ДВАДЦАТЬ ДЕВЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Производные высших порядков. Формула Лейбница.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Производная от функции $y = f(x)$ в общем случае является функцией x. Если от этой функции вычислить производную, то получим производную второго порядка, или, короче, вторую производную функции $y = f(x)$. Таким образом, вторая производная от первоначальной функции есть производная от первой производной.

Производная от второй производной называется третьей производной. Производная от третьей производной называется четвертой производной и т. д.

Обозначения. *Вторая производная функции $y = f(x)$ обозначается одним из символов: y'' (читается: игрек два штриха); $\frac{d^2y}{dx^2}$ (читается: де два игрек по де икс дважды); $f''(x)$ (читается: эф два штриха от икс).*

Третья производная функции $y = f(x)$ обозначается одним из символов: y''' (читается: игрек три штриха); $f'''(x)$ (читается: эф три штриха от x); $\frac{d^3y}{dx^3}$; $y^{(3)}$.

Производная порядка n есть производная от производной порядка $(n-1)$. Эта производная обозначается одним из символов: $f^{(n)}(x)$, $y^{(n)}$ или $\frac{d^ny}{dx^n}$.

Для обозначения последовательных производных нами приняты обозначения: y'', y^3, $y^{(4)}$, ... $y^{(n)}$.

Задача 29,1. Найти третью производную функции $y = 5x^4$.

Решение. $y' = 20x^3$; $y'' = 60x^2$; $y''' = 120x$.

Задача 29,2. $y = 3x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 8$. Найти $y^{(4)}$.

Решение. $y' = 12x^3 + 15x^2 - 8x$; $y'' = 36x^2 + 30x - 8$; $y^{(3)} = 72x + 30$; $y^{(4)} = 72$.

Задача 29,3. $y = \sin^2 x$. Найти $y^{(5)}$.

Решение. $y' = 2\sin x\cos x = \sin 2x$; $y'' = 2\cos 2x$;

$$y^{(3)} = -4\sin 2x; \quad y^{(4)} = -8\cos 2x; \quad y^{(5)} = 16\sin 2x.$$

Задача 29,4. $y = \sqrt{x+5}$. Найти $y^{(4)}$.

Решение. Запишем заданную функцию в виде $y = (x+5)^{\frac{1}{2}}$. Тогда $y' = \frac{1}{2}(x+5)^{-\frac{1}{2}}$; $y'' = -\frac{1}{4}(x+5)^{-\frac{3}{2}}$; $y^{(3)} = \frac{3}{8}(x+5)^{-\frac{5}{2}}$; $y^{(4)} = -\frac{15}{16}(x+5)^{-\frac{7}{2}}$.

Задача 29,5. Найти $y^{(4)}$ от функции $y = \ln \sin x$.

Решение. $y' = \frac{1}{\sin x} \cos x = \operatorname{ctg} x$; $y'' = -\operatorname{cosec}^2 x$,

$y^{(3)} = -2\operatorname{cosec} x\,(-\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{ctg} x) = 2\operatorname{cosec}^2 x \cdot \operatorname{ctg} x$;

$y^{(4)} = 4\operatorname{cosec} x\,(-\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{ctg} x) \quad \operatorname{ctg} x + 2\operatorname{cosec}^2 x\,(-\operatorname{cosec}^2 x) =$

$= -4\operatorname{cosec}^2 x \operatorname{ctg}^2 x - 2\operatorname{cosec}^4 x = -2\operatorname{cosec}^2 x\,(2\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{cosec}^2 x)$.

Задача 29,6 (для самостоятельного решения).

1) $y = \arcsin x$; найти y''. 2) $y = \operatorname{arctg} x$; найти y''.

3) $y = \ln x$; найти $y^{(4)}$. 4) $y = \frac{1+x}{1-x}$; найти $y^{(3)}$.

Ответ. 1) $\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$; 2) $-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$; 3) $-3!x^{-4}$; 4) $\frac{12}{(1-x)^4}$.

Задача 29,7 (для самостоятельного решения).

1) $y = \sqrt{x}$; найти $y^{(3)}$; 2) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, найти $y^{(3)}$; 3) $y = \sqrt[3]{x}$; найти $y^{(4)}$

Ответ. 1) $\frac{3\sqrt{x}}{8x^3}$; 2) $-\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot x^3 \sqrt{x}}$; 3) $-\frac{80}{81x^3 \sqrt[3]{x^2}}$.

Определить от заданной функции производную порядка n — значит найти формулу, по которой можно определить производную любого порядка этой функции. Вообще говоря, для этого надо вычислить все последовательные производные до n-й включительно. Однако этого можно избежать, пользуясь методом математической индукции. На практике поступают так: находят несколько последовательных производных, подмечают закономерность, по которой они все образовываются, и, считая, что эта закономерность выполняется для производной любого порядка, составляют выражение для производной порядка n (заметим, что нулевая производная означает саму функцию).

Мы прежде всего определим производные порядка n основных элементарных функций.

Задача 29,8. Найти $y^{(n)}$ функции $y = x^m$.

Решение. $y' = mx^{m-1}$; $y'' = m(m-1)x^{m-2}$.

$$y''' = m(m-1)(m-2)x^{m-3}.$$

Здесь нетрудно усмотреть закономерность, которая состоит в следующем: 1) число множителей перед x равно порядку производной; 2) первый множитель равен показателю степени m, а каждый следующий — на единицу меньше; 3) в последнем множителе из m вычитается число, на единицу меньшее порядка производной; 4) показатель степени буквы x равен m минус порядок производной. Полагая, что для производной порядка n эта закономерность сохраняется, получаем

$$y^{(n)} = m(m-1)(m-2)\ \ldots\ (m-n+1)x^{m-n}.$$

Задача 29,9. Найти $y^{(n)}$ функции $y = a^x$.

Решение. $y' = a^x \ln a$; $y'' = a^x (\ln a)^2$; $y^{(3)} = a^x (\ln a)^3$; $y^{(4)} = a^x (\ln a)^4$.

Здесь уже нетрудно подметить, что каждая из найденных производных равна произведению a^x на $\ln a$ в степени, равной порядку производной. Полагая, что эта закономерность сохраняется для производной любого порядка, получаем $y^{(n)} = a^x (\ln a)^n$.

Задача 29,10. Найти $y^{(n)}$ функции $y = e^x$.

Решение. $y' = e^x$; $y'' = e^x$; $y^{(3)} = e^x$; ... ; $y^{(n)} = e^x$.

Задача 29,11. Найти $y^{(n)}$ функции $y = \ln x$.

Решение. $y' = \frac{1}{x} = (-1)^0 \cdot \frac{1}{x}$; $y'' = -\frac{1}{x^2} = (-1)^1 \cdot \frac{1}{x^2}$, $y^{(3)} = \frac{2}{x^3} = (-1)^2 \cdot \frac{1 \cdot 2}{x^3}$; $y^{(4)} = -\frac{2 \cdot 3x^2}{x^6} = -\frac{2 \cdot 3}{x^4} = (-1)^3 \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4}$.

Усмотрим закономерность, по которой составлена каждая из этих производных: 1) все производные содержат множителем число -1 в степени, которая на единицу меньше порядка производной; 2) числитель дроби есть произведение натуральных чисел, начиная с единицы и кончая числом, на единицу меньшим порядка производной; 3) знаменатель дроби есть x в степени, равной порядку производной. Считая, что эта закономерность сохраняется для производной любого порядка, получаем

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)}{x^n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n};$$

по этой формуле, например, $y^{(7)} = (-1)^6 \frac{6!}{x^7}$.

Задача 29,12. Найти $y^{(n)}$ функции $y = \sin x$.

Решение. $y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; $y'' = -\sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 2\right)$;

$y^{(3)} = -\cos x = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$; $y^{(4)} = \sin x = \sin\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$.

Легко усматривается закономерность, по которой образованы все эти производные: у каждой из них под знаком синуса к x прибавляется произведение $\frac{\pi}{2}$ на порядок производной. Считая что эта закономерность сохраняется для производной любого порядка, получаем, что $y^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$.

Задача 29, 13 (для самостоятельного решения). Найти $y^{(n)}$ функции $y = \cos x$.

Ответ. $y^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$.

Задача 29, 14 (для самостоятельного решения). Найти $y^{(n)}$ функции $y = \frac{1}{x}$.

Ответ. $y^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}$.

Задача 29,15. Вычислить $y^{(n)}$ функции $y=\sqrt{x}$, пользуясь формулой, полученной в задаче 29,8 при $m=\frac{1}{2}$, а затем эту же производную вычислить непосредственно.

Ответ. $y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n-1)\,2^n}\frac{\sqrt{x}}{x^n}$*).

Задача 29,16 (для самостоятельного решения). Найти $y^{(n)}$ функции $y=(a+bx)^m$;

Ответ. $y^{(n)}=m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)\,b^n(a+bx)^{m-n}$;

Задача 29,17 (для самостоятельного решения). Доказать на основании формулы, полученной при решении предыдущей задачи, что

1) $\left(\frac{1}{a+bx}\right)^{n}=\frac{(-1)^n n!\,b^n}{(a+bx)^{n+1}}$; 2) $\left(\frac{1}{\sqrt{a+bx}}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n(2n-1)!!\,b^n}{2^n(a+bx)^n\sqrt{a+bx}}$.

Задача 29,18. (для самостоятельного решения). Доказать, что

1) $(\sin px)^{(n)}=p^n\sin\left((px+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$; 2) $(\cos px)^{(n)}=p^n\cos\left(px+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$.

Задача 29,19 (для самостоятельного решения). Показать, что функции $y=c_1\cos x+c_2\sin x$ (c_1 и c_2 — постоянные величины) удовлетворяет уравнению $y''+y=0$.

Задача 29,20. (для самостоятельного решения). Показать, что функция $u=c_1r+c_2\frac{1}{r}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{1}{r^2}u=0$$

(c_1 и c_2 — постоянные величины).

Задача 29,21 (для самостоятельного решения). Показать, что функция $V=c_1\cos ax+c_2\sin ax+c_3x+c_4$ удовлетворяет уравнению $V^{(4)}+a^2V''=0$ (c_1, c_2, c_3, c_4, — постоянные величины).

МЕХАНИЧЕСКОЕ ИСТОЛКОВАНИЕ ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Если точка движется по прямой и задан ее закон движения $s=f(t)$ (s — путь, t — время), то ускорение точки равно второй производной от пути по времени.

Задача 29,22. Найти ускорение точки, совершающей простые гармонические колебания по закону $s=A\sin(\omega t+\varphi)$.

Решение. $\frac{ds}{dt}=A\omega\cos(\omega t+\varphi)$; $\frac{d^2s}{dt^2}=-A\omega^2\sin(\omega t+\varphi)$, но так как $s=A\sin(\omega t+\varphi)$, то $\frac{d^2s}{dt^2}=-\omega^2s$.

---

* Символ $(2n-1)!!$ означает произведение нечетных натуральных чисел от 1 до $(2n-1)$ включительно. Например, $9!!=1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9$.

Задача 29,23 (для самостоятельного решения). Доказать, что если точка совершает затухающие колебания по закону $x = Ae^{-kt}\sin\omega t$, то ее ускорение $\frac{d^2x}{dt^2} = -(\omega^2 + k^2)x - 2kv$; где v — скорость точки $\left(v = \frac{dx}{dt}\right)$.

Формула Лейбница. Эта формула дает возможность вычислить производную любого порядка от произведения двух функций, минуя последовательное применение формулы для вычисления производной от произведения двух функций. Формула Лейбница записывается так:

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)}. \quad (29,1)$$

Задача 29,24. Найти $y^{(5)}$, если $y = e^{4x}\sin 3x$.

Решение. Если $y = uv$, то на основании (29,1)

$$y^{(5)} = u^{(5)}v + c_5^1 u^{(4)}v' + c_5^2 u^{(3)}v'' + c_5^3 u''v^{(3)} + c_5^4 u'v^{(4)} + uv^{(5)} \quad (29,2)$$

Полагая в заданной функции $u = e^{4x}$, $v = \sin 3x$, для применения формулы (29,2) нам следует найти первые пять последовательных производных каждой функции u и v:

$u' = 4e^{4x}$; $u'' = 16e^{4x}$; $u^{(3)} = 64e^{4x}$; $u^{(4)} = 256e^{4x}$; $u^{(5)} = 1024e^{4x}$;
$v' = 3\cos 3x$; $v'' = -9\sin 3x$; $u^{(3)} = -27\cos 3x$; $v^{(4)} = 81\sin 3x$;
$v^{(5)} = 243\cos 3x$.

Подставляя эти производные в (29,2), получим

$$y^{(5)} = 1024e^{4x}\cdot\sin 3x + 5\cdot 256e^{4x}\cdot 3\cos 3x + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}64e^{4x}(-9\sin 3x) + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}16e^{4x}(-27\cos 3x) + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}4e^{4x}\cdot 81\sin 3x + e^{4x}\times$$

$\times\, 243\cos 3x$; и после упрощений $y^{(5)} = -e^{4x}(3116\sin 3x + 237\cos 3x)$.

Задача 29,25 (для самостоятельного решения). $y = x^4e^{2x}$; найти $y^{(6)}$.

Ответ. $y^{(6)} = 64e^{2x}(x^4 + 12x^3 + 45x^2 + 60x + 22{,}5)$.

Задача 29,26 (для самостоятельного решения). Найти производную порядка n от функции $y = x^2e^x$.

Ответ. $y^{(n)} = [x^2 + 2nx + n(n-1)]\,e^x$.

Задача 29,27 (для самостоятельного решения). Определить $y^{(4)}$ от функции $y = x^3\ln\frac{x}{a}$.

Ответ. $y^{(4)} = \frac{6}{x}$.

Задача 29,28 (для самостоятельного решения). $y = e^x \cos x$. Найти $y^{(5)}$.

Ответ. $y^{(5)} = 4\sqrt{2}e^x \cos\left(x + \frac{5}{4}\pi\right)$.

ТРИДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Правило Лопиталя. Предел отношения двух бесконечно малых и двух бесконечно больших величин $\left(\text{раскрытие «неопределенностей» видов: } \frac{0}{0} \text{ и } \frac{\infty}{\infty} \text{ и приводящихся к ним}\right)$.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

При вычислении предела отношения $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *может оказаться, что при* $x \to a$ *числитель и знаменатель одновременно стремятся к нулю или к бесконечности, т. е. являются одновременно бесконечно малыми или бесконечно большими величинами. Говорят, что в этих случаях мы имеем дело с «неопределенностями» вида* $\frac{0}{0}$ *или* $\frac{\infty}{\infty}$.

Вычисление предела в этом случае называется «раскрытием неопределенности» и производится по правилу, указанному французским математиком Гильомом Лопиталем (1661—1704 гг.)

Правило Лопиталя. *Если функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *таковы, что:*

1)
$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \ \text{ и } \ \lim_{x\to a} \varphi(x) = 0;$$

или

$$\lim_{x\to x} f(x) = \pm\infty \text{ и } \lim_{x\to a} \varphi(x) = \pm\infty;$$

2) они имеют первые производные в окрестности точки $x = a$ *(за возможным исключением самой точки* a*);*

3) существует $\lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, *тогда существует также и* $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *и имеет место равенство* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Сущность этого правила состоит в том, что в случае «неопределенностей» вида $\frac{0}{0}$ *или* $\frac{\infty}{\infty}$ *вычисление предела отношения функций, при соблюдении указанных требований, заменяется вычислением предела отношения их производных, которое в большом числе случаев оказывается проще.*

В случае, когда и отношение производных приводит к одному из этих видов «неопределенностей» $\frac{0}{0}$ *или* $\frac{\infty}{\infty}$, *можно уже к этому*