ln(x^3-3x^2+x-4).$$

Считая функцию $\ln y$ сложной функцией переменной x и дифференцируя обе части равенства, получим

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2+7x-8}(2x+7)+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x^4-1}4x^3-$$
$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3-3x^2+x-4}\cdot(3x^2-6x+1).$$

Умножая обе части этого равенства на y и зная, что y есть заданная функция, получаем окончательно выражение искомой производной:

$$y'=\frac{\sqrt[4]{x^2+7x-8}\cdot\sqrt[6]{x^4-1}}{\sqrt[3]{x^3-3x^2+x-4}}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{2x+7}{x^2+7x-8}+\frac{1}{6}\cdot\frac{4x^3}{x^4-1}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{3}\cdot\frac{3x^2-6x+1}{x^3-3x^2+x-4}\right).$$

3) Здесь опять-таки целесообразно сначала прологарифмировать по основанию e обе части равенства, а потом уже дифференцировать:

$$\ln y = 2\ln(x+5) + 3\ln(x-4) - 5\ln(x+2) - 2\ln(x+4).$$

Считая, как и в двух предыдущих примерах, $\ln y$ сложной функцией переменной x и дифференцируя обе части равенства, получим:

$$\frac{1}{y}y' = 2\cdot\frac{1}{x+5} + 3\cdot\frac{1}{x-4} - 5\cdot\frac{1}{x+2} - 2\cdot\frac{1}{x+4},$$

а после умножения обеих частей равенства на y, учитывая, что y есть заданная функция, получаем окончательное выражение производной

$$y' = \frac{(x+5)^2(x-4)^3}{(x+2)^5(x+4)^2}\left(\frac{2}{x+5} + \frac{3}{x-4} - \frac{5}{x+2} - \frac{2}{x-4}\right).$$

4) Прологарифмируем обе части равенства:

$$\ln y = \frac{1}{2}[\ln(ax+b) - \ln(cx+d)].$$

Считая, что $\ln y$ есть сложная функция переменной x и дифференцируя обе части равенства, получим:

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{ax+b}\cdot a - \frac{1}{cx+d}\cdot c\right].$$

Умножая обе части этого равенства на $y = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$, получим, что искомая производная

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{ax+b} - \frac{c}{cx+d}\right)\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}};$$

и после очевидных упрощений окончательно

$$y' = \frac{ad-bc}{2(ax+b)(cx+d)}\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}};$$

Задача 25,9 (для самостоятельного решения). Найти производные функции:

1) $y = (5x-4)^3(x-2)^2(3-4x)$; 2) $y = \sqrt[5]{\frac{x(x^2+2)}{x-4}}$;

3) $y = \frac{5x^2}{x^2+1}\cdot\sin^3 x\cdot\cos^4 x$; 4) $y = \frac{(x+5)^7(x^2-4x+2)^3}{(x^3+3x^2+5)^2}$.

Задача 25,10 (для самостоятельного решения). Продифференцировать функции:

$$1)\ y = \frac{(2x-3)^2(4x+7)^2}{\sqrt[3]{(x-2)^5(x-4)^7}};\quad 2)\ y = \sqrt{\frac{(2+x)(3-4x)}{(5-2x)(3x-4)}};$$

$$3)\ y = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[6]{(7x-4)^5}\sqrt{(x-1)^3}}.$$

Теперь мы займемся дифференцированием функций вида

$$y = [f(x)]^{\varphi(x)}.$$

Читатель должен обратить внимание на тот факт, что для дифференцирования этой функции непригодна ни формула (22,8), ни (22,10), так как в первой из них основание степени u есть функция x, а показатель степени — величина постоянная, во второй основание степени — постоянная величина, а показатель степени — функция x. В рассматриваемом случае и основание степени $f(x)$, и показатель степени $\varphi(x)$ — величины переменные — функции независимой переменной.

В общем виде задача дифференцирования этой функции решается так:

$$y = [f(x)]^{\varphi(x)}.$$

Прологарифмируем по основанию e обе части равенства и получим

$$\ln y = \varphi(x)\ln f(x).$$

Теперь, считая $\ln y$ сложной функцией переменной x, найдем производную обеих частей последнего равенства, дифференцируя правую часть, как произведение

$$\frac{1}{y}y' = \varphi'(x)\ln f(x) + \varphi(x)\frac{1}{f(x)}f'(x).$$

Умножая теперь обе части этого равенства на y и учитывая, что $y = [f(x)]^{\varphi(x)}$, получаем окончательно

$$y' = [f(x)]^{\varphi(x)}\left\{\varphi'(x)\ln f(x) + \varphi(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right\}.$$

Запоминать эту формулу не следует, а вместо этого надо хорошо усвоить метод вычисления производной от функций рассматриваемого вида.

Задача 25,11. Найти производную функции $y = x^x\ (x > 0)$.

Решение. Беря натуральные логарифмы от обеих частей равенства, получим $\ln y = x\ln x$ и дифференцируем теперь обе части равенства, считая $\ln y$ сложной функцией x:

$$\frac{1}{y}y' = \ln x + \frac{1}{x}x;\quad \frac{1}{y}y' = \ln x + 1.$$

Умножая теперь обе части равенства на y, который по условию равен x^x, получаем окончательно $y' = x^x(\ln x + 1)$.

Замечание. В условии задачи указано, что $x > 0$ потому, что x в последующем оказывается под знаком логарифма, а логарифмы можно вычислять только от положительных чисел.

Задача 25,12. Определить производную функции

$$y = (\sin x)^{\cos x}, \qquad (0 < x < \pi)$$

Решение. Беря натуральные логарифмы обеих частей равенства, получаем

$$\ln y = \cos x \quad \ln \sin x$$

(так как $\sin x$ стоит под знаком логарифма, то является существенной оговорка в условии задачи, что x берется из интервала $(0; \pi)$, так как для значений x из этого интервала $\sin x > 0$ и $\ln \sin x$ имеет смысл). Теперь продифференцируем обе части последнего равенства, считая, что $\ln y$ — сложная функция переменной x:

$$\frac{1}{y} y' = -\sin x \cdot \ln \sin x + \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x.$$

Умножая обе части этого равенства на y, который по условию задачи равен $(\sin x)^{\cos x}$, получаем окончательно, что

$$y' = (\sin x)^{\cos x}\left\{-\sin x \cdot \ln \cos x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right\}.$$

ДВАДЦАТЬ ШЕСТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Гиперболические функции. Дифференцирование гиперболических функций. Дифференцирование неявных функций.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Предыдущие практические занятия убедили читателя в широком применении при решении разобранных задач показательной функции e^x. Но кроме самой этой функции как в математике, так и в прикладных науках применяются различные комбинации ее с функцией e^{-x}.

По определению вводятся такие часто встречающиеся комбинации функций e^x и e^{-x}:

$\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ называется гиперболическим синусом x и обозначается символом $\operatorname{sh} x$;

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \; (-\infty < x < +\infty); \qquad (26,1)$$