ТРИДЦАТЬ ШЕСТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Геометрические приложения производной: уравнения касательной и нормали к плоской кривой. Длины касательной и нормали. Подкасательная и нормаль и их длины. Кривизна, радиус кривизны. Центр кривизны. Соотношение между радиусом кривизны и длиной нормали. Эволюта кривой.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Касательная к кривой

а) Если кривая определена уравнением $y = f(x)$, то уравнение касательной к ней в точке M с координатами (x_1, y_1) имеет вид

$$y - y_1 = y'(x_1)(x - x_1). \tag{36,1}$$

б) Если кривая задана уравнением $f(x, y) = 0$, то уравнение касательной, проведенной в точку $M(x_1, y_1)$ на ней, имеет вид

$$y - y_1 = y'(x_1, y_1)(x - x_1), \tag{36,2}$$

где $y'(x_1, y_1)$ есть производная неявной функции $f(x, y) = 0$, в которой буквы x и y заменены числами x_1 и y_1 — координатами точки касания.

в) Если кривая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \end{cases} \tag{36,3}$$

то касательная к этой кривой в точке, соответствующей значению параметра $t = t_1$, определяется уравнением

$$y - y_1 = y'_x(t_1)(x - x_1), \tag{36,4}$$

причем $y'_x(t_1)$ определяется по формуле (27,3), и в полученном выражении буква t заменяется числом t_1. Числа же x_1 и y_1 находятся из (36,3), если там заменить букву t числом t_1.

2. Нормаль к кривой

а) Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то нормаль к ней в точке $M(x_1, y_1)$ имеет уравнение

$$y - y_1 = -\frac{1}{y'(x_1)}(x - x_1). \tag{36,5}$$

б) Если кривая задана уравнением $f(x, y) = 0$, то уравнение нормали записывается так:

$$y - y_1 = -\frac{1}{y'(x_1, y_1)}(x - x_1). \tag{36,6}$$

в) В случае, если кривая задана параметрическими уравнениями, то нормаль к ней в точке, где параметр $t = t_1$, имеет уравнение

$$y - y_1 = -\frac{1}{y'_x(t_1)}(x - x_1). \tag{36,6a}$$

3. Длины касательной и нормали. Подкасательная и поднормаль

Определение. *Длиною касательной или нормали к кривой в точке $M(x_1, y_1)$ называется длина отрезка этих прямых от точки касания до точки их пересечения с осью Ox. Эти длины обозначаются соответственно буквами T и N. Подкасательная и поднормаль являются соответственно проекциями отрезков T и N на ось Ox.* Их длины будем обозначать: S_T и S_N. Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то для определения длин этих отрезков служат формулы:

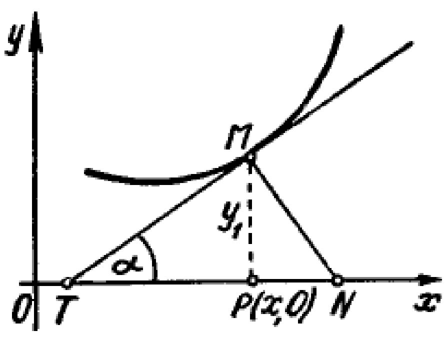
$$T = \left|\frac{y'}{y'(x_1)}\sqrt{1 + [y'(x_1)]^2}\right|; \tag{36,7}$$

$$S_T = \left|-\frac{y_1}{y'(x_1)}\right|; \tag{36,8}$$

$$N = \left|y_1\sqrt{1 + [y'(x_1)]^2}\right|; \tag{36,9}$$

$$S_N = |y_1 \cdot y'(x_1)|. \tag{36,10}$$

Касательную и нормаль легко построить, если соединить конец подкасательной T и конец поднормали N с точкой касания M на кривой. Но для определения положения на оси Ox точек T и N — концов подкасательной и поднормали (фиг. 36) недостаточно знать длины этих отрезков, определяемые по формулам (36,8) и (36,10), а необходимо еще знать направление, в котором надо отложить длины этих отрезков от точки P для получения точек T и N. Условимся считать подкасательную PT и поднормаль PN положительными или отрицательными, смотря по тому, будут ли направления от P к T и от P к N совпадать с положительным или отрицательным направлением оси Ox. По величине и по знаку $PN = y_1 y'(x_1)$, а $PT = -\frac{y_1}{y'(x_1)}$.



Фиг. 36.

Отсюда следует, что PT и PN имеют противоположные знаки, так как произведение $y_1 y'(x_1)$ и частное $\frac{y_1}{y'(x_1)}$ имеют один и тот же знак.

Если окажется, что $PT > 0$, то точка T лежит с положительной стороны, а точка N — с отрицательной стороны от P. Противоположное расположение получим, когда $PT < 0$. Иначе: точка T лежит с положительной стороны от P, а точка N — с отрицательной, если y_1 и $y'(x)$ имеют разные знаки, а противоположное расположение этих точек имеет место тогда, когда y_1 и $y'(x_1)$ имеют одинаковые знаки.

В случае, когда кривая задана параметрическими уравнениями, для определения величин T, N, S_T и S_N следует сначала по заданному в точке касания значению параметра $t = t_1$ определить координаты точки касания x_1 и y_1, вычислить y'_x в точке касания при $t = t_1$, а затем воспользоваться формулами (36,7) — (36,10), причем в них следует заменить $y'(x_1)$ на $y'_x(t_1)$.

В случае, если уравнение кривой задано в виде $f(x, y) = 0$, в тех же формулах надо значение производной $y'(x_1)$ заменить на $y'(x_1, y_1)$ где x_1 и y_1 — по-прежнему координаты точки касания.

Если кривая задана в полярных координатах уравнением $r = f(\varphi)$, то длиной ее касательной и нормали считается длина отрезков этих линий от точки касания $M(r_1, \varphi_1)$ до точки пересечения их с прямой, проходящей через полюс перпендикулярно к радиусу-вектору, проведенному в точку касания. Эти отрезки называются полярной касательной и полярной нормалью. Проекции этих отрезков на указанную прямую называются полярной подкасательной и полярной поднормалью. Длины этих четырех отрезков вычисляются по формулам:

$$T = \left| \frac{r_1}{r'(\varphi_1)} \sqrt{r_1^2 + [r'(\varphi_1)]^2} \right|; \tag{36,11}$$

$$N = \left| \sqrt{r_1^2 + [r'(\varphi_1)]^2} \right|; \tag{36,12}$$

$$S_T = \frac{r_1^2}{|r'(\varphi_1)|}; \tag{36,13}$$

$$S_N = |r'(\varphi_1)|. \tag{36,14}$$

Во всех этих формулах r_1 и φ_1 — полярные координаты точки касания.

4. Кривизна и радиус кривизны

а) Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то ее кривизна K и радиус кривизны R определяются по формулам

$$K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{36,15}$$

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}. \tag{36,16}$$

Входящий в эти формулы $\sqrt{1+y'^2}$ берется со знаком плюс. Кривизна и радиус кривизны кривой, по определению — величины не отрицательные.

б) В случае, если кривая задана параметрическими уравнениями (36,3), то в точке, для которой параметр $t = t_1$,

$$K = \frac{|y''(t_1)\,x'(t_1) - x''(t_1)\,y'(t_1)|}{[x'^2(t_1) + y'^2(t_1)]^{\frac{3}{2}}}, \tag{36,17}$$

$$R = \frac{[x'^2(t_1) + y'^2(t_1)]^{\frac{3}{2}}}{|y''(t_1)\,x'(t_1) - x''(t_1)\,y'(t_1)|}, \tag{36,18}$$

причем берется только положительное значение корня $\sqrt{x'^2(t_1) + y'^2(t_1)}$.

в) Если кривая задана уравнением в полярных координатах

$$r = f(\varphi),$$

$$K = \frac{|r_1^2 + 2r'^2(\varphi_1) - r_1 r''(\varphi_1)|}{[r_1^2 + r'^2(\varphi_1)]^{\frac{3}{2}}}; \tag{36,19}$$

$$R = \frac{[r_1^2 + r'^2(\varphi_1)]^{\frac{3}{2}}}{|r_1^2 + 2r'^2(\varphi_1) - r_1 r''(\varphi_1)|}, \tag{36,20}$$

где r_1 и φ_1 — полярные координаты точки, в которой вычисляются K и R, а $\sqrt{r_1^2 + r'^2(\varphi_1)}$ следует брать со знаком плюс.

5. Круг кривизны. Центр кривизны. Эволюта и эвольвента

Координаты α и β це́нтра кривизны в точке $M(x_1, y_1)$ кривой определяются по формулам

$$\begin{cases} \alpha = x_1 - \dfrac{y'(x_1)\,(1 + y'^2(x_1))}{y''(x_1)}, \\ \beta = y_1 + \dfrac{1 + y'^2(x_1)}{y''(x_1)}. \end{cases} \tag{36,21}$$

В случае, когда кривая задана параметрическими уравнениями (36,3), координаты центра кривизны в ее точке M, соответствующей значению параметра $t = t_1$, определяются по формулам

$$\begin{cases} \alpha = x(t_1) - \dfrac{y'_t(t_1)\,[x'^2_t(t_1) + y'^2_t(t_1)]}{x'_t(t_1)\,y''_{t^2}(t_1) - x''_{t^2}(t_1)\,y'_t(t_1)}; \\ \beta = y(t_1) + \dfrac{x'_t(t_1)\,[x'^2_t(t_1) + y'^2_t(t_1)]}{x'_t(t_1)\,y''_{t^2}(t_1) - x''_{t^2}(t_1)\,y'_t(t_1)}. \end{cases} \tag{36,22}$$

Формулы (36,22) применимы и тогда, когда кривая задана полярным уравнением $r = f(\varphi)$. Так как в полярных координатах

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, то, подставляя сюда $r = f(\varphi)$, получим $x = f(\varphi)\cos\varphi$, $y = f(\varphi)\sin\varphi$, и параметром теперь является полярный угол φ.

Определение. *Геометрическое место центров кривизны данной кривой называется ее эволютой. По отношению к своей эволюте исходная кривая называется эвольвентой,*

Если в формулах (36,21) опустить индекс у x_1 и y_1 и заменить y на $f(x)$, а в формулах (36,22) опустить индекс у t, то эти формулы можно считать параметрическими уравнениями эволюты, причем в первом случае параметром является x, во втором — t.

Исключение параметра x из уравнений (36,21) или параметра t из уравнений (36,22) определит эволюту неявным уравнением

$$F(\alpha, \beta) = 0.$$

Задача 36,1. Для параболы $y^2 = 2px$ в произвольной ее точке $M(x_1, y_1)$ найти уравнение касательной и нормали, длины подкасательной и поднормали, длины касательной и нормали, радиус кривизны, координаты центра кривизны и эволюту.

Решение. Прежде всего из уравнения параболы определим y' и y'' в точке с координатами (x_1, y_1): $2yy' = 2p$; $y' = \frac{p}{y}$; $y'(x_1, y_1) = \frac{p}{y_1}$; $y'' = -\frac{p}{y^2}y'$.

Подставляя сюда найденное значение y', получим $y'' = -\frac{p^2}{y^3}$, $y''(x_1, y_1) = -\frac{p^2}{y_1^3}$. Подставляя $y'(x_1, y_1)$ в уравнение касательной (36,1), получим

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1), \text{ или } yy_1 - y_1^2 = px - px_1. \qquad (36,23)$$

Так как точка $M(x_1, y_1)$ лежит на параболе, то ее координаты удовлетворяют уравнению параболы, а потому

$$y_1^2 = 2px_1. \qquad (36.24)$$

Используем эту зависимость для упрощения уравнения (36,23) касательной. Для этого в его правой части прибавим и отнимем px_1 и получим

$$yy_1 - y_1^2 = px + px_1 - px_1 - px_1,$$

или

$$yy_1 - y_1^2 = p(x + x_1) - 2px_1,$$

а с учетом того, что $y_1^2 = 2px_1$, уравнение касательной запишется в виде

$$yy_1 = p(x + x_1).$$

Подставляя значение производной $y'(x_1 y_1)$ в уравнение (35,5), получим уравнение нормали

$$y - y_1 = -\frac{1}{\frac{p}{y_1}}(x - x_1),$$

которое после упрощений запишется так:

$$y_1(x - x_1) + p(y - y_1) = 0.$$

Формула (36,8) дает для длины подкасательной

$$S_T = \left| -\frac{y_1}{\frac{p}{y_1}} \right|; \quad S_T = \left| -\frac{y_1^2}{p} \right|. \tag{36,25}$$

Используя равенство (36,24), получим, что $S_T = |-2x_1|$, т. е. длина подкасательной параболы равна удвоенной абсциссе точки касания. Так как в (36,25) $-\frac{y_1^2}{p}$ отрицательное число, то для построения подкасательной ее длину $2x_1$ надо отложить от основания ординаты точки касания в отрицательном направлении оси Ox. Соединив конец подкасательной с точкой касания, получим касательную к параболе.

Из того, что $y' = \frac{p}{y_1}$, следует, что $y_1 y'(x_1, y_1) = p$.

Так как левая часть этого равенства, взятая по абсолютной величине, на основании (36,10) есть длина поднормали, то мы заключаем, что у параболы длина поднормали есть величина постоянная, равная параметру параболы. Так как $p > 0$, то мы получим поднормаль, если отложим по оси Ox в положительном ее направлении от основания ординаты точки касания отрезок, равный параметру параболы. Соединив конец этого отрезка с точкой касания, получим нормаль к параболе. Получить самостоятельно по формулам (36,6) и (36,9), что длины касательной и нормали равны

$$T = \left| \frac{y_1}{p} \sqrt{y_1^2 + p^2} \right|; \quad N = \sqrt{y_1^2 + p^2}.$$

Радиус кривизны определим по формуле (36,16), подставив в нее y' и y'':

$$R = \frac{\left(1 + \frac{p^2}{y_1^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left| -\frac{p^2}{y_1^3} \right|}, \quad R = \frac{(y_1^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

Самостоятельно докажите, что радиус кривизны в любой точке параболы $y^2 = 2px$ равен кубу длины нормали, проведенной в эту точку, разделенному на квадрат ее параметра, т. е.

$$R = \frac{N^3}{p^2}.$$

Координаты центра кривизны находим по формулам (36,21) с учетом найденных значений y' и y'':

$$\alpha = x_1 - \frac{\frac{p}{y_1}\left[1 + \frac{p^2}{y_1^2}\right]}{-\frac{p^2}{y_1^3}}; \quad \beta = y_1 + \frac{1 + \frac{p^2}{y_1^2}}{-\frac{p^2}{y_1^3}},$$

и после упрощений

$$\alpha = \frac{px_1 + y_1^2 + p^2}{p}; \quad \beta = -\frac{y_1^3}{p^2}.$$

Эволюта параболы. В последних уравнениях опустим индексы у x и y и, учитывая, что из уравнения параболы $y^2 = 2px$, а $y = \pm\sqrt{2px}$, получим

$$\alpha = \frac{px + 2px + p^2}{p}; \quad \alpha = 3x + p; \quad \beta = -\frac{\pm 2px\sqrt{2px}}{p^2};$$

$$\beta = \pm\frac{2px\sqrt{2px}}{p^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\left.\begin{aligned}(\alpha - p)^3 &= 27x^3 \\ \beta^2 &= \frac{8x^3}{p}\end{aligned}\right\}.$$

Это и есть параметрические уравнения эволюты параболы, а параметром является x. Чтобы исключить параметр x, разделим почленно первое уравнение на второе и получим, что

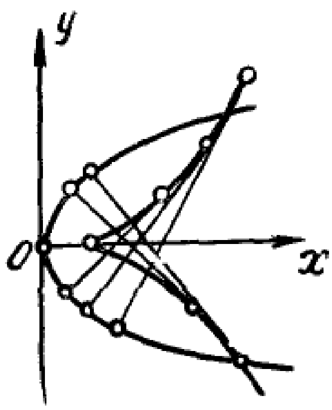
$$\frac{(\alpha - p)^3}{\beta^2} = \frac{27p}{8},$$

а отсюда получается уравнение эволюты в виде

$$\beta^2 = \frac{8}{27p}(\alpha - p)^3.$$

Текущими координатами здесь являются α и β. Обозначая их, как обычно, через x и y, получим

$$y^2 = \frac{8}{27p}(x - p)^3.$$



Фиг. 36,1.

Это полукубическая парабола, вершина которой находится в точке $(p, 0)$ (фиг. 36,1).

Задача 36,2. Для эллипса, заданного уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

найти в произвольной точке на нем $M(x_1,\ y_1)$:

1) уравнения касательной и нормали;
2) длины подкасательной и поднормали;
3) радиус кривизны;
4) координаты центра кривизны;
5) эволюту.

Решение. Запишем уравнение эллипса в неявном виде:

$$b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$$

и найдем y' и y'' по правилу дифференцирования неявных функций:

$$2b^2x+2a^2yy'=0;\quad y'=-\frac{b^2x}{a^2y};\quad y''=-\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

В точке касания $M(x_1,\ y_1)$

$$y'(x_1,\ y_1)=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1};\quad y''(x_1,\ y_1)=-\frac{b^4}{a^2y_1^3}.$$

Уравнение касательной по формуле (36,2) запишется так:

$$y-y_1=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1),$$

или

$$b^2x_1x+a^2y_1y=b^2x_1^2+a^2y_1^2.$$

Так как точка $M(x_1,\ y_1)$ лежит на эллипсе, то ее координаты удовлетворяют уравнению эллипса, а потому $b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2$, и уравнение касательной запишется так:

$$b^2x_1x+a^2y_1y=a^2b^2,$$

или после деления обеих частей этого уравнения на a^2b^2

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1.$$

Уравнение нормали получите самостоятельно по формуле (36,6). Оно будет таким:

$$\frac{a^2x}{x_1}-\frac{b^2y}{y_1}=c^2\quad (c^2=a^2-b^2).$$

Длина подкасательной найдется по формуле (36,8):

$$S_T=\left|-\frac{y_1}{-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}}\right|=\left|\frac{a^2y_1^2}{b^2x_1}\right|,$$

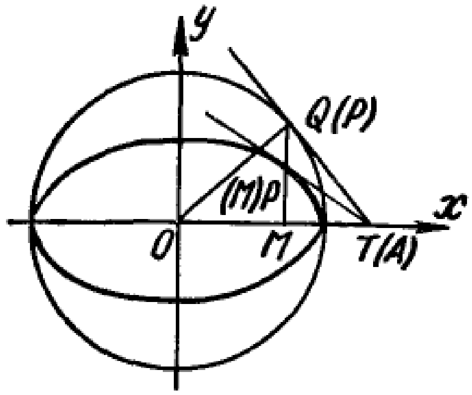
но $a^2y_1^2 = a^2b^2 - b^2x_1^2 = b^2(a^2 - x_1^2)$, а потому

$$S_T = \left|\frac{a^2 - x_1^2}{x_1}\right|,$$

и, таким образом, длина подкасательной не зависит от b — малой полуоси эллипса. Это значит, что у эллипсов, имеющих одну общую ось $2a$, их подкасательные в точках с одинаковыми абсциссами, равны между собой (фиг. 36,2).

Длина поднормали на основании формулы (36,10)

$$S_N = \left|y_1\left(-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\right)\right| = \left|-\frac{b^2}{a^2}x_1\right|.$$



Фиг. 36,2

По формуле (36,16) определится радиус кривизны

$$R = \frac{(a^4y_1^2 + b^4x_1^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4},$$

а по формулам (36,21) координаты центра кривизны

$$\alpha = x_1 - \frac{-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\left(1 + \frac{b^4x_1^2}{a^4y_1^2}\right)}{-\frac{b^4}{a^2y_1^3}} = x_1 - \frac{(a^4y_1^2 + b^4x_1^2)\,x_1}{a^4b^2};$$

$$\beta = y_1 + \frac{1 + \frac{b^4x_1^2}{a^4y_1^2}}{-\frac{b^4}{a^2y_1^3}} = y_1 - \frac{(a^4y_1^2 + b^4x_1^2)\,y_1}{a^2b^4}.$$

Теперь получим уравнение эволюты эллипса: в последних двух формулах для вычисления α и β опустим индекс у x и y и получим, что

$$\begin{cases} \alpha = x - \dfrac{(a^4y^2 + b^4x^2)\,x}{a^4b^2}, \\ \beta = y - \dfrac{(a^4y^2 + b^4x^2)\,y}{a^2b^4}. \end{cases}$$

Постараемся с помощью уравнения эллипса исключить из последних двух равенств x и y. Из уравнения эллипса следует, что

$$a^2y^2 = a^2b^2 - b^2x^2,$$
$$b^2x^2 = a^2b^2 - a^2y^2.$$

В выражениях для α и β заменим a^2y^2 и b^2x^2 по этим формулам, в правых частях выполним вычитание, раскроем скобки и, учитывая, что у эллипса $a^2-b^2=c^2$, получим после очевидных сокращений, что

$$\alpha=\frac{c^2x^3}{a^4}; \quad \beta=-\frac{c^2y^3}{b^4}.$$

Перепишем их в виде

$$a\alpha=\frac{c^2x^3}{a^3}; \quad b\beta=-\frac{c^2y^3}{b^3}$$

и возведем каждое из этих равенств в степень $\frac{2}{3}$.

Получаем

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}}=\frac{c^{\frac{4}{3}}x^2}{a^2}; \quad (b\beta)^{\frac{2}{3}}=\frac{c^{\frac{4}{3}}y^2}{b^2}$$

и сложим их почленно:

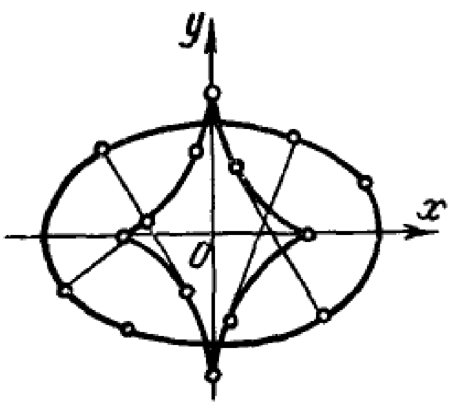
$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}}+(b\beta)^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right).$$

Но из уравнения эллипса следует, что

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

а потому

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}}+(b\beta)^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}}.$$



Фиг. 36,3

Это и есть уравнение эволюты эллипса. Здесь α и β — текущие координаты.

Если их обозначить через x и y, то уравнение эволюты перепишется в виде

$$(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}}.$$

Кривая, определяемая этим уравнением, напоминает астроиду и получается из нее растяжением по вертикали (см. фиг. 36,3).

Задача 36,3 (для самостоятельного решения). Взять параметрические уравнения эллипса в виде

$$x=a\cos t; \quad y=b\sin t$$

и доказать, что в точке, соответствующей значению параметра $t = t_1$, имеют место следующие равенства:

$$S_T = |a \sin t_1 \cdot \operatorname{tg} t_1|; \quad S_N = \left|-\frac{b^2}{a}\cos t_1\right|;$$

$$T = \left|-\operatorname{tg} t_1 \sqrt{a^2 \sin^2 t_1 + b^2 \cos^2 t_1}\right|;$$

$$N = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 \sin^2 t_1 + b^2 \cos^2 t_1};$$

$$R = \frac{(a^2 \sin^2 t_1 + b^2 \cos^2 t_1)^{\frac{3}{2}}}{ab};$$

$$\alpha = \frac{c^2}{a}\cos^3 t_1; \quad \beta = -\frac{c^2}{b}\sin^3 t_1.$$

Пользуясь выражением для радиуса кривизны, доказать, что в вершинах эллипса $\left(t = 0 \text{ и } t = \frac{\pi}{2}\right)$ радиус кривизны

$$(R)_{t=0} = \frac{b_2}{a}; \quad (R)_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{b},$$

а координаты центра кривизны в этих точках:

$$(a)_{t=0} = \frac{c^2}{a}; \quad (\beta)_{t=0} = 0; \quad (\alpha)_{t=\frac{\pi}{2}} = 0; \quad (\beta)_{t=\frac{\pi}{2}} = -\frac{c^2}{b}.$$

Задача 36,4 (для самостоятельного решения). Пользуясь результатами предыдущей задачи, доказать, что у эллипса радиус кривизны равен кубу нормали, разделенному на квадрат параметра эллипса.

Указание. Параметром p эллипса называется половина длины его хорды, проведенной через фокус перпендикулярно большой оси: $p = \frac{b^2}{a}$.

Задача 36,5. (для самостоятельного решения). Найти уравнение касательной и нормали к кривой $y = 3x^4 - 5x^2 + 4$ в точке $x = -1$, $y = 2$.

Ответ. Уравнение касательной:

$$2x + y = 0.$$

Уравнение нормали:

$$x - 2y + 5 = 0.$$

Задача 36,6. Найти уравнения касательной и нормали к кривой

$$4x^3 - 3xy^2 + 6x^2 - 5xy - 8y^2 + 9x + 14 = 0$$

в точке $(-2,3)$.

Решение. Уравнение кривой задано в неявной форме. Находим производную по правилу дифференцирования неявной функции:

$$12x^2 - 3y^2 - 6xyy' + 12x - 5y - 5xy' - 16yy' + 9 = 0;$$

$$y' = \frac{12x^2 - 3y^2 + 12x - 5y + 9}{6xy + 5x + 16y}; \quad y'(-2,\ 3) = -\frac{9}{2}.$$

Уравнение касательной

$$9x + 2y + 12 = 0;$$

уравнение нормали

$$2x - 9y + 31 = 0.$$

Задача 36,7. Найти уравнение касательной и нормали кривой

$$\begin{cases} x = 3t - 5 \\ y = t^2 - 4 \end{cases}$$

в точке, где $t = 3$.

Решение. Для того чтобы воспользоваться формулами (36,4) и (35,6*а*), надо определить x_1, y_1 и $y'(t)$ при $t = 3$. Определим прежде всего x_1 и y_1:

$$x_1 = 3 \cdot 3 - 5 = 4,$$
$$y_1 = 3^2 - 4 = 5.$$

После этого находим y'_x производную в точке, где

$$t = 3; \quad y'_t = 2t; \quad x'_t = 3; \quad y'_x = \frac{2t}{3}; \quad y'_x(3) = 2.$$

Уравнение касательной $y - 5 = 2(x - 4)$, или $2x - y - 3 = 0$.

Уравнение нормали $y - 5 = -\frac{1}{2}(x - 4)$, или $x + 2y - 14 = 0$.

Задача 36,8 (для самостоятельного решения). Найти уравнение касательной и нормали к кривой

$$\begin{cases} x = 2\cos t + 3\sin t \\ y = \cos t + 2\sin t \end{cases}$$

в точке, где $t = \frac{\pi}{2}$.

Ответ. Уравнение касательной $x - 2y + 1 = 0$;
уравнение нормали $2x + y - 8 = 0$.

Задача 36,9 (для самостоятельного решения). Найти уравнение касательной и нормали к гиперболе

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

в точке на ней $(x_1,\ y_1)$.

Ответ. Уравнение касательной $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$;

уравнение нормали $\frac{a^2x}{x_1} + \frac{b^2y}{y_1} = c^2$ $(c^2 = a^2 + b^2)$.

Задача 36,10. Для циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \tag{36,26}$$

в точке, где $t = t_1$, определить:

1) уравнения касательной, нормали и длину поднормами;

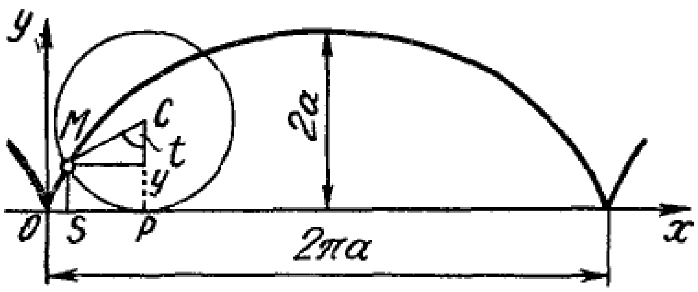
2) доказать, что нормаль в произвольной точке циклоиды проходит через точку касания производящего круга, а касательная — через соответствующую ей высшую точку этого круга;

3) доказать, что у циклоиды радиус кривизны имеет длину в два раза большую, чем соответствующая нормаль;

4) определить координаты центра кривизны и доказать, что эволюта циклоиды есть циклоида, конгруэнтная данной*, но перемещенная на отрезок $a\pi$ в положительном направлении оси Ox и на отрезок $2a$ в отрицательном направлении оси Oy.

Решение. Если круг радиуса a катится без скольжения по прямой, то всякая точка, лежащая на его окружности, описывает кривую, которая называется циклоидой. Уравнения (36,26) есть параметрические уравнения циклоиды. Примем прямую, по которой катится круг, за ось Ox.

Если в исходном положении точка, вычерчивающая циклоиду, находилась в начале координат, а центр катящегося круга был на оси Oy, то параметр t есть центральный угол, соответствующий дуге, на которую прокатился круг по оси Ox.



Фиг. 36,4.

Циклоида состоит из конгруэнтных арок, каждая из которых соответствует одному полному обороту производящего круга. Расстояние на оси Ox между началом и концом одной арки равно длине окружности производящего циклоиду круга, т. е. $2\pi a$. Когда точка описывает одну полную арку циклоиды, параметр t изменяется от $t = 0$ до $t = 2\pi$ (фиг. 36,4).

1) Пусть при $t = t_1$, $x = x_1$, $y = y_1$, причем

$$x_1 = a(t_1 - \sin t_1); \quad y_1 = a(1 - \cos t_1). \tag{36,26a}$$

---

* Две геометрические фигуры называются конгруэнтными, если одну из них можно совместить с другой, изменив только в результате некоторого движения ее положение на плоскости.

Чтобы найти уравнения касательной и нормали на основании (36,4) и (36,6а), найдем y'_x при $t = t_1$:

$$y'_t = a\sin t; \quad x'_t = a(1-\cos t);$$

$y'_x = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}$, а в точке, где $t = t_1$, $y'_x(t_1) = \operatorname{ctg}\frac{t_1}{2}$.

Уравнение касательной $y - y_1 = \operatorname{ctg}\frac{t_1}{2}(x - x_1)$;

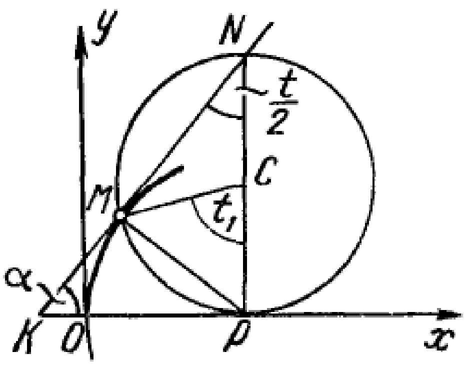
уравнение нормали $y - y_1 = -\operatorname{tg}\frac{t_1}{2}(x - x_1)$.

Длина поднормали находится по формуле (36,10):

$$S_N = \left|y_1 \cdot \operatorname{ctg}\frac{t_1}{2}\right|.$$

Но $y_1 = a(1-\cos t_1)$, а потому

$$S_N = \left|a(1-\cos t_1)\operatorname{ctg}\frac{t_1}{2}\right|; \quad S_N = |a\sin t_1|,$$



Фиг. 36,5.

т. е. длина поднормали равна проекции на ось Ox радиуса производящего круга (фиг. 36,4).

2) Точка P касания производящего круга с осью Ox (фиг. 36,5) имеет координаты at_1 и 0: $P(at_1, 0)$. Покажем, что нормаль в точке M проходит через эту точку. Для этого надо доказать, что координаты этой точки удовлетворяют уравнению нормали. Подставляя координаты этой точки вместо текущих координат x и y в уравнение нормали, а вместо x_1 и y_1 их выражения из (36,26а), получим в левой части уравнения

$$0 - a(1-\cos t_1) = -2a\sin^2\frac{t_1}{2},$$

а в правой части

$$-\operatorname{tg}\frac{t_1}{2}[at_1 - a(t_1 - \sin t_1)] = -\operatorname{tg}\frac{t_1}{2}(at_1 - at_1 + a\sin t_1) =$$

$$= -a\operatorname{tg}\frac{t_1}{2}\sin t_1 = -2a\sin^2\frac{t_1}{2}.$$

Таким образом, координаты точки P удовлетворяют уравнению нормали и, значит, нормаль в точке M проходит через точку касания производящего круга $P(at_1, 0)$. Касательная же необходимо пройдет через противоположную точку N диаметра PN, так как касательная перпендикулярна нормали, проведенной в точку касания (в окружности вписанный угол, опирающийся на диаметр, есть прямой).

3) Найдем радиус кривизны циклоиды по формуле (36,18) и длину ее нормали по формуле (36,9). Из уравнений циклоиды (36,26) следует, что

$$x'(t) = a(1 - \cos t); \quad y'(t) = a \sin t;$$
$$x''(t) = a \sin t; \qquad y''(t) = a \cos t.$$

Заменяя здесь t на t_1 и подставляя в (36,18), получим, что

$$R = \frac{[a^2(1-\cos t_1)^2 + a^2 \sin^2 t_1]^{\frac{3}{2}}}{[a^2 \cos t_1 (1 - \cos t_1) - a^2 \sin^2 t_1]} = \frac{(2a^2 - 2a^2 \cos t_1)^{\frac{3}{2}}}{a^2(1-\cos t_1)},$$

$$R = \frac{2^{\frac{3}{2}} a^2 (1-\cos t_1)^{\frac{3}{2}}}{a^2(1-\cos t_1)}; \quad R = 2\sqrt{2}\, a \sqrt{1-\cos t_1};$$

$$R = 4a\left|\sin\frac{t_1}{2}\right|. \tag{36,27}$$

По формуле (36,9), полагая в ней $y_1 = a(1-\cos t_1)$, будем иметь $y'_x(t_1) = \operatorname{ctg}\frac{t_1}{2}$.

Получим, что длина нормали

$$N = a\left|(1-\cos t_1)\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\frac{t_1}{2}}\right|;$$

$$N = 2a \sin^2\frac{t_1}{2}\left|\operatorname{cosec}\frac{t_1}{2}\right|;$$

$$N = 2a\left|\sin\frac{t_1}{2}\right|. \tag{36,28}$$

Из формул (36,27) следует, что

$$\frac{R}{N} = 2, \text{ или } R = 2N,$$

т. е. радиус кривизны в произвольной точке циклоиды равен удвоенной длине, соответствующей нормали.

4) Координаты центра кривизны определяются по формулам (36,22). Подставляя в них ранее найденные значения x'_t, x''_t, y'_t, y''_t, вычисленные в точке, где $t = t_1$, и учитывая (36,26а), получим, что

$$\alpha = a(t_1 + \sin t_1);$$
$$\beta = -a(1 - \cos t_1).$$

Если в этих формулах опустить индекс у t_1, то получим уравнение эволюты циклоиды

$$\begin{cases} \alpha = a(t + \sin t), \\ \beta = -a(1 - \cos t). \end{cases}$$

Если теперь взять $t = \pi + \tau$, то уравнение эволюты циклоиды запишется так:

$$\alpha = a\pi + a(\tau - \sin\tau);$$
$$\beta = -2a + a(1 - \cos\tau).$$

Из этих формул мы заключаем, что эволюта циклоиды есть циклоида такая же, как данная, но смещенная на отрезок $a\pi$ в положительном направлении оси Ox и на отрезок $2a$ в отрицательном направлении оси Oy.

Циклоида обладает замечательным механическим свойством: материальная точка, двигаясь по этой кривой, достигает заданной на ней точки, затрачивая на это одно и то же время, независимо от того, из какой исходной точки кривой началось движение.

Задача 36,11 (для самостоятельного решения). Найти радиус кривизны и эволюту астроиды

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$

в произвольной ее точке, где $t = t_1$.

Указание. Астроида — кривая, описываемая точкой окружности радиуса a, которая катится без скольжения по внутренней стороне окружности радиуса, в четыре раза большего, т. е. равного $4a$*.

Ответ. $R = \frac{3}{2}a\sin 2t_1$; $\alpha = a\cos t_1(1 + 2\sin^2 t_1)$; $\beta = a\sin t_1 (1 + 2\cos^2 t_1)$.

Уравнение эволюты $(\alpha + \beta)^{\frac{2}{3}} + (\alpha - \beta)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$.

Если повернуть координатные оси на 45° вокруг начала координат, то можно усмотреть, что эволютой астроиды является опять-таки астроида, образованная кругами, радиусы которых в два раза больше исходных. Докажите это.

Задача 36,12. Найти угол между касательной и радиусом-вектором произвольной точки спирали Архимеда

$$r = a\varphi.$$

Решение. Спираль Архимеда представляет собой траекторию точки M, которая равномерно движется по прямой ON в то время, как сама эта прямая равномерно вращается вокруг точки O (полюса). Предполагается, что в начальный момент дви-

---

* Уравнение астроиды в прямоугольных координатах $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

жения точка M находилась в полюсе полярной системы координат, а прямая ON совпадала с полярной осью (фиг. 36,6).

Известно, что угол μ между радиусом-вектором произвольной точки кривой $r = r(\varphi)$ и касательной к ней в этой точке определяется по формуле

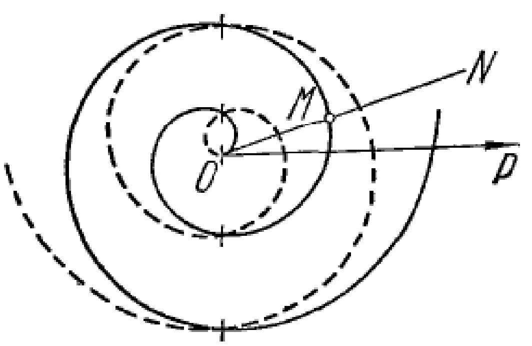
$$\operatorname{tg}\mu = \frac{r}{r'}, \tag{36,29}$$

где r' есть производная от r по φ.

Подставляя в эту формулу из уравнения спирали Архимеда $r = a\varphi$ и $r' = a$, получим, что

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{a\varphi}{a} = \varphi, \text{ а } \mu = \operatorname{arctg}\varphi. \tag{36,30}$$

Число a в уравнении спирали Архимеда называется параметром. Полученный результат показывает, что μ не зависит от a. Это значит, что все спирали Архимеда пересекают радиусы-векторы, соответствующие одному и тому же значению полярного угла, под одним и тем же углом. Интересно подметить и такую особенность: когда $\varphi \to \infty$, то из (36,30) следует, что $\mu \to \frac{\pi}{2}$, а это означает, что по мере развертывания спирали она стремится стать нормальной к своим радиусам-векторам.



Фиг. 36.6

Задача 36,13. Определить полярные поднормаль и подкасательную спирали Архимеда в произвольной точке спирали (r_1, φ_1).

Решение. По формулам (36,13) и (36,14) находим, что длина полярной поднормали $S_N = a$, а длина полярной подкасательной

$$S_T = a\varphi_1^2 = a\varphi_1 \cdot \varphi_1 = r_1\varphi_1.$$

Из этого заключаем, что полярная поднормаль спирали Архимеда есть величина постоянная, равная ее параметру, и что концы всех поднормалей лежат на окружности радиуса a с центром в полюсе. Рассматривая длину полярной подкасательной, приходим к выводу, что она равна длине дуги окружности радиуса r_1, соответствующей центральному углу, равному φ_1. В частности, в точке, где спираль вторично (после полюса) пересекает положительное направление полярной оси (в этой точке $\varphi_1 = 6\pi$), длина полярной подкасательной равна длине окружности, радиус которой равен радиусу-вектору этой точки.

Задача 36,14 (для самостоятельного решения). Определить радиус кривизны спирали Архимеда в произвольной ее точке.

Ответ. $R = \dfrac{a(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{2+\varphi^2}$.

Задача 36,15 (для самостоятельного решения). Доказать, что подкасательная гиперболической спирали $r = \frac{a}{\varphi}$ имеет постоянную длину, равную a.

Задача 36,16 (для самостоятельного решения). Для логарифмической спирали $r = a^{\varphi}$ определить в ее произвольной точке:

1) угол между радиусом-вектором касательной в этой точке;
2) длину полярной подкасательной и поднормали;
3) длину полярной касательной и нормали.

Ответ. 1) Логарифмическая спираль пересекает все свои радиусы-векторы под одним и тем же углом μ: $\operatorname{tg}\mu = \frac{1}{\ln a}$. Например, спираль $r = e^{\varphi}$ пересекает все свои радиусы-векторы под углом $45°$. 2) $S_T = \frac{r}{\ln a}$; $S_N = r \ln a$. 3) $T = \sqrt{1 + \frac{1}{\ln^2 a}} \cdot r$; $N = \sqrt{1 + \ln^2 a} \cdot r$.

Задача 36,17. Доказать, что радиус кривизны в произвольной точке логарифмической спирали $r = a^{\varphi}$ пропорционален радиусу-вектору этой точки и равен $R = r\sqrt{1 + \ln^2 a}$ (сопоставляя величину R с длиной полярной нормали, найденной в задаче 36,16, приходим к выводу, что радиус кривизны в произвольной точке логарифмической спирали равен полярной нормали в этой точке).

Задача 36,18 (для самостоятельного решения). Доказать, что эволюта логарифмической спирали $r = a^{\varphi}$ есть также логарифмическая спираль, конгруэнтная данной, но повернутая относительно ее на некоторый угол.

Указание. С помощью формул, связывающих прямоугольные координаты с полярными ($x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$), уравнение логарифмической спирали записать в виде

$$\begin{cases} x = a^{\varphi}\cos\varphi, \\ y = a^{\varphi}\sin\varphi \end{cases}$$

и по формулам (36,22) определить координаты центра кривизны произвольной точки (r_1, φ_1) логарифмической спирали. Получится, что

$$\begin{cases} \alpha = -a^{\varphi_1}\sin\varphi_1 \ln a, \\ \beta = a^{\varphi_1}\cos\varphi_1 \ln a. \end{cases}$$

Радиус вектор центра кривизны

$$r_1 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{a^{2\varphi_1}\ln^2 a\,(\sin^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_1)},$$
$$r_1 = a^{\varphi_1}\ln a.$$

Если взять $\ln a = a^{\varphi_0}$ и опустить индекс у, r_1 и φ_1, то получим эволюту логарифмической спирали в виде $r = a^{\varphi}a^{\varphi_0}$, или $r = a^{\varphi+\varphi_0}$. Эта кривая получается из данной логарифмической спирали $r = a^{\varphi}$ вращением ее на некоторый угол φ_0.

Задача 36,19. В какой точке кривая $y = \ln x$ имеет наименьший радиус кривизны?

Решение. Находим по формуле (36,16), что в произвольной точке $A(x, y)$ этой кривой $R = \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x}$.

Чтобы определить наименьшее значение R, находим производную

$$\frac{dR}{dx} = \frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{x^2},$$

приравниваем ее нулю и решаем уравнение $(2x^2-1)\sqrt{1+x^2} = 0$, откуда $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Критической точкой является также и $x = 0$. Но значения $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ и $x = 0$ должны быть отброшены, так как для значений $x \leqslant 0$ функция $y = \ln x$ не существует (на кривой $y = \ln x$ нет точек с абсциссами $x \leqslant 0$). Осталось исследовать значение $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Найдите R'', подставьте в полученное выражение $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ и убедитесь, что $R''\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) > 0$. Это доказывает, что радиус кривизны кривой $y = \ln x$ будет наименьшим в точке с абсциссой $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, т. е. в точке $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2};\ -\frac{1}{2}\ln 2\right)$.

Задача 36,20 (для самостоятельного решения). Доказать, что у цепной линии $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ радиус кривизны пропорционален квадрату ординаты $\left(R = \frac{1}{a}y^2\right)$ и что он равен длине нормали N.

Указание. $y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$: $y'' = \frac{y}{a^2}$.

ТРИДЦАТЬ СЕДЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Функции многих независимых переменных. Область существования. Частные производные. Полное приращение и полный дифференциал первого порядка функции нескольких независимых переменных.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Переменные x, y, z, ... t называются независимыми между собой, если каждая из них может принимать любые значения в своей области изменения, независимо от того, какие значения принимают при этом остальные переменные.