Задача 36,19. В какой точке кривая $y=\ln x$ имеет наименьший радиус кривизны?

Решение. Находим по формуле (36,16), что в произвольной точке $A(x, y)$ этой кривой $R=\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x}$.

Чтобы определить наименьшее значение R, находим производную

$$\frac{dR}{dx}=\frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{x^2},$$

приравниваем ее нулю и решаем уравнение $(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}=0$, откуда $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Критической точкой является также и $x=0$. Но значения $x=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ и $x=0$ должны быть отброшены, так как для значений $x\leqslant 0$ функция $y=\ln x$ не существует (на кривой $y=\ln x$ нет точек с абсциссами $x\leqslant 0$). Осталось исследовать значение $x=\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Найдите R'', подставьте в полученное выражение $x=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ и убедитесь, что $R''\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)>0$. Это доказывает, что радиус кривизны кривой $y=\ln x$ будет наименьшим в точке с абсциссой $x=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, т. е. в точке $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2};\ -\frac{1}{2}\ln 2\right)$.

Задача 36,20 (для самостоятельного решения). Доказать, что у цепной линии $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ радиус кривизны пропорционален квадрату ординаты $\left(R=\frac{1}{a}y^2\right)$ и что он равен длине нормали N.

Указание. $y'=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$; $y''=\frac{y}{a^2}$.

ТРИДЦАТЬ СЕДЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Функции многих независимых переменных. Область существования. Частные производные. Полное приращение и полный дифференциал первого порядка функции нескольких независимых переменных.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Переменные $x, y, z, \ldots t$ называются независимыми между собой, если каждая из них может принимать любые значения в своей области изменения, независимо от того, какие значения принимают при этом остальные переменные.

2. Переменная величина и называется функцией независимых переменных x, y, z, .. , t, если каждой системе значений этих переменных в области их изменения соответствует единственное определенное значение u.*

Символически функция и независимых переменных x, y, z, ... , t записывается так:

$$y = f(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t). \qquad (37{,}1)$$

3. Областью существования функции $f(x, y, z, \ldots, t)$ называется совокупность значений независимых переменных x y, z, ... , t, при которых функция определена (т. е. принимает действительные значения). Область существования функции называется также областью определения функции.

В дальнейшем для упрощения записей все определения и формулы приводятся только для функций от трех независимых переменных.

4. Частные приращения функции. Если $u = f(x, y, z)$ и одна из независимых переменных, например x, получила приращение Δx, то частным приращением $\Delta_x u$ функции называется разность $\Delta_x u = f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)$. Соответственно

$$\Delta_y u = f(x,\ y + \Delta y,\ z) - f(x,\ y,\ z),$$

а

$$\Delta_z u = f(x,\ y,\ z + \Delta z) - f(x,\ y,\ z)$$

5. Частные производные. Составим отношение $\frac{\Delta_x u}{\Delta x}$. Если при стремлении Δx к нулю это отношение стремится к определенному пределу, то этот предел называется частной производной функции $u = f(x, y, z)$ по независимой переменной x и обозначается одним из символов $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, u'_x, f'_x.

Таким образом,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x},$$

или в более подробной записи

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x,\ y,\ z) - f(x,\ y,\ z]}{\Delta x}.$$

Аналогично определяются частные производные функции $u = f(x, y, z)$ по независимым переменным y и z. Частная производная по y обозначается одним из символов $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, u'_y, f'_y, $\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,\ y + \Delta y,\ z) - f(x,\ y,\ z)}{\Delta y}$, а частная производная

* Многозначные функции нами не рассматриваются.

по z — одним из символов: $\frac{\partial u}{\partial z}$; $\frac{\partial f}{\partial z}$; u'_z; f'_z

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta_z u}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(x,y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\Delta z}\,^{*)}.$$

Вычисление частных производных функции нескольких независимых переменных производится по тем же правилам, по которым вычисляются производные функции одной независимой переменной, только следует иметь в виду, что при определении частной производной надо считать постоянными все независимые переменные, кроме той, по которой вычисляется частная производная

Задача 37,1. Найти область существования функции $u=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

Решение. Представим функцию в виде $u=\sqrt{4-(x^2+y^2)}$.

Очевидно, что функция определена для тех значений x и y, которые удовлетворяют неравенству $x^2+y^2\leqslant 4$. На языке геометрии это означает, что функция определена в точках, лежащих внутри окружности $x^2+y^2=4$ и на ее границе, так как для всех точек, лежащих вне ее, имеет место неравенство $x^2+y^2>4$.

Задача 37,2. Найти область существования функции $z=\ln(x-y)$.

Решение. Так как отрицательные числа и нуль логарифмов не имеют, то должно выполняться неравенство $x-y>0$, т. е. $y<x$.

Точки плоскости xOy, координаты которых удовлетворяют этому неравенству, расположены под прямой $y=x$, причем точки, лежащие на этой прямой, рассматриваться не могут. Короче: область определения функции — полуплоскость, расположенная под прямой $y=x$, причем сама прямая $y=x$ при рассмотрении не учитывается.

Задача 37,3 (для самостоятельного решения). $u=\frac{z}{x+y}$. Найти область существования функции.

Ответ. Функция определена во всех точках пространства, кроме точек плоскости $x+y=0$, так как в точках этой плоскости знаменатель дроби у заданной функции обращается в нуль.

Задача 37,4 (для самостоятельного решения). Найти область существования функций: 1) $z=xy$ и 2) $z=x^2+y^2$.

Ответ. Обе функции определены во всей плоскости xOy, т. е. при любых значениях x и y.

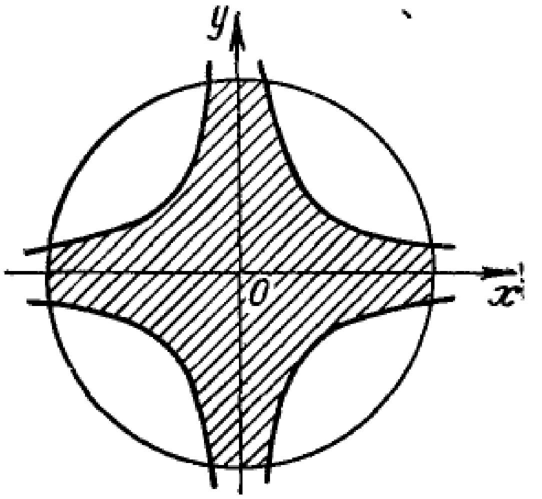
---

*) Следует иметь в виду, что символы $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, ... нельзя рассматривать как частные от деления, например ∂f на ∂x, так как ни ∂f, ни ∂x в отдельности смысла не имеют.

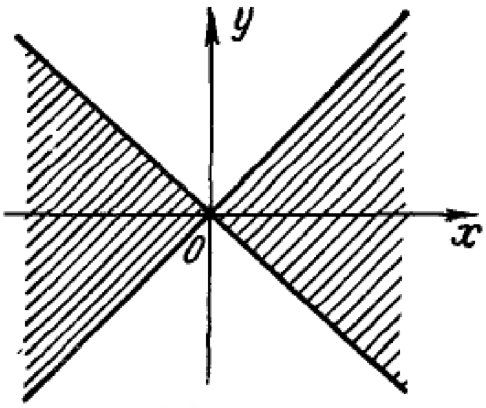
Задача 37,5. Найти область существования функции $z = \arcsin(3 - x^2 - y^2)$.

Решение. Так как функция $u = \arcsin t$ определена для значений аргумента t из отрезка $[-1, +1]$, то искомая область существования найдется из условия $-1 \leqslant 3 - x^2 - y^2 \leqslant 1$, откуда следует, что $2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$ и область существования функции заключена между двумя концентрическими окружностями: $x^2 + y^2 = 2$ и $x^2 + y^2 = 4$, причем могут рассматриваться и точки, принадлежащие этим окружностям.

Задача 37,6 (для самостоятельного решения). Найти область существования функции $z = \arcsin 3xy$.



Фиг. 37,1



Фиг. 37,2

Ответ. Область существования ограничена двумя сопряженными гиперболами:

$$y = \frac{1}{3x} \quad \text{и} \quad y = -\frac{1}{3x}.$$

Задача 37,7 (для самостоятельного решения). Найти область существования функции $f(x, y) = \arcsin(1 - x^2 - y^2) + \arcsin 2xy$.

Ответ. Областью существования является общая часть областей существования слагаемых функций: 1) $\arcsin(1 - x^2 - y^2)$ и 2) $\arcsin 2xy$, т. е. область, изображенная на фиг. 37,1.

Задача 37,8. Найти область существования функции $u = \ln \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$.

Решение. Должно выполняться требование: $\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} > 0$. Эта дробь положительна, когда положителен ее знаменатель, т. е. когда $x^2 - y^2 > 0$, или $y^2 < x^2$, а это влечет за собой неравенство $|y| < |x|$.

Рассмотрим два случая: 1) $x > 0$, 2) $x < 0$. 1) Если $x > 0$, то $|x| = x$, и тогда $|y| < x$, или $-x < y < x$. На языке геометрии это означает, что область определения есть часть правой полуплоскости (т. к. рассматриваются значения $x>0$), ограниченная прямыми $y=x$ и $y=-x$, причем точки, лежащие на этих прямых, рассматриваться не могут. 2) Если $x<0$, то $|x|=-x$, и тогда $|y|<-x$, или $x<y<-x$.

Последние неравенства определяют ту часть левой полуплоскости, которая находится между прямыми $y=-x$ и $y=x$, причем опять-таки точки, принадлежащие этим прямым, не должны рассматриваться (фиг. 37,2).

Задача 37,9 (для самостоятельного решения). $u=\ln x+\ln y$. Найти область определения функции.

Ответ. Первый квадрант ($x>0$, $y>0$), причем оси Ox и Oy исключаются.

Задача 37,10 (для самостоятельного решения). $u=\sqrt{\ln x+\ln y}$. Найти область определения функции.

Ответ. $x>0$; $y>0$; $xy\geqslant 1$. Область состоит из точек первого квадранта, лежащих над гиперболой $y=\frac{1}{x}$ и на ней.

Задача 37,11. Найти частные производные функций: 1) $u=x^2+3xy+4y^2$; 2) $u=\sin(3x+5y-4z)$; 3) $u=e^{\frac{x}{y}}$.

Решение. 1) Функция u — функция двух независимых переменных — x и y. При определении частной производной функции u по независимой переменной x вторая независимая переменная должна рассматриваться как величина постоянная. Поэтому $\frac{\partial u}{\partial x}=2x+3y$, так как производная по x от $4y^2$ равна нулю, как производная от постоянной величины.

При отыскании $\frac{\partial u}{\partial y}$ независимая переменная x рассматривается как величина постоянная, а потому $\frac{\partial u}{\partial y}=3x+8y$.

2) Функция u — функция трех независимых переменных: x, y и z. При определении частной производной по каждой из этих переменных две других следует считать величинами постоянными. Поэтому $\frac{\partial u}{\partial x}=3\cos(3x+5y-4z)$; $\frac{\partial u}{\partial y}=5\cos(3x+5y-4z)$; $\frac{\partial u}{\partial z}=-4\cos(3x+5y-4z)$.

3) Заданная функция есть функция двух независимых переменных x и y. При дифференцировании по каждой из них вторая переменная должна рассматриваться как величина постоянная.

Поэтому $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}$, так как $\left(\frac{x}{y}\right)'_x=\frac{1}{y}$, ибо производная от дроби с постоянным знаменателем равна производной числителя, разделенной на тот же знаменатель, а производная по y от дроби $\frac{x}{y}$ есть производная от дроби с постоянным числителем x и переменным знаменателем y. Как известно, в таком случае

$$\left(\frac{x}{y}\right)'_y = -\frac{x}{y^2}.$$

Задача 37,12 (для самостоятельного решения). Найти частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ функций:

$$1)\ z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x};\quad 2)\ z = x^n + y^n;\quad 3)\ z = \cos(ax + by).$$

Ответ. 1) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x}$;

$$2)\ \frac{\partial z}{\partial x} = nx^{n-1};\ \frac{\partial z}{\partial y} = ny^{n-1}$$

(при дифференцировании по x производная от y^n равна нулю, так как y^n рассматривается как величина постоянная, а при дифференцировании по y производная от x^n равна нулю, так как x^n считается теперь величиной постоянной).

$$3)\ \frac{\partial z}{\partial x} = -a\sin(ax + by);\ \frac{\partial z}{\partial y} = -b\sin(ax + by).$$

Задача 37,13 (для самостоятельного решения). Найти частные производные функций: 1) $u = ax + by + cz$; 2) $u = y\sin x + \sin y$; 3) $u = x^{\sin y}$ $(x > 0)$; 4) $u = z^{xy}$ $(z > 0)$, 5) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Ответ. 1) $\frac{\partial u}{\partial x} = a$; $\frac{\partial u}{\partial y} = b$; $\frac{\partial u}{\partial z} = c$ (при дифференцировании по x две другие независимые переменные считаются постоянными, а потому производная по x от by и от cz, как производная от постоянных, равна нулю. Аналогично при дифференцировании по y независимые переменные x и z считаются постоянными, и поэтому производная по y от ax и cz равна нулю и т. д.)

$$2)\ \frac{\partial u}{\partial x} = y\cos x;\ \frac{\partial u}{\partial y} = \sin x + \cos y;$$

$$3)\ \frac{\partial u}{\partial x} = \sin y \cdot x^{\sin y - 1};\ \frac{\partial u}{\partial y} = x^{\sin y} \cdot \cos y \cdot \ln x$$

(здесь при дифференцировании по x заданную функцию следует рассматривать как степенную. Основание степени x — величина переменная, а показатель степени $\sin y$ — величина постоянная.

При дифференцировании по y величину x следует рассматривать как постоянную, а $\sin y$ — как величину переменную, а потому в этом случае функцию $x^{\sin y}$ следует рассматривать как показательную).

$$4)\ \frac{\partial u}{\partial z} = xyz^{xy-1};\quad \frac{\partial u}{\partial y} = xz^{xy}\ln z;\ \frac{\partial u}{\partial x} = yz^{xy}\ln z;$$

$$5)\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};\ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Задача 37,14 (для самостоятельного решения). Найти частные производные функций: 1) $z = e^x \cos y - e^y \sin x$;

$$2)\ z = \sqrt{x^2 + y^2};\ 3)\ z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y};$$

$$4)\ z = e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}};\qquad 5)\ u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Ответ. 1) $\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \cos y - e^y \cos x$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -e^x \sin y - e^y \sin x$;

2) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

3) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2}$;

4) $\frac{\partial z}{\partial x} = -e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2}$;

5) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 + z^2}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{xy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$;

$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{xz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$;

Задача 37,15 (для самостоятельного решения). Известно, что сторона треугольника a определяется через две другие стороны и угол α между ними по формуле

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}.$$

Найти $\frac{\partial a}{\partial b}$, $\frac{\partial a}{\partial c}$ и $\frac{\partial a}{\partial \alpha}$.

Ответ. $\frac{\partial a}{\partial b} = \frac{b - c \cos \alpha}{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}} = \frac{b - c \cos \alpha}{a}$;

$$\frac{\partial a}{\partial c} = \frac{c - b \cos \alpha}{a};\quad \frac{\partial a}{\partial \alpha} = \frac{bc \sin \alpha}{a}.$$

Задача 37,16 (для самостоятельного решения). Сила тока согласно закону Ома вычисляется по формуле $I = \frac{V}{R}$. Найти $\frac{\partial I}{\partial V}$ и $\frac{\partial I}{\partial R}$.

Ответ. $\frac{\partial I}{\partial R} = -\frac{V}{R^2}$; $\frac{\partial I}{\partial V} = \frac{I}{R}$.

Задача 37,17 (для самостоятельного решения). Формула Клапейрона $pV = RT$, где R — величина постоянная, связывает для идеального газа его объем V, давление p и абсолютную температуру T.

Считая каждую из этих величин V, p и T функцией, а две другие — независимыми переменными, определить частные производные этих функций.

Решение. 1) $V=\frac{RT}{p}$; $\frac{\partial V}{\partial T}=\frac{R}{p}$; $\frac{\partial V}{\partial p}=-\frac{RT}{p^2}$: 2) $p=\frac{RT}{V}$; $\frac{\partial p}{\partial T}=\frac{R}{V}$; $\frac{\partial p}{\partial V}=-\frac{RT}{V^2}$; 3) $T=\frac{pV}{R}$; $\frac{\partial T}{\partial p}=\frac{V}{R}$; $\frac{\partial T}{\partial V}=\frac{p}{R}$.

Докажите, что $\frac{\partial p}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial p}=-1$.

Задача 37,18. Доказать, что функция $z=y^2\sin(x^2-y^2)$ удовлетворяет уравнению $y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz$.

Решение. $\frac{\partial z}{\partial x}=\underbrace{y^2\cos(x^2-y^2)}_{\text{производная функции } \sin(x^2-y^2)}\cdot\underbrace{2x}_{\text{производная по } x \text{ функции } x^2-y^2\text{, стоящей под знаком синуса}}$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\underbrace{2y}_{\text{производная по } y \text{ первого сомножителя}}\cdot\sin(x^2-y^2)+y^2\cdot\underbrace{\cos(x^2-y^2)}_{\text{производная функции } \sin(x^2-y^2)}\cdot\underbrace{(-2y)}_{\text{производная по } y \text{ функции } x^2-y^2}$$

Умножая обе части первого равенства на y^2, а второго — на xy и почленно складывая, получим

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xy^2\sin(x^2-y^2).$$

Но так как $z=y^2\sin(x^2-y^2)$, то правая часть последнего равенства есть $2xz$, и тем самым требуемое доказано.

Задача 37,19 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $z=\ln(x^2+y^2)$ удовлетворяет уравнению

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Задача 37,20 (для самостоятельного решения). Доказать, что если $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, то имеет место равенство

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Полный дифференциал и полное приращение функции. Связь между полным дифференциалом функции и ее полным приращением

Полное приращение функции $u=f(x, y, z)$ определяется по формуле

$$\Delta u=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)-f(x,\ y,\ z). \qquad (37,2)$$

где Δx, Δy, Δz — приращения независимых переменных.

По определению приращения независимых переменных Δx, Δy, Δz и их дифференциалы dx, dy и dz — числа, между собою равные:

$$\Delta x=dx;\ \Delta y=dy;\ \Delta z=dz.$$

Полный дифференциал функции $u = f(x, y, z)$ обозначается символом du и вычисляется по формуле

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial y}{\partial z} dz \qquad (37,3)$$

и аналогично, если $z = f(x, y)$, то

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \qquad (37,4)$$

Полный дифференциал du функции есть главная часть ее приращения Δu, линейная относительно Δx, Δy и Δz, т. е. $\Delta u \approx du$, причем при бесконечно малых Δx, Δy и Δz разность $\Delta u - du$ — величина бесконечно малая высшего порядка малости, чем $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$.

Приближенное равенство $\Delta u \approx du$ на основании формулы (37,3) может быть записано так:

$$\Delta u \approx \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz, \qquad (37,5)$$

или более подробно:

$$f(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z) \approx f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz. \qquad (37,6)$$

Это приближенное равенство тем более точно, чем меньше величины dx, dy, dz.

Вычисление Δu приращения функции представляет собой задачу, значительно более сложную, чем вычисление ее дифференциала du, а потому в практических вычислениях с достаточной точностью при малых приращениях независимых переменных заменяют вычисление приращения функции вычислением ее дифференциала.

Задачи 37,21—37,22 являются упражнениями в вычислении полного приращения и полного дифференциала функции, а также в применении формулы (37,6) для приближенных вычислений.

Задача 37,21. Найти полное приращение Δu и полный дифференциал du функции $u(x, y) = 3x^2 + xy - y^2 + 1$.

Решение. $\Delta u = u(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - u(x, y) = 3(x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)(y + \Delta y) - (y + \Delta y)^2 + 1 - (3x^2 + xy - y^2 + 1)$;

$$\Delta u = 3x^2 + 6x\ \Delta x + 3(\Delta x)^2 + xy + y\Delta x + x\Delta y + \Delta x \cdot \Delta y - y^2 - 2y\Delta y - (\Delta y)^2 + 1 - 3x^2 - xy + y^2 - 1;$$

$$\Delta u = \underbrace{(6x + y)\Delta x + (x - 2y)\Delta y}_{du} + \underbrace{3(\Delta x^2) + \Delta x\, \Delta y - (\Delta y)^2}_{\substack{\text{при бесконечно малых } \Delta x \text{ и } \Delta y \text{ —} \\ \text{величина бесконечно малая} \\ \text{высшего порядка по} \\ \text{сравнению с} \\ \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}} \qquad (37,7)$$

Так как $\frac{\partial u}{\partial x} = 6x + y$, а $\frac{\partial u}{\partial y} = x - 2y$, то на основании формулы (37,4)

$$du = (6x + y)\,dx + (x - 2y)\,dy; \quad (\Delta x = dx;\ \Delta y = dy). \quad (37,8)$$

Разность

$$\Delta u - du = 3(\Delta x)^2 + \Delta x \cdot \Delta y - (\Delta y)^2 *$$

представляет собой погрешность, которая возникает от замены приращения Δu функции ее дифференциалом du. В связи с этим примером решим такой числовой пример; найти для заданной функции ее полное приращение и полный дифференциал в точке (1,2), если: 1) $\Delta x = 1$, $\Delta y = 2$; 2) $\Delta x = 0{,}1$; $\Delta y = 0{,}2$; 3) $\Delta x = 0{,}01$; $\Delta y = 0{,}02$.

1) Подставляя в (37,7) значения $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = 1$, $\Delta y = 2$, находим, что

$$\Delta u = (6 \cdot 1 + 2)\,1 + (1 - 2 \cdot 2)\,2 + 3 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2 - 2^2 = \\ = 8 - 6 + 3 + 2 - 4 = 3;$$

подставляя эти же значения в (37,8), получаем, что

$$du = (6 \cdot 1 + 2)\,1 + (1 - 2 \cdot 2)\,2 = 8 - 6 = 2,$$

а разность

$$\Delta u - du = 3 - 2 = 1. \quad (37,9)$$

2) Подставим теперь в (37,7) и (37,8) значения $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$, получим:

$$\Delta u = (6 \cdot 1 + 2)\,0{,}1 + (1 - 2 \cdot 2)\,0{,}2 + 3(0{,}1)^2 + \\ + 0{,}1 \cdot 0{,}2 - (0{,}2)^2 = 0{,}8 - 0{,}6 + 0{,}03 + 0{,}02 - 0{,}04; \\ \Delta u = 0{,}21,$$

а

$$du = (6 \cdot 1 + 2)\,0{,}1 + (1 - 2 \cdot 2)\,0{,}2 = 0{,}8 - 0{,}6 = 0{,}20; \\ \Delta u - du = 0{,}21 - 0{,}20 = 0{,}01. \quad (37,10)$$

3) Подставим теперь в (37,7) и (37,8) те же значения x и y, но возьмем $\Delta x = 0{,}01$, а $\Delta y = 0{,}02$;

$$\Delta u = (6 \cdot 1 + 2)\,0{,}01 + (1 - 2 \cdot 2)\,0{,}02 + 3(0{,}01)^2 + \\ + 0{,}01 \cdot 0{,}02 - (0{,}02)^2 = 0{,}08 - 0{,}06 + 0{,}0003 + 0{,}0002 - \\ - 0{,}0004 = 0{,}0201;$$

$$du = (6 \cdot 1 + 2)\,0{,}01 + (1 - 2 \cdot 2)\,0{,}02 = 0{,}08 - 0{,}06 = 0{,}02,$$

а

$$\Delta u - du = 0{,}0201 - 0{,}02 = 0{,}0001. \quad (37,11)$$

---

* В выражениях $(\Delta x)^2$, $(\Delta y)^2$ скобки могут быть опущены, так как Δx, Δy рассматриваются как единый символ.

Сравнивая разности (37,10), (37,11) и (37,12) между полным приращением функции и ее полным дифференциалом, мы усматриваем, что они уменьшаются вместе с уменьшением приращений Δx и Δy независимых переменных.

Этот пример иллюстрирует высказанное выше утверждение, что равенство (37,5) тем более точно, чем меньше приращения независимых переменных.

Задача 37,22 (для самостоятельного решения). Найти полное приращение функции $u = x^3y^2$ и ее полный дифференциал в точке (2,1) при: 1) $\Delta x = -0{,}1$; $\Delta y = -0{,}1$; 2) $\Delta x = -0{,}01$; $\Delta y = -0{,}01$. В обоих случаях сравнивать разности $\Delta u - du$.

Ответ. 1) $\Delta u = -2{,}4442$; $du = -2{,}8$; $\Delta u - du = 0{,}3558$; 2) $\Delta u = -0{,}2762$; $du = -0{,}2800$; $\Delta u - du = 0{,}0038$.

Задача 37,23. Найти полный дифференциал функции $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$.

Решение. Полный дифференциал функции находится по формуле (37,4). Найдем $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Поэтому

$$dz = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dx + \frac{y}{(x + \sqrt{y^2 + x^2})\sqrt{x^2 + y^2}}\,dy.$$

Задача 37,24 (для самостоятельного решения). Найти полный дифференциал функций: 1) $z = \frac{ay - bx}{by - ax}$; 2) $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$; 3) $z = x\sin y + y\sin x$; 4) $u = x + ye^{\frac{x}{y}}$.

Ответ. 1) $dz = \frac{(b^2 - a^2)(x\,dy - y\,dx)}{(by - ax)^2}$; 2) $dz = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$; 3) $dz = (\sin y + y\cos x)\,dx + (x\cos y + \sin x)\,dy$; 4) $du = (1 + e^{\frac{x}{y}})\,dx + \left(1 - \frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}\,dy$.

Задача 37,25 (для самостоятельного решения). Найти полный дифференциал функций: 1) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; 2) $u = \frac{\operatorname{arctg} y}{1 + x^2}$; 3) $u = \ln\operatorname{tg}\frac{x}{y}$; 4) $u = \arcsin\frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; 5) $u = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{z}{y}}$.

Ответ. 1) $du = -\dfrac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$;

2) $du = \dfrac{(1+x^2)\,dy - 2x(1+y^2)\operatorname{arctg} y\,dx}{(1+x^2)^2(1+y^2)}$;

3) $du = \dfrac{2}{y\sin\dfrac{2x}{y}}\,dx - \dfrac{2x}{y^2\sin\dfrac{2x}{y}}\,dy$;

4) $du = \dfrac{x\sqrt{2}\,(y\,dx - x\,dy)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$;

5) $du = \dfrac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\,dx - \left(e^{\frac{x}{y}}\cdot\dfrac{x}{y^2} + e^{\frac{z}{y}}\cdot\dfrac{z}{y^2}\right)dy + e^{\frac{z}{y}}\;\dfrac{1}{y}\,dz.$

Задача 37,26. Для вычисления объема цилиндра были вычислены его высота и диаметр основания. При этом оказалось, что высота $h = 60$ *см*, а диаметр $D = 50$ *см*, и границы ошибок, допущенных при измерении, $\Delta h = \Delta D = 0{,}1$ *см*. Найти границу ошибки ΔV в объеме цилиндра, вычисленном по этим данным.

Решение. Объем цилиндра $V = \dfrac{\pi D^2 h}{4}$.

Считая, что $\pi \approx 3{,}14$ и подставляя сюда числовые данные задачи, получим, что $V = 117{,}75$ *дм*^{3}. Чтобы вычислить границу ошибки в полученном числе, примем, что $\Delta V \approx dV$.

$$dV = \frac{\partial V}{\partial D}dD + \frac{\partial V}{\partial h}dh.$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial V}{\partial D} = \frac{\pi D h}{2}, \text{ а } \frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi D^2}{4},$$

получаем, что

$$dV = \frac{\pi D h}{2}dD + \frac{\pi D^2}{4}dh.$$

Оценим абсолютную величину dV:

$$|dV| = \left|\frac{\pi D h}{2}dD + \frac{\pi D^2}{4}dh\right| \leqslant \frac{\pi D h}{2}|\Delta D| + \frac{\pi D^2}{4}|\Delta h|.$$

Подставляя числовые данные из условия задачи, получим, что граница ошибки равняется $0{,}7$ *дм*^{3}. Таким образом, $\Delta V \approx$ $\approx 0{,}7$ *дм*^{3}.

Следует иметь в виду, что мы приняли $\pi = 3{,}14$, что также внесло ошибку в результат вычислений. Однако ошибка, возникшая из-за этого, значительно меньше той, которая возникла от неточности в измерении D и h.

Задача 37,27. Для вычисления удельного веса тела его взвешивают и измеряют его объем. Оказывается, что вес $P = 326$ *г*, а объем $V = 126$ *см*^{3}; при этом границы ошибок величин P и V равны $\Delta P = 0{,}5$ *г*, $\Delta V = 1$ *см*^{3}.

Определить границу ошибки ΔD в удельном весе D, вычисленном по этим данным.

Решение. Удельный вес $D=\frac{P}{V}=\frac{326}{126}=2{,}59\ \frac{г}{см^3}$. Теперь положим, что $\Delta D\approx dD$;

$$dD=\frac{\partial D}{\partial P}dP+\frac{\partial D}{\partial V}dV=\frac{1}{V}dP-\frac{P}{V^2}dV=\frac{V\,dP-P\,dV}{V^2};$$

$$|dD|=\left|\frac{V\,\Delta P-P\,\Delta V}{V^2}\right|=\frac{|V\,\Delta P-P\,\Delta V|}{V^2}\leqslant\frac{V|\Delta P|+P|\Delta V|}{V^2}.$$

Подставляя сюда числовые данные задачи, найдем, что граница ошибки $AD\approx 0{,}024\ \frac{г}{см^3}$.

Задача 37,28 (для самостоятельного решения). Даны две точки $P(x, y)$ и $P_1(x_1, y_1)$. Насколько изменится расстояние S между ними, если координаты точек получат приращения dx, dy и dx_1, dy_1, и сколько процентов p от длины S составит это изменение.

Ответ. $dS=(dx-dx_1)\cos\alpha+(dy-dy_1)\sin\alpha_1$, где α — угол, образуемый с положительным направлением оси Ox прямой, проведенной из P_1 по направлению к P

$$\left(\frac{x-x_1}{S}=\cos\alpha;\quad \frac{y-y_1}{S}=\sin\alpha\right).$$

Количество процентов $p=\frac{dS}{S}\cdot 100$.

Задача 37,29 (для самостоятельного решения). Решить предыдущую задачу с такими числовыми данными:

$$S=4200\ м;\qquad \alpha=34^\circ 17' 25'';\qquad dx=-1\ м;$$
$$dy=3\ м;\qquad dx_1=4\ м;\qquad dy_1=2\ м.$$

Ответ. Расстояние S уменьшится на 3,65 $м$, или на 0,087%.

Задача 37,30. Даны две точки $P(x, y)$ и $P_1(x_1, y_1)$. Расстояние между ними равно S, а угол α определяется, как и в задаче 37,29. Точка P_1 неподвижна. Насколько изменится угол α, если координаты точки P станут равными $x+dx$, $y+dy$.

Указание. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{y-y_1}{x-x_1}$; $\ln\operatorname{tg}\alpha=\ln(y-y_1)-\ln(x-x_1)$. Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha\cos^2\alpha}d\alpha=\frac{dy}{y-y_1}-\frac{dx}{x-x_1}$$

(x_1 и y_1 по условию — постоянные величины). Так как $y-y_1=S\sin\alpha$, а $x-x_1=S\cos\alpha$, то отсюда получается ответ

$$d\alpha=\frac{\cos\alpha}{S}\cdot dy-\frac{\sin\alpha}{S}dx.$$

Задача 38,31 (для самостоятельного решения). Решить предыдущую задачу при таких числовых данных: $S = 3500$ *м*; $\alpha = 52^\circ 13' 24''$; $dx = 1$ *м*; $dy = 2$ *м*. Выразить $d\alpha$ в секундах.

Указание. В формуле, полученной в ответе предыдущей задачи, $d\alpha$ измеряется в радианах. Чтобы получить $d\alpha$ в секундах, следует полученное число умножить на 206 264,8, т. е. на число секунд в одном радиане.

Ответ. $25'',6$.

Задача 37,32. Вычислить приближенно величину $(1{,}03)^{3{,}001}$.

Решение. Мы знаем, что $1^3 = 1$. Нам следует теперь произвести вычисления для того случая, когда основание степени 1 получит приращение 0,03, а показатель степени 3 — приращение 0,001. Будем исходить из функции $f(x, y) = x^y$ и воспользуемся формулой (37,6).

Учитывая, что в нашем случае $\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$, получим $(x + \Delta x)^{y+\Delta y} \approx x^y + yx^{y-1}\Delta x + x^y \ln x\, \Delta y$.

У нас $x = 1$; $y = 3$; $\Delta x = 0{,}03$; $\Delta y = 0{,}001$, а потому $(1{,}03)^{3{,}001} \approx 1^3 + 3 \cdot 1^{3-1} \cdot 0{,}03 + 1^3 \ln 1 \cdot 0{,}001 = 1 + 0{,}09 = 1{,}09$, т. к. $\ln 1 = 0$.

Задача 37,33 (для самостоятельного решения). Вычислить приближенно: 1) $(0{,}97)^{2{,}02}$; 2) $(1{,}003)^{2{,}07}$; 3) $\sqrt{(6{,}03)^2 + (8{,}04)^2}$.

Указание. В последнем примере следует исходить из функции $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ответ. 1) 0,94; 2) 1,006; 3) 10,05.

ТРИДЦАТЬ ВОСЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Дифференцирование сложной функции от одной и нескольких независимых переменных.

1. Дифференцирование сложной функции от одной независимой переменной

Формула полной производной. *Если $z = f(u, v)$,* а *u и v являются функциями независимой переменной x: $u = \varphi(x)$ $v = \psi(x)$, то и z является функцией x.*

В таком случае говорят, что z есть сложная функция аргумента x. Производная от функции z по независимой переменной x вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}. \qquad (38,1)$$

Вычисленная по этой формуле производная называется полной производной от функции z по независимой переменной x.

Аналогично, если $z = f(u, v, w)$, а $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$, $w = \omega(x)$, *то полная производная от функции* z *по независимой переменной* x *вычисляется по формуле*

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial z}{dw}\frac{dw}{dx}. \tag{38,2}$$

Частный случай. *Если* $z = f(x, u, v)$ а u и v, *в свою очередь, также являются функциями* x, *т. е.* $u = \varphi(x)$; $v = \psi(x)$, *то*

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}. \tag{38,3}$$

Читатель должен обратить внимание на то, что в правой части формулы (38,3) стоит частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$, *вычисленная в предположении, что* u и v — *величины постоянные. Эту производную следует отличать от полной производной* $\frac{dz}{dx}$, *которая вычисляется в предположении, что* u и v *являются функциями* x. *Различие в этих двух производных объясняет также и различие в их обозначениях.*

Задача 38,1. Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z = \sin(3u + 2v - 4w)$, а $u = 2x^3$; $v = 3x^2$; $w = x^4$.

Решение. Здесь следует воспользоваться формулой (38,2). Определим производные, входящие в эту формулу:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 3\cos(3u + 2v - 4w); \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 2\cos(3u + 2v - 4w);$$

$$\frac{\partial z}{\partial w} = -4\cos(3u + 2v - 4w); \quad \frac{du}{dx} = 6x^2; \quad \frac{dv}{dx} = 6x; \quad \frac{dw}{dx} = 4x^3.$$

Подставляя эти величины в (38,2), получим

$$\frac{dz}{dx} = [3\cos(3u + 2v - 4w)]\,6x^2 + [2\cos(3u + 2v - 4w)]\,6x - 4\cos(3u + 2v - 4w)\,4x^3.$$

Вынося в правой части за скобку $\cos(3u + 2v - 4w)$ и заменяя под знаком косинуса u, v и w их выражениями через x, получим окончательно

$$\frac{dz}{dx} = (18x^2 + 12x - 16x^3)\cos(6x^3 + 6x^2 - 4x^4).$$

Задача 38,2 (для самостоятельного решения). Найти полную производную $\frac{du}{dt}$ функции $u = \sin\frac{x}{y}$, где $x = e^t$; $y = t^2$.

Указание. Формулу (38,1) следует переписать в виде

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Ответ. $\frac{du}{dt} = (t - 2)\cdot\frac{e^t}{t^3}\cdot\cos\frac{e^t}{t^2}$.

Задача 38,3 (для самостоятельного решения). 1) $u = z^2 + y^2 + zy$; $z = \sin x$; $y = e^x$. Определить полную производную $\frac{du}{dx}$.

Указание. На основании формулы (38,1)

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

2) $u = v^2 + vy$; $v = \ln x$; $y = e^x$.
Найти полную производную $\frac{du}{dx}$.

Указание. Применить формулу (38,1), переписав ее в виде

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

3) Найти полную производную $\frac{dz}{dx}$, если $z = f(u, v)$ $u = ax^2 + bx + c$; $v = ax + b$.

Ответ. 1) $\frac{du}{dx} = 3e^{3x} + e^x(\sin x + \cos x) + \sin 2x$; 2) $\frac{du}{dx} = \frac{2v + y}{x} + ve^x$; $\frac{du}{dx} = \frac{2\ln x + e^x}{x} + e^x \ln x$; 3) $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}(2ax + b) + \frac{\partial z}{\partial v}a$.

Задача 38,4 Определить полную производную функции

$$u = e^{ax}(y - z); \quad y = a\sin x; \quad z = \cos x.$$

Решение. Здесь следует применить формулу (38,3), так как функция u зависит от x как непосредственно, так и через посредство функций y и z. Определим производные, входящие в правую часть этой формулы:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ae^{ax}(y - z); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^{ax}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -e^{ax}; \quad \frac{dy}{dx} = a\cos x; \quad \frac{dz}{dx} = -\sin x;$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{dz}{dx} = ae^{ax}(y - z) + e^{ax}a\cos x - e^{ax}(-\sin x) = $$
$$= e^{ax}(a^2 + 1)\sin x.$$

Задача 38,5 (для самостоятельного решения). Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z = f(x, u, v)$, $u = \frac{1}{x}$; $v = \ln x$.

Указание. Применить формулу (38,3).

Ответ. $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\frac{1}{x^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{1}{x}$.

Задача 38,6 (для самостоятельного решения). $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $y = \sin^2 x$. Найти $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Указание. $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}$.

Ответ. $\frac{dz}{dx}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin 2x$.

Задача 38,7 (для самостоятельного решения). Найти $\frac{dz}{dx}$, если 1) $z=u^v$, где $u=\sin x$; $v=\operatorname{tg} x$; 2) $z=uvw$, где $u=\sin x$; $v=\ln x$; $w=\operatorname{tg} x$.

Ответ. 1) $\frac{dz}{dx}=(\sin x)^{\operatorname{tg} x}(1+\sec^2 x\ln\sin x)$;

$$2)\ \frac{dz}{dx}=\sin x\ln x+\frac{\sin^2 x}{x\cos x}+\frac{\sin x\ln x}{\cos^2 x}.$$

Задача 38,8 (для самостоятельного решения). Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если $z=x^y$, где $y=\ln x$.

Ответ. $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$; $\frac{dz}{dx}=x^y\left(\frac{y}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)$.

Задача 38,9 (для самостоятельного решения). Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z=e^{\frac{x}{y}}$, где $y=\sin^3 x$.

Ответ. $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{3x}{y}\sin^2 x\cos x\right)$.

Задача 38,10 (для самостоятельного решения). Найти $\frac{dz}{dx}$, если 1) $z=\ln(x^2+y^2)$, где $y=e^{x^2}$; 2) $z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$, где $y=\cos x$.

Ответ. 1) $\frac{dz}{dx}=\frac{2x}{x^2+y^2}(1+2ye^{x^2})$, а вместо y можно подставить e^{x^2}; 2) $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+y^2}\sin x$.

Задача 38,11. Движение точки задано уравнениями

$$x=3t^2;\quad y=2t^4;\quad z=4t^6.$$

С какой скоростью возрастает ее расстояние от начала координат?

Решение. Расстояние r точки от начала координат определяется формулой $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, где x, y и z — координаты точки.

Для решения задачи следует найти $\frac{dr}{dt}=\frac{\partial r}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dz}{dt}$;

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\quad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\quad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\frac{dx}{dt}=6t;\quad \frac{dy}{dt}=8t^3;\quad \frac{dz}{dt}=24t^5.$$

Ответ. $\frac{dr}{dt}=\frac{18t+16t^5+96t^9}{\sqrt{9+4t^4+16t^8}}$.

2. Дифференцирование сложной функции от нескольких независимых переменных

Если $z = f(u, v)$ — функция от двух переменных u и v, а каждая из них есть в свою очередь функция двух независимых переменных x и y, то и z есть функция независимых переменных x и y, а ее частные производные по этим переменным вычисляются по формулам

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}\right\} \qquad (38,4)$$

Частный случай. Если функция z зависит от x и y не только через посредство u и v, но и явно, т. е. $z = f(x, y, u, v)$, то имеют место формулы:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}\right\} \qquad (38,5)$$

причем следует иметь в виду, что производные $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ и $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ от функции z вычисляются в предположении, что u и v — величины постоянные.

Задача 38,12. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \ln(u^2 + v^2)$, а

$$u = x\cos y; \quad v = y\sin x.$$

Решение. Следует воспользоваться формулами (38,4). Определим частные производные, входящие в эти формулы:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{u^2+v^2}\cdot 2u; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{u^2+v^2}\cdot 2v; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \cos y;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y\cos x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -x\sin y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \sin x.$$

Подстановка этих производных в (38,4) дает

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2u}{u^2+v^2}\cos y + \frac{2v}{u^2+v^2}y\cos x = \frac{2}{u^2+v^2}(u\cos y + vy\cos x) =$$

$$= \frac{2}{x^2\cos^2 y + y^2\sin^2 x}(x\cos^2 y + y^2\sin x\cos x);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2u}{u^2+v^2}x\sin y + \frac{2v}{u^2+v^2}\sin x = \frac{2}{u^2+v^2}(v\sin x - ux\sin y) =$$

$$= \frac{2}{x^2\cos^2 y + y^2\sin^2 x}(y\sin^2 x - x^2\sin y\cdot\cos y).$$

Задача 38,13. Определить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \operatorname{arctg}\frac{u}{v}$, а $u = x\sin y$, $v = x\cos y$.

Решение. Здесь опять-таки следует применить формулы (38,4). Определяем частные производные, входящие в эти формулы:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{1+\frac{u^2}{v^2}}\frac{1}{v} = \frac{v}{u^2+v^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{1+\frac{u^2}{v^2}}\left(-\frac{u}{v^2}\right) = -\frac{u}{u^2+v^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sin y; \ \frac{\partial v}{\partial x} = \cos y; \ \frac{\partial u}{\partial y} = x\cos y; \ \frac{\partial v}{\partial y} = -x\sin y.$$

Пэтому

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{v}{u^2+v^2}\sin y - \frac{u}{u^2+v^2}\cos y = \frac{1}{u^2+v^2}(v\sin y - u\cos y) =$$

$$= \frac{1}{x^2\sin^2 y + x^2\cos^2 y}(x\sin y\cos y - x\sin y\cos y) = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

Задача 38,14 (для самостоятельного решения). Определить $\frac{\partial u}{\partial t}$; $\frac{\partial u}{\partial v}$; $\frac{\partial u}{\partial w}$, если $u = \ln\cos\frac{xy}{\sqrt{z}}$, где $x = tvw$; $y = e^{\frac{t}{v}}$; $z = \sqrt{\frac{tv}{w}}$.

Указание. Формулы (38,4) в данном случае для определения, например, $\frac{\partial u}{\partial t}$ запишутся так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

и аналогично для $\frac{\partial u}{\partial v}$ и $\frac{\partial u}{\partial w}$.

Ответ. $\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{tg}\frac{xy}{\sqrt{z}}\left(\frac{yvw}{\sqrt{z}} + \frac{xe^{\frac{t}{v}}}{v\sqrt{z}} - \frac{xyv}{4z\sqrt{z}\sqrt{tvw}}\right)$.

Задача 38,15. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = f(u, v)$ а $u = x + y$; $v = x - y$.

Решение. Применяя формулы (38,4), получаем, учитывая, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} = 1; \ \frac{\partial u}{\partial y} = 1; \ \frac{\partial v}{\partial y} = -1; \ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot 1 = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial v}(-1) = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Задача 38,16 (для самостоятельного решения). Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = f(u, v)$, а $u = x^2 + y^2$; $v = xy$.

Ответ. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\frac{\partial z}{\partial u} + y\frac{\partial z}{\partial v}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y\frac{\partial z}{\partial u} + x\frac{\partial z}{\partial v}$.

Задача 38,17. Доказать, что функция $z = y\varphi(x^2 - y^2)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

Решение. Обозначим $x^2 - y^2 = u$. Тогда заданная функция

$$z = y\varphi(u). \tag{38,6}$$

Легко усмотреть, что z зависит от x только через посредство u, а от y — как непосредственно, так и через посредство u. Поэтому

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x} = y\varphi'(u)\,2x = 2xy\varphi'(u).$$

Производная $\frac{\partial z}{\partial y}$ должна быть определена по второй из формул (38,5). Входящая в эту формулу производная $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \varphi(u)$, а потому, учитывая, что $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(u) + y\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(u) - 2y^2\varphi'(u).$$

Подставляя найденные выражения $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в левую часть заданного уравнения, получим

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}2xy\varphi'(u) + \frac{1}{y}[\varphi(u) - 2y^2\varphi'(u)] =$$
$$= 2y\varphi'(u) + \frac{1}{y}\varphi(u) - 2y\varphi'(u) = \frac{1}{y}\varphi(u) = \frac{1}{y}\frac{z}{y} = \frac{z}{y^2},$$

так как на основании (38,6) $\varphi(u) = \frac{z}{y}$.

Задача 38,18. Доказать, что функция $z = xy + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$.

Решение. Обозначим $\frac{y}{x} = u$. Тогда заданная функция перепишется в виде

$$z = xy + x\varphi(u) \tag{38,7}$$

и очевидно, что z зависит от x и y как непосредственно, так и через посредство u. Поэтому частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ следует отыскивать по формулам (38,5). Учитывая, что

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = y + \varphi(u), \text{ а } \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = x$$

и, кроме того,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + \varphi(u) + x\varphi'(u)\left(-\frac{y}{x^2}\right) = y + \varphi(u) - \frac{y}{x}\varphi'(u);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + x\varphi'(u)\frac{1}{x} = x + \varphi'(u).$$

Подставляя значения $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в левую часть заданного уравнения, получим

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x\left[y + \varphi(u) - \frac{y}{x}\varphi'(u)\right] + y\left[x + \varphi'(u)\right] = xy + x\varphi(u) -$$

$$- y\varphi'(u) + xy + y\varphi'(u) = xy + \underbrace{x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + xy}_{z} = xy + z.$$

Задача 38,19 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $z = x + y + \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x + y$.

Указание. Обозначить $\frac{x}{y} = u$ и воспользоваться формулами (38,5). Учесть, что $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 1$; $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 1$.

Задача 38,20 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \varphi(x - y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = x + y$.

Указание. Обозначить $x - y = u$ и воспользоваться формулами (38,5), в которых $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = x$; $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = y$.

Задача 38,21 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $z = e^y\varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(x^2 - y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = xyz.$$

Указание. Положить $ye^{\frac{x^2}{2y^2}} = u$, воспользоваться формулами (38,5) и учесть, что $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$; $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = e^y$.

Задача 38,22 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2$.

ТРИДЦАТЬ ДЕВЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Производные и дифференциалы высших порядков функций нескольких независимых переменных.

1. Производные высших порядков

Если задана функция двух независимых переменных $z = f(x, y)$ и вычислены ее частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, то они. вообще говоря, также являются функциями независимых переменных x и y, а потому от каждой из них можно вычислить производные как по x, так и по y.

Если вычислить частную производную по x от $\frac{\partial z}{\partial x}$, то получим частную производную второго порядка от функции z взятую два раза по x. Эта производная обозначается символом $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и, таким образом, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

Если вычислить частную производную по y от $\frac{\partial z}{\partial x}$, то получим частную производную второго порядка функции z, взятую сначала по x, а потом по y. Эта производная обозначается символом $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и, таким образом, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Подобно этому частная производная по x от $\frac{\partial y}{\partial y}$ даст вторую частную производную функции z, вычисленную сначала по y, а потом по x. Она обозначается символом $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$;

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

а частная производная по y от $\frac{\partial z}{\partial y}$ есть вторая частная производная от функции z, взятая два раза по y. Она обозначается символом $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Также вводятся частные производные порядка более высокого, чем второй.

Например, символ $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$ обозначает производную третьего порядка функции $z = f(x, y)$, вычисленную три раза по x.

Символ же $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ обозначает, что от функции z взята производная третьего порядка, причем она вычислялась два раза по x и от полученной производной $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ вычислена один раз производная по y и т. д.

Задача 39,1. Найти частные производные третьего порядка функции $z = x^4 + 3x^3y - 4x^2y^2 + 5xy^3 - y^4$.

Решение. $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 9x^2y - 8xy^2 + 5y^3;$ (39,1)

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^3 - 8x^2y + 15xy^2 - 4y^3. \qquad (39,2)$$

Если взять производную по x от $\frac{\partial z}{\partial x}$ (выражение (39,1)), то получим, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 + 18xy - 8y^2$; если то же выражение (39,1) продифференцировать по y, то получим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 9x^2 - 16xy + 15y^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -8x^2 + 30xy - 12y^2.$$

Продифференцируем теперь по x производную $\frac{\partial z}{\partial y}$ (выражение (39,2) и получим, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 9x^2 - 16xy + 15y^2$$

Читатель должен усмотреть разницу в обозначениях $\frac{\partial z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$). Символ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ означает, что от функции z сначала была взята производная по x, а результат был продифференцирован по y. Символ же $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ показывает, что от функции z была сначала вычислена производная по y, а полученный результат продифференцирован по x. Таким образом, производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial z}$ отличаются порядком, в котором велось дифференцирование.

Если продифференцировать по y производную $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, то получим третью производную $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 18x - 16y$.

Продифференцировав же по x производную $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, получим

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial z} = 18x - 16y.$$

Если вычислить производную по y от $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, получим

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -16x + 30y.$$

Производная по x от $\frac{\partial^2 z^3}{\partial y \partial x}$ даст $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x^2} = 18x - 16y$.

Производные

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = -16x + 30y; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = -16x + 30y,$$

наконец, если взять производную по x от $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, то получим $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 24x + 18y$, а если взять производную по y от $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, то получим $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 30x - 24y$.

Здесь опять-таки следует подметить, что производные

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x},$$

а также производные

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$$

отличаются только порядком дифференцирования.

Оказалось, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}; \tag{39,3}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x y y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}, \tag{39,4}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}. \tag{39,5}$$

Это совпадение не является случайным. Имеет место такая важная теорема: ***если частные производные непрерывны, то их значения не зависят от порядка дифференцирования.***

Задача 39,2 (для самостоятельного решения). Найти частные производные второго порядка функций:

1) $z = xy$; 2) $z = e^{ax+by}$; 3) $z = \ln(x^2 + y^2)$; 4) $z = e^{xy}$.

Ответ. 1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$;

2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 e^{ax+by}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = abe^{ax+by}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = b^2 e^{ax+by}$;

3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial x \partial y} = -4\frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \cdot \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$;

4) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^{xy}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{xy}(xy + 1)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}$.

Задача 39,3. Определить производную $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ функции $u = \sin(xyz)$.

Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yz\cos(xyz);\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=z\cos(xyz)-xyz^2\sin(xyz);$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=\cos(xyz)-xyz\sin(xyz)-2xyz\sin(xyz)-x^2y^2z^2\cos(xyz);$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=(1-x^2y^2z^2)\cos xyz-3xyz\sin(xyz).$$

Задача 39,4. Показать, что функции: 1) $z=\ln r$, где $r=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$ и 2) $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ удовлетворяют уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

Решение. 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}$. Но так как

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x-x_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}}=\frac{x-x_1}{r},$$

то

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(x-x_1)\frac{1}{r^2}.$$

Теперь вычислить $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, рассматривая правую часть последнего равенства как произведение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{r^2}-\frac{2r}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x}(x-x_1).$$

Подставляя сюда найденное выше значение $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x-x_1}{r}$, получим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{r^2}-\frac{2(x-x_1)^2}{r^4}.$$

Аналогично находим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{r^2}-\frac{2(y-y_1)^2}{r^4}.$$

Подставляя найденные значения $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}$ в левую часть уравнения Лапласа и учитывая, что если

$$r=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2},$$

то $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2$, получим

$$\frac{1}{r^2}-\frac{2(x-x_1)^2}{r^4}+\frac{1}{r^2}-\frac{2(y-y_2)^2}{r^4}=$$

$$=\frac{2}{r^2}-\frac{2[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2]}{r^4}=\frac{2}{r^2}-\frac{2r^2}{r^4}=\frac{2}{r^2}-\frac{2}{r^2}=0,$$

и тем самым доказано требуемое.

2) $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y}{(x^2+y^2)^2}2x;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x}{(x^2+y^2)^2}2y.$$

Подставляя найденные значения $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ в левую часть уравнения Лапласа, получим

$$\frac{y}{(x^2+y^2)^2}2x-\frac{x}{(x^2+y^2)^2}2y=0,$$

и требуемое доказано.

Задача 39,5 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $\varphi=\frac{1}{r}$, где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0.$$

Задача 39,6 (для самостоятельного решения). Доказать, что функции 1) $v=r\cos\theta$ и 2) $v=\frac{\cos\theta}{r^2}$ удовлетворяют уравнению Лапласа в сферических координатах:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}=0.$$

Задача 39,7. Доказать, что если функция $u=u(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

то и функция

$$v=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}$$

также удовлетворяет этому уравнению.

Указание. Подставить в заданное уравнение вместо u функцию v и доказать, что $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right);\quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)=x\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}=x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)=x\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial z^2}=x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

и, таким образом,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(x\frac{\partial y}{\partial x}\right)=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+$$

$$+x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

так как по условию

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(y\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(y\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(y\frac{\partial u}{\partial y}\right)=2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(z\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(z\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(z\frac{\partial u}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Поэтому $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0$, что и требовалось.

Задача 39,8. Известно, что $z=f(u, v)$, а переменные u и v являются функциями независимых переменных x и y.

$$u=\varphi(x, y);\quad v=\psi(x, y).$$

Определить $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Решение. На основании формулы (38 4)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Учитывая, что производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ являются, вообще говоря, функциями u и v, имеем, опять-таки на основании формул (38,4),

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Подставляя эти значения в предыдущее равенство, получим окончательно, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x}+$$

$$+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Этим же путем найдем, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Задача 39,9 (для самостоятельного решения). Вычислить $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$. Функции $z = f(u, v)$, где $u = \varphi(x, y)$; $v = \psi(x, y)$.

Указание. Воспользоваться методом, с помощью которого была найдена производная $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ в предыдущей задаче, и учесть, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Ответ:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

Замечание. Формулы, полученные в последних двух задачах, не должны запоминаться. Читатель должен усвоить метод, с помощью которого эти формулы были получены.

На применение этого метода предлагается задача 39,10.

Задача 39,10 (для самостоятельного решения). Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $z = f(u, v)$; $u = x^2 + y^2$, $v = xy$.

Указание.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}2x + \frac{\partial z}{\partial v}y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}2x + \frac{\partial z}{\partial v}y\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}2x\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}y\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)2x + \frac{\partial z}{\partial u}2 + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)y = \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right]\cdot 2x +$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial v}\cdot 2 + \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right]y = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)2x + 2\frac{\partial z}{\partial u} +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)y.$$

Подставляя сюда значения частных производных функций u и v по x, получим окончательно:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4xy\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + 2\frac{\partial z}{\partial u}$$

$\left(\text{учтено, что } \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}\right)$.

Ответ.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4xy\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + x^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + 2\frac{\partial z}{\partial u};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2(x^2 + y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + xy\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Задача 39,11 (для самостоятельного решения). Определить частные производные второго порядка функции $z = \varphi(u, v)$, где $u = x + y$; $v = x - y$.

Ответ. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}.$$

Задача 39,12 (для самостоятельного решения). Доказать, что функции 1) $u = e^{kn^2t} \sin nx$ и 2) $u = e^{-kn^2t} \cdot \cos nx$ удовлетворяют уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Задача 39,13. Показать что функция

$$z = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$$

удовлетворяет уравнению колебания струны

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

(функции φ и ψ — какие угодно дважды дифференцируемые функции).

Решение. Введем обозначения $x - at = u$; $x + at = v$. Тогда заданная функция перепишется так: $z = \varphi(u) + \psi(v)$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Но так как функция φ не зависит от v, а функция ψ — от u, то $\frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0$ и $\frac{\partial \psi}{\partial u} = 0$.

Если учесть, что $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$ и $\frac{\partial v}{\partial x} = 1$, то $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2},$$

так как $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) = 0$ и $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right) = 0$; $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}$ (учтено, что $\frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0$ и $\frac{\partial \psi}{\partial u} = 0$).

Учитывая, что $\frac{\partial u}{\partial t} = -a$, а $\frac{\partial v}{\partial t} = a$, имеем $\frac{\partial z}{\partial t} = -a\frac{\partial \varphi}{\partial u} + a\frac{\partial \psi}{\partial v}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-a\frac{\partial \varphi}{\partial u} + a\frac{\partial \psi}{\partial u}\right) = -a\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) + a\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right) =$$

$$= -a\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + a^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\right).$$

Умножая $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ на a^2, убеждаемся, что действительно

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

что и требовалось.

Задача 39,14 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция

$$z = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Указание. Положить $x + y = u$.

Задача 39,15 (для самостоятельного решения). Показать, что функция

$$z = \varphi(xy) + \sqrt{xy}\,\psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

удовлетворяет уравнению

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Указание. Ввести замену; $xy = u$; $\frac{y}{x} = v$.

2. Дифференциалы высших порядков

Аргументы x и y функции $z = f(x, y)$ — независимые переменные.

Дифференциалом второго порядка функции $z = f(x, y)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка; он обозначается через d^2z. Таким образом $d^2z = d(dz)$.

Дифференциал второго порядка вычисляется по формуле

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \tag{39,6}$$

Дифференциал третьего порядка функции $z = f(x, y)$ есть дифференциал ее дифференциала второго порядка; обозначается он символом d^3z, т. е. $d^3z = d(d^2z)$.

Дифференциал третьего порядка вычисляется по формуле

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3. \tag{39,7}$$

Если условиться над символами $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ производить все арифметические действия по тем же правилам, по которым они производятся над числами, а произведение

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m} \frac{\partial^n}{\partial y^n} u$$

заменять частной производной $\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m \partial y^n}$, то формулы для вычисления d^2z и d^3z можно в символической записи переписать так:

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z, \tag{39,8}$$

$$d^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 z \tag{39,9}$$

и вообще для дифференциала порядка n функции $z=f(x, y)$ имеет место символическая формула

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z. \tag{39,10}$$

При вычислении по формуле (39,10) следует применить известную из алгебры формулу Ньютона для возведения бинома в целую и положительную степень.

Например, выражение $\frac{\partial^3}{\partial x^3}dx^3\frac{\partial^2}{\partial y^2}dy^2 \cdot z$ следует заменить выражением $\frac{\partial^5 z}{\partial x^3 \partial y^2}dx^3\,dy^2$, а выражение $\frac{\partial^2}{\partial x^2}dx^2\frac{\partial}{\partial y}dy \cdot z$ выражением $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy$ и т. д. ...

Вычисление дифференциалов любого порядка функции $z=f(x, y)$, где x и y — независимые переменные, по формулам, приведенным в этом параграфе, не может вызвать у читателя никаких затруднений, так как по существу все вычисления сводятся к определению частных производных высших порядков, которые читатель уже умеет находить.

Мы разъясним при решении задач другой способ нахождения дифференциалов высших порядков, который даст возможность определять их, минуя вычисление частных производных, а по известному выражению дифференциала мы сможем находить и частные производные.

Задача 39,16. Найти d^2z функции $z=x^2y^2$.

Решение. Первый способ. Воспользуемся формулой (39,6), для чего определим все частные производные, входящие в нее:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=2x^2y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2y^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=4xy; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x^2.$$

Подставляя вторые производные в (39,6), находим, что

$$d^2z = 2y^2dx^2 + 8xydxdy + 2x^2dy^2.$$

Второй способ. Определим сначала дифференциал первого порядка заданной функции, опираясь на основные формулы:

$$dz = y^2d(x^2) + x^2d(y^2) = y^2 \cdot 2xdx + x^2 \cdot 2ydy = 2xy^2dx + 2x^2ydy =$$
$$= 2xy(ydx + xdy).$$

Для определения d^2z дифференцируем dz, но при этом следует иметь в виду, что так как x и y — независимые переменные, то их дифференциалы dx и dy — величины постоянные, которые при дифференцировании выносятся за знак дифференциала. Учитывая это, получим

$$d^2z = d(dz) = d[2xy(ydx + xdy)] = 2[d(xy)(ydx + xdy) + \\ + xy \quad d(ydx + xdy)] = 2[(ydx + xdy)(ydx + xdy) + \\ + xy \quad (dydx + dxdy)] = 2[(ydx + xdy)^2 + xy \cdot 2dxdy] = \\ = 2[(y^2dx^2 + 2xydxdy + x^2dy^2) + 2xydxdy] = \\ = 2y^2dx^2 + 8xydxdy + 2x^2dy^2. \qquad (39,11)$$

Теперь уже, зная дифференциал второго порядка, можно найти частные производные второго порядка. Легко усмотреть, что коэффициент при dx^2 равен $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, коэффициент при $dxdy$ есть $2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, а коэффициент при dy^2 есть $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. Это следует из того, что при произвольных dx и dy равенство

$$Adx^2 + Bdxdy + Cdy^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

имеет место только при условии, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = A; \quad 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = B; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = C.$$

Таким образом, из (39,11) заключаем, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^2$$

и совпадает с ранее найденными значениями этих производных.

Сейчас подробно двумя способами будет решена еще одна задача.

Задача 39,17. Найти дифференциал третьего порядка d^3z функции $z = \cos(x + 2y^2)$.

Решение. Первый способ. Воспользуемся формулой (39,7), для чего прежде всего определим частные производные третьего порядка, входящие в эту формулу.

Производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin(x + 2y^2); \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -4y\sin(x+2y^2).$$

Производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\cos(x + 2y^2); \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4y\cos(x + 2y^2);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4\sin(x + 2y^2) - 16y^2\cos(x + 2y^2). \qquad (39,12)$$

Производные третьего порядка

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \sin(x + 2y^2); \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 4y \sin(x + 2y^2);$$
$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -4\cos(x + 2y^2) + 16y^2 \sin(x + 2y^2);$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = -16y\cos(x + 2y^2) - 32y\cos(x + 2y^2) + 64y^3 \sin(x + 2y^2) =$$
$$= -48y\cos(x + 2y^2) + 64y^3 \sin(x + 2y^2). \qquad (39,13)$$

Подставляя значения третьих частных производных в (39,7), получим, что

$$d^3z = \sin(x + 2y^2)\, dx^3 + 3 \cdot 4y \sin(x + 2y^2)\, dx^2 dy +$$
$$+ 3[-4\cos(x + 2y^2) + 16y^2 \sin(x + 2y^2)]\, dxdy^2 +$$
$$+ [-48y\cos(x + 2y^2) + 64y^3 \sin(x + 2y^2)] dy^3.$$

Второй способ. Теперь мы вычислим третий дифференциал d^3z тремя последовательными дифференцированиями:

$$dz = -\sin(x + 2y^2)\, dx - 4y \sin(x + 2y^2)\, dy;$$
$$dz = -\sin(x + 2y^2) \cdot (dx + 3ydy).$$

Дифференцируя второй раз, следует помнить, что дифференциалы dx и dy независимых переменных должны рассматриваться как величины постоянные, а потому они должны выноситься за знак дифференциала

$$d^2z = d(dz) = d[-\sin(x + 2y^2) \cdot (dx + 4ydy)] =$$
$$= d[-\sin(x + 2y^2)] \cdot (dx + 4ydy) + [-\sin(x + 2y^2)]\, d(dx + 4ydy) =$$
$$= [-\cos(x + 2y^2)\, dx - 4y\cos(x + 2y^3) dy] \cdot (dx + 4ydy) +$$
$$+ [-\sin(x + 2y^2)]\, 4dydy = -\cos(x + 2y^2)\, dx^2 -$$
$$-4y\cos(x + 2y^2)\, dydx - 4y\cos(x + 2y^2)\, dxdy -$$
$$-16y^2\cos(x + 2y^2)\, dy^2 - 4\sin(x + 2y^2)\, dy^2 = -\cos(x + 2y^2)\, dx^2 -$$
$$-8y\cos(x + 2y^3)\, dxdy - [16y^2\cos(x + 2y^2) + 4\sin(x + 2y^2)]\, dy^2.$$

Читатель легко заметит, что коэффициенты при dx^2, $dxdy$ и dy^2 равны соответственно $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, которые были найдены выше в выражениях (39,12).

Чтобы упростить определение дифференциала третьего порядка, выражение дифференциала второго порядка перепишем в виде

$$d^2z = -\cos(x + 2y^2)(dx^2 + 8ydxdy + 16y^2dy^2) - 4\sin(x + 2y^2)\, dy^2.$$

Тогда

$$d^3z = d(d^2z) = d[-\cos(x+2y^2)(dx^2+8y\,dx\,dy+16y^2dy^2] + d[-4\sin(x+2y^2)\,dy^2] = d[-\cos(x+2y^3)](dx^2+8y\,dx\,dy + 16y^2dy^2) + [-\cos(x+2y^2)]\,d(dx^2+8y\,dx\,dy+16y^2dy^2) + d[-4\sin(x+2y^2)]\,dy^2 = [\sin(x+2y^2)\,dx + 4y\sin(x+2y^2)\,dy](dx^2+8y\,dx\,dy+16y^2\,dy^2) + [-\cos(x+2y^2)](8dy\,dx\,dy+32y\,dy\,dy^2) + [-4\cos(x+2y^2)\,dx - 16y\cos(x+2y^2)\,dy]\,dy^2 = \sin(x+2y^2)\,dx^3 + 4y\sin(x+2y^2)\,dx^2dy + 8y\sin(x+2y^2)\,dx^2dy + 32y^2\sin(x+2y^2)\,dx\,dy^2 + 16y^2\sin(x+2y^2)\,dx\,dy^2 + 64y^3\sin(x+2y^2)\,dy^3 - 8\cos(x+2y^2)\,dx\,dy^2 - 32y\cos(x+2y^2)\,dy^3 - 4\cos(x+2y^2)\,dx\,dy^2 - 16y\cos(x+2y^2)\,dy^3 = \sin(x+2y^2)\,dx^3 + 12y\sin(x+2y^2)\,dx^2dy + [48y^2\sin(x+2y^2) - 12\cos(x+2y^2)]\,dx\,dy^2 + [64y^3\sin(x+2y^2) - 48y\cos(x+2y^2)]\,dy^3.$$

Теперь легко усмотреть, что коэффициенты при dx^3, dx^2dy, $dxdy^2$ и dy^3 равны соответственно: $\frac{\partial^3z}{\partial x^3}$, $3\frac{\partial^3z}{\partial x^2\partial y}$, $3\frac{\partial^3z}{\partial x\partial y^2}$ и $\frac{\partial^3z}{\partial y^3}$, значения которых были найдены выше (выражения (39,13)).

Задача 39,18 (для самостоятельного решения). Найти двумя способами d^2z функции $z = x^3y^3$.

Ответ. $d^2z = 6xy^3dx^2 + 18x^2y^2dxdy + 6x^3ydy^2$.

Задача 39,19 (для самостоятельного решения). Найти двумя способами дифференциал третьего порядка функции $z = \sin(2x+y)$ при $x = \frac{\pi}{2}$; $y = 0$.

Ответ. $d^3z = 8dx^3 + 12dx^2dy + 6dxdy^2 + dy^3$.

Задача 39,20 (для самостоятельного решения). Найти дифференциал второго порядка функций:

1) $z = e^{x-y^2} + \cos x$; 2) $z = y\ln x$;

3) $z = xy$; 4) $z = e^{ax+by}$; 5) $y = e^{xy}$.

Ответ.

1) $d^2z = (e^{x-y^2} - \cos x)\,dx^2 - 4ye^{x-y^2}\,dxdy + 2e^{x-y^2}(2y^2-1)\,dy^2$;

2) $d^2z = -\frac{y}{x^2}\,dx^2 + \frac{2}{x}\,dxdy$;

3) $d^2z = 2dxdy$, 4) $d^2z = e^{ax+by}(adx+bdy)^2$;

5) $d^2z = e^{xy}y^2dx^2 + 2e^{xy}(xy+1)\,dxdy + x^2e^{xy}dy^2$.

Задача 39,21 (для самостоятельного решения). Найти дифференциалы третьего порядка функций:

1) $z = x^4y - xy^4$,

2) $z = x\sin y + y\cos x$;

определить все частные производные третьего порядка.

Ответ.

1) $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 24xy;\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 12x^2;\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -12y^2;\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = -24xy;$

2) $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = y \sin x;\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = -\cos x;\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -\sin y;\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = -x\cos y.$

б) Аргументы x и y функции $z = f(x, y)$ являются функциями одной или нескольких независимых переменных.

Задача 39,22. Вычислить дифференциал второго порядка функции $z = f(x, y)$, где $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$.

Решение. Здесь уже x и y — не независимые переменные, а функции независимых переменных u и v, т. е. заданная функция является сложной.

Если при вычислении дифференциала первого порядка функции $z = f(x, y)$ совершенно безразлично, будут ли аргументы независимыми переменными или функциями других независимых переменных (свойство инвариантности дифференциала первого порядка), то при вычислении дифференциалов высших порядков надо строго различать эти два случая.

Так как $z = f(x, y)$, то $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$.

При повторном дифференцировании мы теперь не можем уже, как это делалось раньше, считать дифференциалы dx и dy величинами постоянными, потому что x и y — не независимые переменные, а функции независимых переменных u и v. Поэтому

$$d^2z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx\right) + d\left(\frac{\partial z}{\partial y} dy\right) =$$

$$= d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial z}{\partial x} d(dx) + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy + \frac{\partial z}{\partial y} d(dy);$$

$$d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dy = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dy;$$

$$d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy;$$

$$d(dx) = d^2x;\quad d(dy) = d^2y.$$

Подставляя только что найденные величины в предыдущее равенство, получим, что

$$d^2z = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dy\right) dx + \frac{\partial z}{\partial x} d^2x + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy\right) dy + \frac{\partial z}{\partial y} d^2y.$$

Окончательно после приведения подобных членов получаем

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x} d^2x + \frac{\partial z}{\partial y} d^2y,$$

или в другой записи (символической):

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 z + \frac{\partial z}{\partial x} d^2x + \frac{\partial z}{\partial y} d^2y. \qquad (39,14)$$

Сравнивая эту формулу с формулой (39,6) или (39,8) для вычисления второго дифференциала функции $z = f(x, y)$ в том случае, когда аргументы x и y являются независимыми переменными, мы видим, что в рассматриваемом случае появились два дополнительных слагаемых $\frac{\partial z}{\partial x} d^2x$ и $\frac{\partial z}{\partial y} d^2y$.

Заметим что формула (39,6) является частным случаем формулы (39,14), так как если x и y — независимые переменные, то dx и dy — величины постоянные, а потому их дифференциалы $d^2x = 0$ и $d^2y = 0$, добавочные слагаемые становятся равными нулю и мы получаем из (39,14) формулу (39,6).

Формулу (39,6) вряд ли имеет смысл запоминать. Значительно важнее уяснить метод, с помощью которого она была получена.

Задача 39,23. Определить d^2z, если $z = x^y$, где $x = uv$; $y = u + v$.

Решение. Дифференциал первого порядка

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = yx^{y-1}dx + x^y \ln x\, dy;$$

$$\begin{aligned} d^2z &= d(dz) = d(yx^{y-1}dx) + d(x^y \ln x\, dy) = d(yx^{y-1})\, dx + \\ &+ yx^{y-1}d(dx) + d(x^y \ln x)\, dy + x^y \cdot \ln x \cdot d(dy) = \\ &= [dy \cdot x^{y-1} + yd(x^{y-1})]\, dx + yx^{y-1}d^2x + \\ &+ [d(x^y) \ln x + x^y d(\ln x)]\, dy + x^y \ln x \cdot d^2y. \end{aligned}$$

Нам осталось вычислить дифференциалы $d(x^{y-1})$; $d(x^y)$ и $d(\ln x)$:

$$\begin{aligned} d(x^{y-1}) &= \frac{\partial}{\partial x}(x^{y-1})\, dx + \frac{\partial}{\partial y}(x^{y-1})\, dy = \\ &= (y-1)\, x^{y-2}dx + x^{y-1}\ln x dy; \end{aligned}$$

$$d(x^y) = yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy;$$

$$d(\ln x) = \frac{1}{x}\, dx.$$

Подставляя эти величины в предыдущее равенство, имеем

$$\begin{aligned} d^2z &= \{x^{y-1}\, dy + y\,[(y-1)\, x^{y-2}\, dx + x^{y-1} \ln x\, dy]\}\, dx + \\ &+ yx^{y-1}\, d^2x + \left[(yx^{y-1}\, dx + x^y \ln x\, dy) \ln x + x^y \cdot \frac{1}{x}\, dx\right] dy + \\ &+ x^y \ln x \cdot d^2y = y\,(y-1)\, x^{y-2}\, dx^2 + 2\,(x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x)\, dx\, dy + \\ &+ x^y \ln^2 x \cdot dy^2 + yx^{y-1}\, d^2x + x^y \ln x \cdot d^2y. \qquad (39,14) \end{aligned}$$

На основании данных задачи надо в последнее выражение подставить $x = uv$; $y = u + v$; $dx = udv + vdu$; $dx^2 = (udv + vdu)^2$; $dy = du + dv$; $dy^2 = (du + dv)^2$; $d^2x = du\,dv + dv\,du = 2\,du\,dv$; $d^2y = 0$, так как du и dv, как дифференциалы независимых переменных,— величины постоянные, а значит, их дифференциалы равны нулю.

Решение задачи можно, конечно, провести сразу по формуле (39,14), и тогда было бы

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x \partial y} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^y \ln^2 x.$$

Подставляя эти значения в (39,14), получим выражение d^2z, уже ранее найденное. В нем следует сделать замены, указанные выше.

Задача 39,24 (для самостоятельного решения). Найти дифференциал второго порядка функции $z = f(u, v)$, где $u = x^2 + y^2$; $v = xy$.

Указание. Здесь u и v — промежуточные переменные, а x и y — независимые переменные.

Формула (39,14) должна быть переписана в виде

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}du^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}du\,dv + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}dv^2 + \frac{\partial z}{\partial u}d^2u + \frac{\partial z}{\partial v}d^2v;$$

$$du = 2x\,dx + 2y\,dy; \; du^2 = 4(x^2\,dx^2 + 2xy\,dx\,dy + y^2\,dy^2);$$

$$d^2u = 2\,dx^2 + 2\,dy^2; \quad d^2v = 2\,dx\,dy.$$

Ответ.

$$d^2z = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \quad 4x^2 + 4xy \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} + 2 \quad \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot y^2\right)dx^2 +$$

$$+ 2\left(4xy\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} + 2x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} + xy\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\right)dx\,dy +$$

$$+ \left(4y^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + 4xy\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} + 2\frac{\partial z}{\partial v} + x^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)dy^2.$$

Задача 39,25 (для самостоятельного решения). Использовать результат, полученный в предыдущей задаче, если $z = e^u \cos v$, а u и v имеют те же значения, что и в задаче (39,24).

СОРОКОВОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Линии и поверхности уровня. Производная функции по заданному направлению. Градиент функции.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Физическим полем называется часть пространства, в которой происходит физическое явление.

1. Скалярное поле

Физическое поле называется скалярным, если физическое явление, его образующее, характеризуется функцией $f = f(x, y, z)$, зависящей **только от координат** *точек пространства, в кото-*

*ром это явление происходит. Скалярное поле полностью определено заданием одной функции $f(x, y, z)$ трех независимых переменных**.

Если физическое явление образовало скалярное поле, то каждой точке $P(x_1, y_1, z_1)$ пространства, в котором происходит это явление, ставится в соответствие определенное число, характеризующее это явление в рассматриваемой точке. Это число есть частное значение функции $f(x, y, z)$, вычисленное в точке $P(x_1, y_1, z_1)$ (примерами скалярного поля являются: поле электрического потенциала, давление в атмосфере).

2. Поверхность уровня

Если однозначная функция $f(x, y, z)$ соответствует скалярному полю, образованному физическим явлением, то ***поверхностью уровня*** *(иначе эквипотенциальной поверхностью) этого поля называется поверхность, во всех точках которой функция $f(x, y, z)$ сохраняет одно и то же значение.*

Поверхности уровня имеют уравнение

$$f(x, y, z) = c, \tag{40,1}$$

где c — постоянная величина.

Придавая постоянной c различные числовые значения, получим семейство поверхностей уровня. Через каждую точку пространства проходит одна поверхность уровня.

Во всех точках поверхности уровня физическое явление протекает одинаково.

Уравнение поверхности уровня, проходящей через точку $P(x_1, y_1, z_1)$, имеет вид

$$f(x, y, z) = f(x_1, y_1, z_1). \tag{40,2}$$

3. Производная по направлению

Производная от функции $f(x, y, z)$ по направлению $(\bar{l})$ характеризует скорость изменения функции $f(x, y, z)$ по этому направлению.

Эта производная вычисляется по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos(l, x) + \frac{\partial f}{\partial y}\cos(l, y) + \frac{\partial f}{\partial z}\cos(l, z). \tag{40,3}$$

---

* Предполагается, что функция $f(x, y, z)$ — однозначная непрерывная функция x, y, z, имеющая непрерывные частные производные первого порядка $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$.

Производная $\frac{\partial f}{\partial l}$ равна нулю по любому направлению, касательному к поверхности уровня. Она достигает своего наибольшего значения по направлению нормали к поверхности уровня.

4. Градиент функции

Градиентом скалярной функции $f(x, y, z)$ называется вектор, проекции которого на координатные оси Ox, Oy и Oz соответственно равны $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial f}{\partial z}$, т. е.

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\bar{k}. \tag{40,4}$$

На основании этого определения проекции вектора grad f *на координатные оси запишутся так:*

$$(\text{grad } f)_x = \frac{\partial f}{\partial x}; \quad (\text{grad } f)_y = \frac{\partial f}{\partial y}; \quad (\text{grad } f)_z = \frac{\partial f}{\partial z} \tag{40,5}$$

(предполагается при этом, что $f(x, y, z)$ — однозначная непрерывная функция, имеющая непрерывные частные производные).

Модуль вектора grad f *вычисляется по формуле*

$$|\text{grad } f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}. \tag{40,6}$$

Если $\bar{\tau}$ — единичный вектор направления $(\bar{l})$,

$$\bar{\tau} = \cos(l, x)\bar{i} + \cos(l, y)\bar{j} + \cos(l, z)\bar{k},$$

то формула (40,3) запишется так:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = (\text{grad } f \cdot \tau). \tag{40,7}$$

Вектор* grad f *в каждой точке направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через эту точку, в сторону возрастания функции. Скорость изменения скалярной функции f по некоторому *направлению $(\bar{l})$ равна проекции вектора* grad f *на это направление, т. е.*

$$\frac{\partial f}{\partial l} = (\text{grad } f)_l. \tag{40,8}$$

В этом состоит основное свойство градиента функции.

Задача 40,1. Скалярное поле образовано функцией

$$V = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}.$$

Найти поверхности уровня этого поля.

Решение. На основании формулы (40,1) уравнение семейства поверхностей уровня найдем в виде

$$\sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} = c,$$

или

$$R^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2.$$

Отсюда уже получаем окончательно $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 - c^2$. Поверхностями уровня является семейство концентрических сфер.

Задача **40,2.** Найти поверхности уровня скалярного поля

$$v = \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Решение. По формуле (40,1) уравнение семейства поверхностей уровня имеет вид

$$\operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = c.$$

Отсюда

$$\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \operatorname{tg} c,$$

и окончательно

$$z^2 = \operatorname{tg}^2 c\,(x^2 + y^2).$$

Это уравнение семейства круговых конусов с общей вершиной в начале координат. Их общей осью является ось Oz.

Задача **40,3.** Найти производную функции $f(x, y) = x^3 - y^3$ в точке $M(1,1)$ в направлении $\bar{l}$, составляющем угол $\alpha = 60°$ с положительным направлением оси Ox.

Решение. В формуле (40,3)

$$\cos(l, x) = \cos\alpha = \cos 60° = \frac{1}{2};$$

$$\cos(l, y) = \cos(90 - \alpha) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos(l, z) = 0.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2.$$

Подстановка в (40,3) дает

$$\frac{\partial f}{\partial l} = 3x^2 \quad \frac{1}{2} - 3y^2 \quad \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

В точке $M(1,1)$ имеем $x = 1$, $y = 1$. Подставляя эти значения x и y в последнее равенство, будем иметь

$$\frac{\partial f}{\partial l} = 3 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}(1 - \sqrt{3}).$$

Итак, искомая производная

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{3}{2}(1-\sqrt{3}).$$

Задача 40,4. Найти производную функции $f(x, y)=3x^2-6xy+y^2$ в точке $A\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}\right)$ в направлении $\bar{l}$, составляющем угол α с положительным направлением оси Ox. В каком направлении эта производная имеет: а) наибольшее значение; б) наименьшее значение; в) значение, равное нулю?

Найти также градиент этой функции, его модуль и его направляющие косинусы.

Решение. По условию задачи $\cos(l, x)=\cos\alpha$, и тогда

$$\cos(l, y)=\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha.$$

Дальше: $\frac{\partial f}{\partial x}=6x-6y$; $\frac{\partial f}{\partial y}=4y-6x$.

Подстановка в формулу (40,3) дает

$$\frac{\partial f}{\partial l}=(6x-6y)\cos\alpha+(2y-6x)\sin\alpha;$$

в точке $A\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\left[6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\cos\alpha+\left[2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\right]\sin\alpha,$$

т. е. $\frac{\partial f}{\partial l}=\cos\alpha+\sin\alpha$.

Теперь нам надо найти те значения α, при которых $\frac{\partial f}{\partial l}$ имеет значения: а) наибольшее, б) наименьшее, в) равное 0.

Обозначим $u=\cos\alpha+\sin\alpha$ и найдем экстремум этой функции $u'=-\sin\alpha+\cos\alpha$. Из уравнения $-\sin\alpha+\cos\alpha=0$ следует, что $\operatorname{tg}\alpha=1$, а $\alpha=\frac{\pi}{4}+k\pi$.

Считая, что α может изменяться от 0 до 2π, из последней формулы получаем

при $k=0$ $\alpha_1=\frac{\pi}{4}$ при $k=1$ $\alpha_2=\frac{5\pi}{4}$, $u''=-\cos\alpha-\sin\alpha$, и так как $u''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}=-\sqrt{2}$, то при $\alpha_1=\frac{\pi}{4}$ функция u достигает максимума, а вместе с тем и наибольшего значения.

Таким образом, производная $\frac{\partial f}{\partial l}$ нашей функции имеет наибольшее значение по направлению, составляющему с положительным направлением оси Ox угол $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

При $\alpha = \frac{5}{4}\pi$ имеем $u''\left(\frac{5}{4}\pi\right) = \sqrt{2} > 0$. Производная $\frac{\partial f}{\partial l}$ имеет наименьшее значение по направлению, составляющему с положительным направлением оси Ox угол $\alpha = \frac{5}{4}\pi$.

Ответим теперь на последний вопрос задачи: надо найти то значение α, при котором $\frac{\partial f}{\partial l} = 0$, т. е. при котором $\cos\alpha + \sin\alpha = 0$. Решая это уравнение, имеем $\cos\alpha = -\sin\alpha$: $\operatorname{tg}\alpha = -1$ и для α, содержащегося между 0 и 2π, получаем

$$\alpha = \frac{3}{4}\pi \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{7}{4}\pi.$$

Другое решение этой же задачи: мы нашли, что направление наибыстрейшего роста функции составляет с положительным направлением оси Ox угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Известно, что **направление наибыстрейшего роста функции в данной точке совпадает с направлением вектора, являющегося градиентом этой функции,** который определяется формулой (40,4), а длина его находится по формуле (40,6).

Для нашей функции $f(x, y) = 3x^2 - 6xy + y^2$

$$\operatorname{grad} f = (6x - 6y)\cdot\bar{i} + (2y - 6x)\ \bar{j},$$

а в точке $A\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ $(\operatorname{grad} f)_{\substack{x=-\frac{1}{3}\\ y=-\frac{1}{2}}} = \bar{i} + \bar{j}$.

Длина вектора $\operatorname{grad} f$ в этой точке

$$|\operatorname{grad} f| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

а его проекция на оси прямоугольной системы координат равна

$$(\operatorname{grad} f)_x = 1; \quad (\operatorname{grad} f)_y = 1.$$

Известно, что направляющие косинусы вектора $\bar{a}$ находятся по формулам

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|};$$

в нашем случае вектор $\operatorname{grad} f$ в точке $A\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ имеет направляющие косинусы $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Значит, вектор $\operatorname{grad} f$ составляет в точке $A\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ с положительным направлением оси Ox угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Этого и следовало ожидать потому, что этот вектор указывает направление наибыстрейшего роста функции в данной точке, а мы нашли, что производная $\frac{\partial f}{\partial l}$, определяющая скорость изменения функции, достигает своего наибольшего значения именно по направлению $\bar{l}$, составляющему угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$ с положительным направлением оси Ox.

Задача 40,5. Определить производную функции

$$f(x, y, z) = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2$$

в точке $A\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$ в направлении $\bar{l}$, составляющем с осями прямоугольной системы координат Ox, Oy, Oz углы, соответственно равные α, β и γ, градиент этой функции, его величину и направляющие косинусы.

Решение 1. По формуле (40,3) находим производную $\frac{\partial f}{\partial l}$ по указанному в задаче направлению. Чтобы воспользоваться этой формулой, найдем частные производные

$\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial f}{\partial z}$: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x(y^2 + z^2)$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y(x^2 + z^2)$; $\frac{\partial f}{\partial z} = 2z(y^2 + x^2)$.

Подставляя эти значения производных в (40,3), получим

$$\frac{\partial f}{\partial l} = 2x(y^2 + z^2)\cos\alpha + 2y(x^2 + z^2)\cos\beta + 2z(x^2 + y^2)\cos\gamma.$$

В точке $A\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$ значение $\frac{\partial f}{\partial l}$ найдем, подставив в предыдущее равенство $x = y = z = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)_A = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma.$$

2. По формуле (40,4)

$$\operatorname{grad} f = 2x(y^2 + z^2)\bar{i} + 2y(x^2 + z^2)\bar{j} + 2z(x^2 + y^2)\bar{k}.$$

В точке A $(\operatorname{grad} f)_A = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$, а его проекции на координатные оси и его модуль в этой точке равны:

$$(\operatorname{grad} f)_x = (\operatorname{grad} f)_y = (\operatorname{grad} f)_z = 1,$$

$$|\operatorname{grad} f| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

Направляющие косинусы вектора $\operatorname{grad} f$ в точке A равны:

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}};\quad \cos\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}};\quad \cos\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(Контроль: $\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1$).

Эти направляющие косинусы определяют направление наибыстрейшего роста нашей функции в точке A.

Если направление $\bar{l}$, о котором шла речь в задаче, совпадало бы с направлением вектора $\operatorname{grad} f$, то производная $\frac{\partial f}{\partial l}$ достигла бы своего наибольшего значения в этом направлении, и тогда в точке A

$$\left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)_{\max}=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$$

Задача 40,6. Найти $|\operatorname{grad} u|$ и направляющие косинусы градиента в точке $A(x_0, y_0, z_0)$, если функция $u=\frac{1}{r}$,

где
$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Решение. Чтобы воспользоваться формулой (40,6) для определения $\operatorname{grad} u$, нам надо найти $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$. У нас $u=\frac{1}{r}$, а потому проекция градиента этой функции на оси Ox

$$\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_x=\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\ \frac{\partial r}{\partial x},\quad \text{но}\quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

а потому $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}$, и тогда $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\frac{x}{r}$,

или $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{r^3}$.

Аналогично $\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_y=\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{r^3}$; $\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_z=\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{r^3}$.

Пользуясь формулой (40,6), получаем, что

$$|\operatorname{grad} u|=\sqrt{\frac{x^2}{r^6}+\frac{y^2}{r^6}+\frac{z^2}{r^6}}=\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{r^6}}=\sqrt{\frac{r^2}{r^6}}=\frac{1}{r^2}.$$

В точке A $|\operatorname{grad} u|=\frac{1}{r_0^2}$, где

$$r_0^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2.$$

Направляющие косинусы вектора $a=\operatorname{grad}\frac{1}{r}$ найдем по формулам

$$\cos(a, x)=\frac{a_x}{|\bar{a}|}=\frac{\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_x}{\left|\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right|};\quad \cos(\bar{a}\ y)=\frac{a_y}{|\bar{a}|}=$$

$$=\frac{\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_y}{\left|\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right|};\quad \cos(\bar{a}, z)=\frac{a_z}{|\bar{a}|}=\frac{\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_z}{\left|\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right|}.$$

Подставляя в эти формулы найденные значения $\left|\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right|$, $\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_x$, $\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_y$ и $\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_z$, получим

$$\cos(\bar{a}, x) = -\frac{x}{r^5};\ \cos(a, y) = -\frac{y}{r^5};\ \cos(\bar{a}, z) = -\frac{z}{r^5}.$$

Чтобы найти значения направляющих косинусов градиента нашей функции в точке A, надо в последних формулах заменить x, y и z соответственно на x_0, y_0 и z_0, а r — на

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}.$$

СОРОК ПЕРВОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Дифференцирование неявных функций.

1. Если независимая переменная x и функция y связаны уравнением

$$f(x, y) = 0, \tag{41,1}$$

неразрешенным относительно y, то говорят, что y есть неявная функция x (или функция y от x задана неявно). Для того чтобы, не решая уравнение (41,1) относительно y, найти производную от y по x, пользуются формулой

$$y' = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}. \tag{41,2}$$

Чтобы определить вторую производную от y по x, надо переписать (41,2) в виде $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y' = 0$, продифференцировать его по x и в полученном выражении заменить y' уже найденным значением (41,2). Точно так же определяется y''' и т. д.

Запоминать достаточно громоздкие формулы для определения y'' и y''' не имеет смысла. На примерах будет показан метод определения производных высших порядков в рассматриваемом случае.

Задача 41,1. Определить y' и y'', если функция y от x задана неявно уравнением $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, где a — величина постоянная.

Решение. Обозначим левую часть этого уравнения через $f(x, y)$. Чтобы воспользоваться формулой (41,2), найдем $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3ay;\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3ax.$$

Подставляя эти выражения в (41,2), получим после сокращения на 3

$$y' = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}. \tag{41,3}$$

Чтобы определить y'', перепишем равенство (41,3) в таком виде:

$$x^2 - ay + (y^2 - ax) y' = 0. \qquad (41,4)$$

Продифференцируем его по x, помня, что y есть функция от x. Здесь следует применить правило дифференцирования сложной функции. Получим

$$2x - ay' + (2yy' - a) y' + (y^2 - ax) y'' = 0,$$

или

$$2x - 2ay' + 2yy'^2 + (y^2 - ax) y'' = 0.$$

Подставляя сюда вместо y' его значение из (41,3), получим

$$2x - 2a \cdot \left(-\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}\right) + 2y \cdot \left(-\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}\right)^2 + (y^2 - ax) y'' = 0.$$

Отсюда

$$y'' = -\frac{2x + 2a\dfrac{x^2 - ay}{y^2 - ax} + 2y\left(\dfrac{x^2 - ay}{y^2 - ax}\right)^2}{y^2 - ax},$$

или

$$y'' = -\frac{2x(y^2 - ax)^2 + 2a(x^2 - ay)(y^2 - ax) + 2y(x^2 - ay)^2}{(y^2 - ax)^3}.$$

Если в числителе дроби раскрыть скобки и сделать приведение подобных членов, то получится выражение $2xy^4 + 2x^4y - 6ax^2y^2 + 2a^3xy$, которое выгодно переписать в виде $2xy(x^3 + y^3 - 3axy) + 2a^3xy$. Так как по условию $x^3 + y^3 - 3axy$ равняется нулю, то окончательно числитель дроби равен $2a^3xy$, а

$$y'' = -\frac{2a^3xy}{(y^2 - ax)^3}, \text{ или } y'' = \frac{2a^3xy}{(ax - y^2)^3}.$$

Задача 41,2. Функция y от x задана уравнением

$$x^2 - 3xy + 4y^2 - 2x + 3y + 2 = 0.$$

Определить y', y'', y''' при $x = 2$; $y = 0$.

Решение. Обозначим левую часть заданного уравнения через $f(x, y)$. Имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3y - 2; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3x + 8y + 3,$$

и на основании (41,2)

$$y' = -\frac{2x - 3y - 2}{-3x + 8y + 3}. \qquad (41,5)$$

Подставляя вместо x и y их значения, имеем

$$y'(2,0) = -\frac{2}{-3}\,\frac{2-3}{2+8}\,\frac{0-2}{0+3};\; y'(2,\ 0) = \frac{2}{3}.$$

Перепишем (41,5) в виде

$$2x - 3y - 2 - (3x - 7y - 3)\,y' = 0.$$

Продифференцируем это равенство по x, имея опять-таки в виду, что y есть функция x:

$$2 - 3y' - (3 - 8y')\,y' - (3x - 8y - 3)\,y'' = 0. \qquad (41,6)$$

Подставляя сюда вместо x и y их значения, а вместо y' — найденное выше его значение $\left(y' = \frac{2}{3}\right)$, получим

$$2 - 3\cdot\frac{2}{3} - \left(3 - 8\cdot\frac{2}{3}\right)\frac{2}{3} - (3\cdot 2 - 8\cdot 0 - 3)\,y'' = 0,$$

откуда

$$+\frac{14}{9} - 3y'' = 0;\ \text{а}\ y'' = \frac{14}{27}.$$

Для определения y''' продифференцируем опять по x равенство (41,6):

$$-3y'' - (-8y'')\,y' - (3-8y')\,y'' - (3-8y')\,y'' - (3x - 8y - 3)\,y''' = 0.$$

Подставляя сюда данные значения x и y и уже найденные значения y' и y'', получим, что

$$-294 + 243y''' = 0,\ \text{а}\ y''' = \frac{98}{81}.$$

Задача 41,3 (для самостоятельного решения). Кривая определена уравнением $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$.

Определить, в какую сторону направлена вогнутость этой кривой в точке (1,1).

Указание. Направление вогнутости кривой в данной точке определяется знаком второй производной в этой точке. Поэтому следует найти y''.

Ответ. $y' = 0$; $1 + 2y' + y'^2 + (x + y + 1)\,y'' = 0$; $y'' = -\frac{1}{3}$. Кривая в точке (1,1) обращена вогнутостью в сторону отрицательных ординат.

Задача 41,4 (для самостоятельного решения). Найти y''' функции, заданной в предыдущей задаче при тех же значениях x и y.

Указание. Продифференцировать по x полученное при решении предыдущей задачи равенство $1 + 2y' + y'^2 + (x + y + 1)\,y'' = 0$.

Ответ. $y''' = \frac{1}{3}$.

Задача 41,5 (для самостоятельного решения). Функция y от x задана уравнениями:

$$1)\ x\sin y - \cos y + \cos 2y = 0,$$
$$2)\ y\sin x - \cos(x - y) = 0,$$
$$3)\ \sin x \ln y + \cos y \ln x = 0.$$

Найти y'.

Ответ. 1) $y' = -\dfrac{\sin y}{x\cos y + \sin y - 2\sin 2y}$;

2) $y' = \dfrac{y\cos x + \sin(x - y)}{\sin(x - y) - \sin x}$,

3) $y' = \dfrac{\cos x \ln y + \frac{1}{x}\cos y}{\sin y \ln x - \frac{1}{y}\sin x}$.

Задача 41,6. (для самостоятельного решения). Кривая определена уравнением

$$x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x + 4y + 1 = 0.$$

В точке $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ на ней определить уравнение касательной нормали, направление вогнутости, а также y'''.

Ответ. Уравнение касательной $2y + 1 = 0$; уравнение нормали $2x - 1 = 0$; $y'' = 1$. Кривая обращена вогнутостью в сторону положительных ординат; $y''' = -3$.

Указание 1. Касательная к кривой $f(x, y) = 0$ в точке $P(x_0, y_0)$ определяется уравнением $y - y_0 = y'(x_0, y_0)(x - x_0)$, а нормаль

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0, y_0)}(x - x_0).$$

1. Если функция z от двух независимых переменных x и y задается уравнением

$$f(x, y, z) = 0, \tag{41,7}$$

не разрешенным относительно z, то говорят, что z есть неявная функция переменных x и y. В этом случае частные производные функции z по независимым переменным x и y определяются по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}};\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}. \tag{41,8}$$

На примерах будет показано, как можно определить в рассматриваемом случае производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, не прибегая к готовым формулам (41,8).

На примерах будет также показан и метод определения частных производных

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Задача 41,7. Функция z независимых переменных x и y задана уравнением $x^2+y^2+z^2=a^2$. Определить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Решение. Первый способ. Перенесем a^2 в левую часть данного уравнения и обозначим ее через $f(x, y, z)$. Тогда $f(x, y, z) = x^2+y^2+z^2-a^2=0$;

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x;\quad \frac{\partial f}{\partial y}=2y;\quad \frac{\partial f}{\partial z}=2z.$$

Подставляя эти значения в (41,8), будем иметь:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x}{2z}=-\frac{x}{z};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2y}{2z}=-\frac{y}{z}.$$

Второй способ. Продифференцируем данное уравнение и получим

$$2xdx+2ydy+2zdz=0,$$

отсюда

$$dz=-\frac{x}{z}dx-\frac{y}{z}dy. \tag{41,9}$$

С другой стороны, мы знаем, что дифференциал функции $z = \varphi(x, y)$ вычисляется по формуле

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{41,10}$$

Сравнивая формулу (41,10) с выражением (41,9), мы заключаем, что

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z};$$

таким образом, мы определили искомые производные, не прибегая к готовым формулам (41,8).

Задача 41,8. Функция z независимых переменных x и y задана неявно уравнением $4x^2+2y^2-3z^2+xy-yz+x-4=0$. Определить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ при $x=1$; $y=1$; $z=1$.

Решение. Первый способ. Обозначим левую часть уравнения через $f(x, y, z.)$ Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x}=8x+y+1;\quad \frac{\partial f}{\partial y}=4y+x-z;\quad \frac{\partial f}{\partial z}=-6z-y.$$

По формулам (41,8) получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{8x+4y+1}{6z+y};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x+4y-z}{6z+y}. \tag{41,11}$$

Подставляя сюда значения $x=1$; $y=1$; $z=1$, получим, что

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{13}{7}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{4}{7}.$$

Второй способ. Дифференцируя заданное уравнение, получаем

$$8xdx+4ydy-6zdz+xdy+ydx-ydz-zdy+dx=0,$$

или

$$(8x+y+1)\,dx+(4y+x-z)\,dy+(-6z-y)\,dz=0,$$

откуда

$$dz=\frac{8x+y+1}{6z+y}dx+\frac{x+4y-z}{6z+y}dy;$$

сравнение с формулой (41,10) показывает, что

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{8x+y+1}{6z+y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x+4y-z}{6z+y},$$

что совпадает с выражениями (41,11), полученными раньше.

Задача 41,9 (для самостоятельного решения). Функция z независимых переменных x и y задана уравнениями:

$$1)\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0, \quad 2)\ \frac{z^2}{p}+\frac{y^2}{q}-2z=0.$$

$$3)\ xy+xz+yz=1$$

Определить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$. Решение провести двумя способами.

Ответ. 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c^2x}{a^2z}$; $\frac{\partial z}{dy}=-\frac{c^2y}{b^2z}$;

2) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{p}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{q}$;

3) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y+z}{x+y}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x+z}{x+y}$.

Задача 41,10. Из уравнения, заданного в задаче 41,7, определить вторые производные.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} \text{ и } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Решение. В указанной задаче было получено, что

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z}, \text{ а } \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1\cdot z-\frac{\partial z}{\partial x}\ x}{z^2}.$$

Подставляя сюда значение $\frac{\partial z}{\partial x}$ получим, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{z - \left(-\frac{x}{z}\right)x}{z^2} = -\frac{z^2 + x^2}{z^3}.$$

Дифференцируя по y выражение $\frac{\partial z}{\partial x}$ и учитывая, что при дифференцировании по y переменная x, стоящая в числителе, рассматривается как величина постоянная (так как x и y — независимые переменные, то x не зависит от y), получаем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{x}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{z^2}\left(-\frac{y}{z}\right) = -\frac{xy}{z^3}.$$

Аналогично находим, что $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{y^2 + z^2}{z^3}$.

Задачи 41,11. Из уравнения $f(x, y, z) = 0$, в котором x рассматривается как функция независимых переменных y и z, определить $\frac{\partial x}{\partial y}$ и $\frac{\partial x}{\partial z}$.

Решение. Дифференцируя данное уравнение, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0,$$

откуда следует, что

$$dx = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}dy - \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial x}}dz.$$

С другой стороны, если x есть функция y и z:

$$x = x(y, z), \text{ то } dx = \frac{\partial x}{\partial y}dy + \frac{\partial x}{\partial z}dz.$$

Сравнивая последнее равенство с предыдущим, получим, что

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}; \quad \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial x}}.$$

Задача 41,12 (для самостоятельного решения). Из уравнения $f(x, y, z) = 0$, в котором y рассматривается как функция независимых переменных x и z, определить

$$\frac{\partial y}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial y}{\partial z}.$$

Ответ. $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$; $\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$.

СОРОК ВТОРОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Экстремум функции нескольких независимых переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции двух независимых переменных.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Экстремум функции

***Определение* 1.** *Функция $u = f(x, y, z, \ldots, v)$ при некоторой системе значений $x_0, y_0, z_0, \ldots, v_0$ независимых переменных имеет максимум (минимум), если приращение функции*

$$\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z, \ldots, v_0 + \Delta v) - f(x_0, y_0, \ldots, v_0)$$

отрицательно (положительно) при всевозможных, достаточно малых по абсолютной величине как положительных, так и отрицательных значениях

$$\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots, \Delta v.$$

Максимум или минимум функции называется ее экстремумом.

Необходимые условия экстремума

Если функция $u = f(x, y, z, \ldots, v)$ достигает экстремума при значениях независимых переменных $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $\ldots$, $v = v_0$ $\ldots$, то при этих значениях или выполняются равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0; \ \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \ \frac{\partial u}{\partial z} = 0; \ \ldots; \ \frac{\partial u}{\partial v} = 0, \qquad (42,1)$$

или частные производные при этих значениях не существуют.

Иначе: ***в точке экстремума первый дифференциал функции равен нулю или не существует. Количество уравнений (42,1) равно числу независимых переменных.***

Точки, в которых выполняются равенства (42,1), называются стационарными точками функции.

Равенства (42,1) выражают необходимое, но недостаточное условие экстремума функции нескольких независимых переменных. Это значит, что не при всех тех значениях независимых переменных, при которых эти равенства выполняются, функция имеет экстремум.

Достаточные условия экстремума

Для того чтобы решить вопрос, какие из значений независимых переменных, получаемых из уравнений (42,1), доставляют функции максимум или минимум, или ни то, ни другое, обращаются к исследованию дифференциала второго порядка этой функции.

Если при значениях независимых переменных, найденных из уравнений (42,1), дифференциал второго порядка функции сохраняет постоянный знак при всевозможных достаточно малых по абсолютной величине приращениях независимых переменных, то функция при этих значениях имеет экстремум, причем максимум будет в том случае, когда дифференциал второго порядка отрицателен, а минимум — когда он положителен.

Если дифференциал второго порядка при значениях независимых переменных, найденных из системы уравнений (42,1), не сохраняет постоянного знака, то для этих значений функция не имеет ни максимума, ни минимума.

Если же окажется, что при этих значениях дифференциал второго порядка обратится в нуль, то решение вопроса об экстремуме требует исследование дифференциалов порядка выше, чем второй.

Правило определения экстремума функции двух независимых переменных

Чтобы определить экстремум функции $z = f(x, y)$, двух независимых переменных следует:

1) Определить стационарные точки, в которых функция может достигать экстремума, для чего надо решить систему уравнений

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial z}{xy} = 0;$$

Определить вторые частные производные

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

3) Вычислить значения вторых частных производных в каждой стационарной точке, а полученные числа обозначить соответственно через A, B и C.

4) Составить выражение $\Delta = AC - B^2$. При этом,

а) если $\Delta > 0$, то экстремум в стационарной точке есть: если $A > 0$, то будет минимум, а при $A < 0$ — максимум;

б) если $\Delta < 0$, то экстремума в рассматриваемой стационарной точке нет;

в) если $\Delta = 0$, то имеет место сомнительный случай, и для заключения об экстремуме надо привлечь к рассмотрению частные производные порядка выше второго (этот случай в программу не входит и нами не рассматривается).

Задача 42,1. Исследовать на экстремум функцию

$$z = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430.$$

Решение. Прежде всего определяем $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 36y; \ \frac{\partial z}{\partial y} = 6y^2 - 36x. \quad (42,2)$$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (42,1)$$

которая в нашем случае запишется так:

$$\begin{cases} 6x^2 - 36y = 0, \\ 6y^2 - 36x = 0; \end{cases}$$

после сокращения на 6 имеем

$$\begin{cases} x^2 - 6y = 0, \\ y^2 - 6x = 0. \end{cases} \quad (42,3)$$

Из первого уравнения $y = \frac{x^2}{6}$. Подставляя его во второе уравнение, получим $\frac{x^4}{36} - 6x = 0$, или $x^4 - 216x = 0$, которое перепишем так:

$$x(x^3 - 216) = 0.$$

Разлагая на множители выражение в скобках, получим уравнение $x(x-6)(x^2+6x+36) = 0$.

Отсюда следует, что $x_1 = 0$; $x_2 = 6$, а остальные два корня — комплексные, которые нас не интересуют (это корни уравнения $x^2 + 6x + 36 = 0$).

Подставляя эти значения x в равенство $y = \frac{x^2}{6}$, получаем, что $y_1 = 0$; $y_2 = 6$.

Итак, есть две пары решений системы уравнений (42,3):

$$1) \ x_1 = 0; \ y_1 = 0; \ 2) \ x_2 = 6; \ y_2 = 6.$$

Теперь определим число Δ, для чего найдем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \ \text{и} \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Из (42,2) получаем, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x; \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -36; \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y,$$

Подставим теперь сюда сначала первую пару решений, а потом вторую и определим числа A, B, C и Δ.

Для первой пары решений:

$$A=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}=0;\quad B=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}=-36;\quad C=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}=0,$$

а потому число $\Delta=AC-B^2=-36$.

Так как $\Delta<0$, то при $x=0$; $y=0$ функция не имеет ни максимума, ни минимума.

Для второй пары решений:

$$A=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=6\\y=6}}=72;\quad B=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)_{\substack{x=6\\y=6}}=-36;\quad C=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=6\\y=6}}=72.$$

Теперь число $\Delta=AC-B^2=72\cdot 72-36^2=3888$, и так как оно положительно, то экстремум при значениях $x=6$; $y=6$ есть. Учитывая, что A — число положительное, заключаем, что при этих значениях x и y имеет место минимум. Чтобы определить минимальное значение функции, подставим в нее $x=6$, $y=6$ и получим $z_{\min}=-2$.

Замечание. Из $\Delta>0$ следует, что $AC-B^2>0$, $AC>B^2$, т. е. $AC>0$, а это означает, что A и C в случае, когда функция имеет экстремум, имеют один и тот же знак.

При решении этого примера читатель усмотрел, что не все значения независимых переменных, которые получаются при решениях системы (42,1), доставляют функции экстремум. Так, значения $x=0$ и $y=0$, хотя и являются решениями системы (42,1), но при них функция не имеет ни максимума, ни минимума (экстремума нет).

Задача 42,2. Исследовать на экстремум функцию

$$z=14x^3+27xy^2-69x-54y.$$

Решение. Находим прежде всего $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=42x^2+27y^2-69;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=54xy-54. \tag{42,4}$$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases}42x^2+27y^2-69=0,\\ 54xy-54=0.\end{cases}$$

После очевидных сокращений эта система запишется так:

$$\begin{cases}14x^2+9y^2=23,\\ xy=1.\end{cases}$$

Решая эту систему, получим 4 пары решений, при которых исследуемая функция может иметь экстремум.

Первая пара: $x_1 = 1$; $y_1 = 1$; вторая пара: $x_2 = \frac{3}{\sqrt{14}}$; $y_2 = \frac{\sqrt{14}}{3}$; третья пара: $x_3 = -1$; $y_3 = -1$; четвертая пара: $x_4 = \frac{-3}{\sqrt{14}}$; $y_4 = -\frac{\sqrt{14}}{3}$.

Теперь определим, какие именно из этих значений доставляют функции экстремум.

Определим из (42,4) вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 84x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 54y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 54x.$$

Для каждой пары значений определим числа A, B и C и число Δ.

1. Для $x_1 = 1$; $y_1 = 1$ имеем

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=1\\y=1}} = 84; \quad B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{\substack{x=1\\y=1}} = 54; \quad C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=1\\y=1}} = 54.$$

Число $\Delta = AC - B^2 = 84 \cdot 54 - 54^2 > 0$.

Экстремум есть, а так как $A > 0$, то имеет место минимум

$$z_{\min} = 14 \cdot 1 + 27 \cdot 1 \cdot 1 - 69 - 54 = -82.$$

2. Для $x_2 = \frac{3}{\sqrt{14}}$; $y_2 = \frac{\sqrt{14}}{3}$

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=x_2\\y=y_2}} = \frac{252}{\sqrt{14}}; \quad B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{\substack{x=x_2\\y=y_2}} = 18\sqrt{14}$$

$$C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=x_2\\y=y_2}} = \frac{162}{\sqrt{14}}; \quad \Delta = AC - B^2 = \frac{252}{\sqrt{14}}\frac{162}{\sqrt{14}} - (18\sqrt{14})^2 < 0,$$

и при $x = \frac{3}{\sqrt{14}}$; $y = \frac{\sqrt{14}}{3}$ экстремума нет.

3. Для $x_3 = -1$; $y_3 = -1$

$$A = -84; \quad B = -54; \quad C = -54;$$

$$\Delta = AC - B^2 = (-84)(-54) - (-54)^2 > 0.$$

Экстремум есть, и именно максимум, так как $A = -84 < 0$;

$$z_{\max} = -14 - 27 + 69 + 54 = 82.$$

4. Для $x_4 = -\frac{3}{\sqrt{14}}$; $y_4 = -\frac{\sqrt{14}}{3}$ имеем

$$A = -\frac{252}{\sqrt{14}}; \quad B = -18\sqrt{14}; \quad C = -\frac{162}{\sqrt{14}};$$

$$\Delta = AC - B^2 = \left(-\frac{252}{\sqrt{14}}\right)\left(-\frac{162}{\sqrt{14}}\right) - (-18\sqrt{14})^2 < 0.$$

Экстремума при значениях $x = x_4$ и $y = y_4$ нет.

Задача 42,3 (для самостоятельного решения). Исследовать на экстремум функцию

$$z = \frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2} - 4x - 5y.$$

Ответ. Экстремума нет.

Задача 42,4 (для самостоятельного решения). Исследовать на экстремум функцию $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

Указание. Система уравнений $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ приведет к системе уравнений

$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0, \\ y^3 + x - y = 0. \end{cases}$$

Почленное слсжение даст уравнение $x^3 + y^3 = 0$, откуда следует, что $y = -x$.

Подставляя в первое уравнение, получим $x^3 - 2x = 0$, откуда $x_1 = 0$; $x_2 = \sqrt{2}$; $x_3 = -\sqrt{2}$, а $y_1 = 0$; $y_2 = -\sqrt{2}$; $y_3 = \sqrt{2}$.

Имеем три пары решений: 1) $x_1 = 0$; $y_1 = 0$; 2) $x_2 = \sqrt{2}$; $y_2 = -\sqrt{2}$; 3) $x_3 = -\sqrt{2}$; $y_3 = \sqrt{2}$.

Ответ. $z_{\min} = -8$ при $x_2 = \sqrt{2}$, $y_2 = -\sqrt{2}$ и при $x_3 = -\sqrt{2}$, $y_3 = \sqrt{2}$. Вопрос об экстремуме при $x = 0$, $y = 0$ остается открытым.

Задача 42,5 (для самостоятельного решения). Исследовать на экстремум функции: 1) $z = x^3y^2(12 - x - y)$; 2) $z = xy(xy(x+y-1)$; 3) $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$.

Ответ. 1) Максимум при $x = 6$; $y = 4$; $z_{\max} = 6912$;

2) минимум при $x = \frac{1}{3}$; $y = \frac{1}{3}$; $z_{\min} = -\frac{1}{27}$;

3) минимум при $x = 5$; $y = 6$; $z_{\min} = -86$.

Задача 42,6. Найти экстремум функции

$$u = x^2 + y^2 + z^2 + xy - x + y - 2z.$$

Решение. Здесь мы имеем дело с функцией трех независимых переменных. Определим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y - 1; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + x + 1; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z - 2$$

и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0, \\ 2y + x + 1 = 0, \\ 2z - 2 = 0; \end{cases}$$

получаем $x = 1$; $y = -1$; $z = 1$.

Значит, при этих значениях независимых переменных возможен экстремум.

Для того чтобы сделать заключение, будет ли он, надо обратиться к исследованию дифференциала второго порядка этой функции. Известно, что дифференциал первого порядка

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Дифференциал второго порядка читатель определит самостоятельно и получит, что

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dxdy + {}$$
$$+ 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dxdz + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dydz.$$

У нас

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0,$$

а потому

$$d^2u = 2dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2 + 2dxdy = 2(dx^2 + dxdy + dy^2) + 2dz^2.$$

Выражение, стоящее в скобке, не отрицательно при любых dx и dy: $(a^2 + b^2) \geqslant -ab$, а последнее слагаемое положительно.

Таким образом, $d^2u > 0$ при любых dx, dy и dz.

Тем самым мы доказали, что при $x = 1$; $y = -1$ и $z = 1$ функция u достигает минимума, а $u_{\min} = -2$.

Задача 42,7 (для самостоятельного решения). Определить экстремум функции $u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.

Ответ. При $x = -\frac{2}{3}$; $y = -\frac{1}{3}$; $z = 1$ функция достигает минимума, а $u_{\min} = -\frac{4}{3}$.

2. Отыскание наибольших и наименьших значений функции двух независимых переменных в замкнутой области

Функция ограниченная и дифференцируемая в замкнутой области достигает в этой области своего наибольшего и наименьшего значения или во внутренних точках этой области, которые являются точками стационарности функции, или на ее границе.

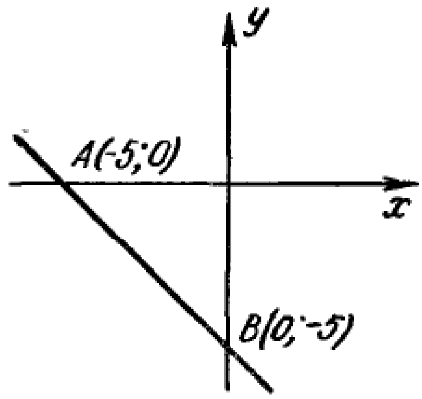
Для того чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции, надо: 1) Найти стационарные точки функции, для чего следует решить систему уравнений $\frac{\partial z}{\partial x}=0$; $\frac{\partial z}{\partial y}=0$;

2) вычислить в стационарных точках значения функции; 3) найти наибольшее и наименьшее значение функции на каждой линии, ограничивающей область; 4) сравнить все полученные значения. Наибольшее из них будет наибольшим, а наименьшее — наименьшим значением функции в замкнутой области.

Задача 42,8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$$

в замкнутом треугольнике, ограниченном осями координат и прямой $x + y + 5 = 0$ (фиг. 42,1).



Фиг. 42,1.

Решение. 1) Находим стационарные точки функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 3; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 4y + 2.$$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ -x + 4y + 2 = 0 \end{cases}$$

и находим, что $x = -2$; $y = -1$. Итак, имеется одна стационарная точка $(-2, -1)$.

2) Определяем значение функции в этой точке:

$$z(-2, -1) = -3$$

(запись $z(-2, -1)$ означает, что ищется значение функции $z = z(x, y)$ при $x = -2$, $y = -1$).

3) Переходим к исследованию функции на границах области, которая состоит из отрезка оси Ox, отрезка оси Oy и отрезка AB прямой.

а) На оси Ox $y = 0$, а заданная функция принимает при $y = 0$ такой вид: $z = x^2 + 3x + 1$ $(-5 \leqslant x \leqslant 0)$..

Эта функция должна быть рассмотрена на отрезке $[-5,0]$. Так как на этом отрезке функция z непрерывна, то она достигает на нем как наибольшего, так и наименьшего своего значения. Это может произойти или в точках стационарности функции, где $\frac{dz}{dx} = 0$, или на концах рассматриваемого отрезка.

Определим прежде всего точку стационарности

$$\frac{dz}{dx} = 2x + 3; \quad 2x + 3 = 0; \quad x = -\frac{3}{2}.$$

Определим значение функции при $x = -\frac{3}{2}$ и на концах отрезка $[-5,0]$:

$$z\left(-\frac{3}{2},\ 0\right) = -\frac{5}{4};\quad z[-5,0] = 11,\quad z[0,0] = 1.$$

Сравнение показывает, что $(z_{\text{наиб.}})_{OA} = 11$; $(z_{\text{наим.}})_{OA} = -\frac{5}{4}$.

б) На оси Oy: $x = 0$, а данная функция при $x = 0$ запишется так:

$$z = 2y^2 + 2y + 1 \quad (-5 \leqslant y \leqslant 0).$$

Эта функция — функция одной независимой переменной. Она должна быть рассмотрена на отрезке $[-5,0]$ (см. фиг. 42,*1*). Определим на этом отрезке ее наименьшее и наибольшее значения, которые в силу непрерывности должны существовать. Прежде всего определяем точки стационарности функции:

$$\frac{dz}{dy} = 4y + 2;\quad 4y + 2 = 0;\quad y = -\frac{1}{2}.$$

Определим значение функции при $y = -\frac{1}{2}$, а также на концах рассматриваемого отрезка:

$$z\left(0,\ -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2};\ z(0,\ -5) = 41;\ z(0,\ 0) = 1;$$

$$(z_{\text{наиб.}})_{OB} = 41;\quad (z_{\text{наим.}})_{OB} = \frac{1}{2}.$$

в) Наконец, исследуем данную функцию на отрезке прямой AB, принадлежащем границе области.

Уравнение прямой AB $x + y + 5 = 0$. Поэтому на ней $y = -x - 5$.

Подставляя это значение y в заданную функцию, получаем

$$z = 4x^2 + 26x + 41.$$

Наибольшее и наименьшее значение этой функции должно быть определено для значений $-5 \leqslant x \leqslant 0$:

$$\frac{dz}{dx} = 8x + 26;\quad 8x + 26 = 0;\quad x = -\frac{13}{4}.$$

Находим соответствующее значение y. Из $y = -x - 5$ следует, что

$$y = -\left(-\frac{13}{4}\right) - 5 = \frac{13}{4} - 5 = -\frac{7}{4}.$$

Итак, рассмотрению подлежит точка $\left(-\frac{13}{4}, -\frac{7}{4}\right)$ (надо следить за тем, чтобы исследуемые точки принадлежали рассматриваемой области):

$$z\left(-\frac{13}{4}, -\frac{7}{4}\right) = -\frac{5}{4}; \quad z(-5,\ 0) = 11; \quad z(-5,\ 0) = 41;$$

$$(z_{\text{наиб.}})_{AB} = 41; \quad (z_{\text{наим.}})_{AB} = -\frac{5}{4}.$$

Сравнивая теперь значение функции z в стационарной точке $(-2,\ -1)$ с наибольшими и наименьшими значениями на отрезках OA, OB и AB, найденными в пунктах а), б) и в), усматриваем, что в заданной замкнутой области

$$z_{\text{наиб.}} = z(0,\ -5) = 41,$$
$$z_{\text{наим.}} = z(-2,\ -1) = -3;$$

таким образом, оказалось, что наименьшего своего значения функция достигла в стационарной точке $(-2,\ -1)$, а наибольшего — на границе области, в точке $(0,\ -5)$.

Задача 42,9 (для самостоятельного решения). Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$ в прямоугольнике с вершинами: $A(1,\ -3)$; $B(1,\ 2)$; $C(4,\ 2)$; $D(4,\ -3)$

$$(1 \leqslant x \leqslant 4); \quad (-3 \leqslant y \leqslant 2).$$

Указания. В стационарной точке $(3,\ -2)$ $z(3,\ -2) = -11$. Рассматривая границу области, получаем: 1) На отрезке AB: $z = z(1,\ y) = y^2 + 4y - 3$. Наибольшего значения на AB функция достигает в точке $B(1,\ 2)$ и $(z_{\text{наиб.}})_{AB} = 9$, а наименьшее ее значение на AB в точке $(1,\ -2)$ и $(z_{\text{наим.}})_{AB} = -7$;

2) на отрезке CD: $z = z(4,\ y) = y^2 + 4y - 6$. На CD наибольшего значения функция достигает в точке $C(4,\ 2)$ и $(z_{\text{наиб.}})_{CD} = 6$, а наименьшее ее значение в точке $(4,\ -2)$ и $(z_{\text{наим.}})_{CD} = -10$;

3) на отрезке $BC: z = z(x,\ 2) = x^2 - 6x + 14$; наибольшего значения функция достигает в точке $B(1,\ 2)$, а $(z_{\text{наиб.}})_{BC} = 9$; $(z_{\text{наим.}})_{BC} = 5$;

4) на отрезке AD: $z = z(x - 3) = x^2 - 6x - 1$; $(z_{\text{наиб.}})_{AD} = -6$; $(z_{\text{наим.}})_{AD} = -10$.

Сравнить полученное значение функции в стационарной точке $(3,\ -2)$ с ее наибольшими и наименьшими значениями на границе области.

Ответ. В рассматриваемой области функция достигает наименьшего значения в стационарной точке: $z_{\text{наим.}} = -11$. Наибольшего значения функция достигает на отрезке AB в точке $(1,\ 2)$ и $z_{\text{наиб.}} = 9$.

Задача 42,10 (для самостоятельного решения). Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy(x + y + 1)$ в замкнутой области, ограниченной линиями $y = \frac{1}{x}$; $x = 1$; $x = 2$; $y = -\frac{3}{2}$.

Ответ. Стационарные точки: $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$; $(0, -1)$; $(-1, 0)$; $(0, 0)$ находятся вне рассматриваемой области. Наибольшего значения функция достигает на границе области в точке $\left(2, \frac{1}{2}\right)$; а $z_{\text{наиб.}} = 3{,}5$. Наименьшего значения функция достигает в точке $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$, а $z_{\text{наим.}} = -4{,}5$.

Задача 42,11 (для самостоятельного решения). Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = \cos x \cos y \cos(x + y)$ в замкнутом квадрате, ограниченном линиями $x = 0$; $x = \pi$; $y = 0$, $y = \pi$.

Указания. 1) После определения частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ их выгодно представить в виде:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2}[\sin(2x + 2y) + \sin 2x];$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2}[\sin(2x + 2y) + \sin 2y].$$

2) Из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{2}[\sin(2x + 2y) + \sin 2x] = 0 \\ -\frac{1}{2}[\sin(2x + 2y) + \sin 2y] = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

следует, что $\sin 2x = \sin 2y$, и тогда $2\cos(x + y)\sin(x - y) = 0$. Отсюда получаем, что

$$x - y = k\pi, \qquad (B)$$

$$x + y = \frac{\pi}{2}(2k + 1), \qquad (C)$$

где k — любое целое число. Но условие задачи требует, чтобы выполнялись неравенства $0 \leqslant x \leqslant \pi$; $0 \leqslant y \leqslant \pi$, а потому должно быть $-\pi \leqslant x - y \leqslant \pi$ и $0 \leqslant x + y \leqslant 2\pi$; поэтому в (B) можно брать $k = -1$; $k = 0$ и $k = 1$, а в (C) $k = 0$ и $k = 1$.

$$\begin{cases} x - y = 0, & \text{откуда } y = x; \\ x - y = -\pi, & \quad » \quad y = x + \pi; \\ x - y = \pi, & \quad » \quad y = x - \pi; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} & \quad » \quad y = \frac{\pi}{2} - x; \\ x + y = \frac{3\pi}{2} & \quad » \quad y = \frac{3\pi}{2} - x. \end{cases}$$

Подставляя в первое уравнение системы (A) первые три значения y, получим уравнение $\sin 4x + \sin 2x = 0$, а подстановка в это же уравнение последних двух значений y приводит к уравнению $\sin 2x = 0$.

Из этих уравнений находим стационарные точки:

$$(0,\ 0)\ (0,\ \pi): \left(\frac{\pi}{3}\ \ \frac{\pi}{3}\right);\ \left(\frac{2}{3}\pi,\ \frac{2}{3}\pi\right);\ (\pi,\ \pi); \left(\frac{\pi}{2},\ \ \frac{\pi}{2}\right);\ \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right);\ \left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right);\ \left(\pi,\ \frac{\pi}{2}\right);\ (\pi,\ 0)$$

(решения, находящиеся вне данного квадрата, отброшены).

3) Теперь следует отобрать из стационарных точек те, которые лежат внутри квадрата;

$$\left(\frac{\pi}{3},\ \ \frac{\pi}{3}\right),\ \left(\frac{2}{3}\pi,\ \frac{2}{3}\pi\right);\ \left(\frac{\pi}{2},\ \ \frac{\pi}{2}\right).$$

4) На прямой $y = 0$ имеем $f(x,\ 0) = \cos^2 x$,
» » $y = \pi$ имеем $f(x,\ \pi) = \cos^2 x$,
» » $x = 0$ имеем $f(0,\ y) = \cos^2 y$,
» » $x = \pi$ имеем $f(\pi,\ y) = \cos^2 y$.

На каждой из этих прямых наибольшее значение функции равно 1, а наименьшее — нулю. Наибольшее значение функция имеет в вершинах квадрата, а наименьшее, равное нулю. — в точках $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right);\ \left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right);\ \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right);\ \left(\pi,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ. Наибольшего значения функция достигает в вершинах квадрата и $z_{\text{наиб}} = 1$; наименьшего — в стационарных точках

$$\left(\frac{\pi}{3},\ \ \frac{\pi}{3}\right);\ \text{и}\ \left(\frac{2}{3}\pi,\ \frac{2}{3}\pi\right)\ \text{и}\ z_{\text{наим}} = -\frac{1}{8}.$$

Задача 42,12. Доказать, что из всех треугольников, имеющих данный периметр $2p$ наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

Решение. Обозначим стороны треугольника через x, y и z. По формуле Герона площадь треугольника

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

Замечая, что $z = 2p - x - y$, мы получим S как функцию только двух независимых переменных,

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}.$$

Вместо того, чтобы искать экстремум этой функции, будем искать экстримум ее квадрата

$$f(x,\ y) = S^2 = p(p-x)(p-y)(x+y-p);$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p(p-y)(2p-2x-y);\quad \frac{\partial f}{\partial y} = p(p-x)(2p-2y-x).$$

Решаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} p(p-y)(2p-2x-y)=0 \\ p(p-x)(2p-2y-x)=0 \end{aligned}\right\}.$$

Эта система приводит к таким четырем системам:

$$1)\ \left.\begin{aligned} p-y=0 \\ p-x=0 \end{aligned}\right\}, \qquad 2)\ \left.\begin{aligned} 2p-2x-y=0 \\ 2p-2y-x=0 \end{aligned}\right\},$$

$$3)\ \left.\begin{aligned} 2p-2x-y=0 \\ p-x=0 \end{aligned}\right\}, \qquad 4)\ \left.\begin{aligned} 2p-2y-x=0 \\ p-y=0 \end{aligned}\right\}.$$

Находим стационарные точки:

$$(p,\ p);\ \left(\frac{2}{3}p,\ \frac{2}{3}p\right);\ (p,\ 0);\ (0,\ p).$$

Исследованию подлежит только одна точка $M\left(\frac{2}{3}p,\ \frac{2}{3}p\right)$, так как остальные точки не удовлетворяют смыслу задачи: не может быть треугольника, у которого сторона равна половине периметра.

Исследуем на экстремум точку $M\left(\frac{2}{3}p,\ \frac{2}{3}p\right)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2p(p-y);\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2p(p-x);\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=p(2x+2y-3p);$$

$$A=\left(\frac{d^2 f}{\partial x^2}\right)_M=-\frac{2}{3}p^2;\ B=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_M=-\frac{1}{3}p^2;$$

$$C=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_M=-\frac{2}{3}p^2;$$

$$\Delta=AC-B^2=\left(-\frac{2}{3}p^2\right)\left(-\frac{2}{3}p^2\right)-\left(-\frac{1}{3}p^2\right)^2 p^2=$$

$$=\frac{4}{9}p^4-\frac{1}{9}p^4=\frac{1}{3}p^4>0;$$

$\Delta>0$, а так как $A<0$, то в исследуемой точке функция достигает максимума. Итак, в единственной стационарной точке функция достигает максимума, а потому и наибольшего значения: таким образом, при $x=\frac{2}{3}p$, $y=\frac{2}{3}p$ функция достигает и наибольшего значения. Но тогда $z=2p-x-y=\frac{2}{3}p$. А так как $x=y=z$, то треугольник — равносторонний.

Задача 42,13. Канал, подводящий воду к турбине, имеет в сечении равнобедренную трапецию, площадь которой задана и равна S. Определить глубину канала и угол α откоса так, чтобы периметр, смоченный водой, был наименьшим*.

---

* Периметр, смоченный нодой называется «мокрым», Он нлияет на трение, и от его неличины зависят расходы на сооружение канала.

Решение. «Мокрый» периметр обозначим буквой L, и тогда (фиг. 42,2) $L = AB + BC + CD$. Так как $h = CD\sin\alpha$, то $CD = AB = \frac{h}{\sin\alpha}$. Учитывая, что $BC = a$, получаем, что $L = a + \frac{2h}{\sin\alpha}$.

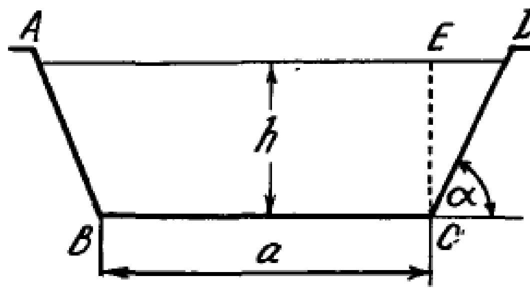
Таким образом, L есть функция трех независимых переменных: a, h и α. Условие задачи позволяет одну из переменных исключить. Требуется, чтобы площадь сечения была постоянна и равна S. В трапеции $S = \frac{BC + AD}{2}h$. Но $BC = a$, а $AD = BC + 2ED = a + 2h\operatorname{ctg}\alpha$, а потому

$$S = \frac{2a + 2h\operatorname{ctg}\alpha}{2}h;$$

$$S = (a + h\operatorname{ctg}\alpha)h;$$

откуда следует, что

$$a = \frac{S}{h} - h\operatorname{ctg}\alpha,$$



Фиг. 42,2

и для L получаем формулу

$$L = \frac{S}{h} - h\operatorname{ctg}\alpha + \frac{2h}{\sin\alpha},$$

в которой только две независимых переменных — h и α. (S — величина постоянная).

Находим

$$\frac{\partial L}{\partial h} = -\frac{S}{h^2} - \operatorname{ctg}\alpha + \frac{2}{\sin\alpha}; \quad \frac{\partial L}{\partial \alpha} = h\operatorname{cosec}^2\alpha - \frac{2h\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

и решаем систему двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{S}{h^2} - \operatorname{ctg}\alpha + \frac{2}{\sin\alpha} = 0 \\ h\operatorname{cosec}^2\alpha - \frac{2h\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = 0 \end{aligned}\right\};$$

после упрощений эта система запишется так:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{S}{h^2} + \frac{2 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = 0 \\ \frac{h(1 - 2\cos\alpha)}{\sin^2\alpha} = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Из второго уравнения следует, что $h(1 - 2\cos\alpha) = 0$, откуда или $h = 0$, или $1 - 2\cos\alpha = 0$. Но глубина h не может быть равна нулю, а потому остается только $1 - 2\cos\alpha = 0$ или $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, а $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Найденное значение α подставим в первое уравнение и получим

$$-\frac{S}{h^2}+\frac{2-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=0;\ \frac{S}{h^2}=\sqrt{3};\ h^2=\frac{S}{\sqrt{3}},\ \text{а}\ h=\frac{\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}.$$

Теперь определим значения производных второго порядка при найденных значениях α и h:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial h^2}=\frac{2S}{h^3};\quad \frac{\partial^3 L}{\partial \alpha^2}=2\frac{1-\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^3\alpha}h;\quad \frac{\partial^2 L}{\partial\alpha\,\partial h}=\frac{1-2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Находим числа A, B и C:

$$A=\frac{6}{\sqrt{S}\sqrt[4]{3}};\ B=0;\ C=\frac{4}{3}\sqrt[4]{3}\sqrt{S};$$

$$\Delta=AC-B^2=\frac{6}{\sqrt[4]{S}\sqrt[4]{3}}\frac{4}{3}\sqrt[4]{3}\sqrt{S}>0.$$

Значит, экстремум есть, а так как $A>0$, то при найденных значениях h и α функция L достигает минимума, и $L_{\min}=2\sqrt{S}\sqrt[4]{3}$.

Задача 42,14. Два пункта P_1 и P_2 отстоят от двух пересекающихся под прямым углом прямых, которые принимаются за оси прямоугольной системы координат Ox и Oy, на расстояния соответственно равные: $x_1=a_1$, $S_1=b_1$; $x_2=a_2$, $y_2=b_2$ (все эти числа положительны). P_1 и P_2 надо соединить телеграфным проводом так, чтобы провод сначала шел к какой-нибудь точке Q_1, на положительной части оси Ox, от нее к точке Q_2 на положительной части оси Oy, а после этого — от Q_2 к P_2 (фиг. 42,3), где на осях Ox и Oy надо поместить точки Q_1 и Q_2, чтобы длина телеграфной линии была наименьшей?

Решение. Все обозначения указаны на фиг. 42,3. Длина телеграфной линии

$$L=P_1Q_1+Q_1Q_2+Q_2P_2;$$

$$P_1Q_1=\sqrt{b_1^2+(a_1-x)^2};\ Q_1Q_2=\sqrt{x^2+y^2};\ Q_2P_2=\sqrt{a_2^2+(b_2-y)^2};$$

$$L=\sqrt{b_1^2+(a_1-x)^2}+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{a_2^2+(b_2-y)^2}$$

Z — функция двух независимых переменных — x и y. Приступаем к определению стационарных точек:

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-\frac{a_1-x}{\sqrt{b_1^2+(a_1-x)^2}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

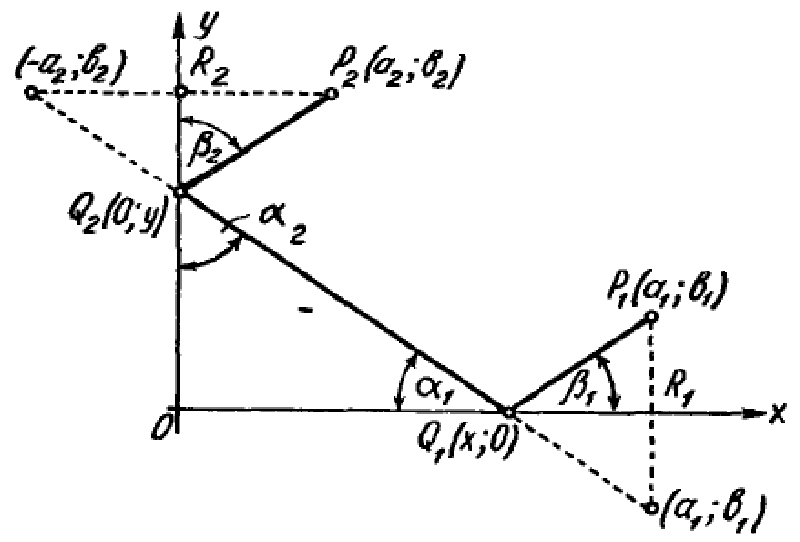
$$\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{b_2-y}{\sqrt{a_2^2+(b_2-y)^2}}.$$

Решаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} -\frac{a_1 - x}{\sqrt{b_1^2 + (a_1 - x)^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \\ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{b^2 - y}{\sqrt{a_2^2 + (b_2 - y)^2}} = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Запишем уравнения системы так:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{a_1 - x}{\sqrt{b_1^2 + (a_1 - x)^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{b_2 - y}{\sqrt{a_2^2 + (b_2 - y)^2}} \end{aligned}\right\}. \qquad (A)$$



Фиг. 42,3

Возводя в квадрат обе части каждого уравнения, получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \frac{(a_1 - x)^2}{b_1^2 + (a_1 - x)^2} \\ \frac{y^2}{x^2 + y^2} = \frac{(b_2 - y)^2}{a_2^2 + (b_2 - y)^2} \end{aligned}\right\}.$$

Отсюда следует, что

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2 + y^2}{x^2} = \frac{b_1^2 + (a_1 - x)^2}{(a_1 - x)^2} \\ \frac{x^2 + y^2}{y^2} = \frac{a_2^2 + (b_2 - y)^2}{(b_2 - y)^2} \end{aligned}\right\}.$$

Поэтому

$$\left.\begin{aligned} 1+\frac{y^2}{x^2}&=\frac{b_1^2}{(a_1-x)^2}+1\\ \frac{x^2}{y^2}+1&=\frac{a_2^2}{(b_2-y)^2}+1 \end{aligned}\right\}.$$

После очевидных упрощений получаем

$$\left.\begin{aligned} \frac{y^2}{x^2}&=\frac{b_1^2}{(a_1-x)^2}\\ \frac{x^2}{y^2}&=\frac{a_2^2}{(b_2-y)^2} \end{aligned}\right\},\quad \text{или}\quad \left.\begin{aligned} \frac{y}{x}&=\frac{b_1}{a_1-x}\\ \frac{x}{y}&=\frac{a_2}{b_2-y} \end{aligned}\right\}.$$

Перемножая почленно уравнения последней системы, получим

$$1=\frac{a_2b_1}{(a_1-x)(b_2-y)};\quad a_1-x=\frac{a_2b_1}{b_2-y}.$$

Отсюда

$$x=a_1-\frac{a_2b_1}{b_2-y}=\frac{a_1b_2-a_1y-a_2b_1}{b_2-y}.$$

Но из второго уравнения последней системы следует, что $x=\frac{a_2y}{b_2-y}$. Сравнивая это значение с только что полученным, имеем

$$\frac{a_2y}{b_2-y}=\frac{a_1b_2-a_1y-a_2b_1}{b_2-y},$$

откуда следует, что

$$a_2y=a_1b_2-a_1y-a_2b_1,$$

или

$$a_1y+a_2y=a_1b_2-a_2b_1;$$

$$y=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1+a_2}.$$

Определите самостоятельно x; получите $x=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{b_1+b_2}$, причем $a_1b_2-a_2b_1>0$, так как $x>0$ и $y>0$ по условию. Значения x и y можно определить значительно проще, если рассмотреть геометрическое значение уравнений системы (A) (вообще от такого истолкования никогда не следует отказываться, так как оно часто приводит к значительным упрощениям).

В первом уравнении системы (A)

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\cos\alpha_1;\quad \frac{a_1-x}{\sqrt{b_1^2+(a_1-x)^2}}=\cos\beta_1,$$

а потому

$$\cos\alpha_1=\cos\beta_1 \text{ и } \alpha_1=\beta_1.$$

Второе уравнение системы (A) дает:

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\alpha_2; \ \frac{b_2-y}{\sqrt{a_2^2+(b_2-y)^2}} = \cos\beta_2 \ \text{ и } \ \alpha_2 = \beta_2.$$

Из этого мы заключаем, что треугольники $P_1Q_1R_1$, Q_1OQ_2 и $P_2Q_2R_2$ подобны, т. к. они имеют по равному острому углу.

Из подобия треугольников следует, что $\frac{b_1}{a_1-x} = \frac{y}{x} = \frac{b_2-y}{a_2}$. Отсюда уже просто можно найти значения x и y, которые были найдены раньше.

Теперь самостоятельно докажите, что

1) найденные значения x и y доставляют функции L минимум;

2) кратчайшая длина провода $L_{\text{наим.}} = \sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}$;

3) для построения точек Q_1 и Q_2 следует поступить так: перпендикуляры P_1R_1 и P_2R_2 продолжить за точки R_1 и R_2 на расстояния, равные этим перпендикулярам, и концы полученных отрезков соединить прямой линией. Эта линия пересечет ось Ox в точке Q_1, а ось Oy в точке Q_2 (следует написать уравнение прямой, проходящей через точки $(a_1, -b_1)$ и $(-a_2, b_2)$ и найти координаты точек пересечения этой прямой с координатными осями).

Задача 42,15 (для самостоятельного решения). Число a разделить на три слагаемых так, чтобы произведение этих трех слагаемых было наибольшим.

Ответ. Каждое слагаемое равно $\frac{a}{3}$ (полученный результат допускает простое геометрическое истолкование: из всех прямоугольных параллелепипедов, у которых сумма трех измерений есть величина постоянная, равная a, наибольший объем имеет куб с ребром, равным $\frac{a}{3}$).

Задача 42,16 (для самостоятельного решения). Требуется изготовить из жести коробку без крышки в виде прямоугольного параллелепипеда заданного объема V так, чтобы затрата материала была наименьшей. Определить размеры коробки.

Ответ. Основание параллелепипеда — квадат со стороной $a = \sqrt[3]{V}$, а высота его $h = \frac{\sqrt[3]{V}}{2}$.

Задача 42,17. Задано n неподвижных материальных точек P_i с массами m_i и координатами $P_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, 3 \ldots, n)$. Найти координаты x и y точки $P(x, y)$, для которой сумма квадратов ее расстояний от этих неподвижных точек, помноженных на массу соответствующих точек имеет наименьшее значение.

Указание. Искомая сумма

$$S=\sum_{i=1}^{n} m_i\,[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2].$$

Ответ.

$$x=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n};\quad y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+\cdots+m_ny_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}.$$

СОРОК ТРЕТЬЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Если на поверхности через точку M на ней провести всевозможные кривые и к ним в этой точке провести касательные прямые (они называются касательными к поверхности), то окажется, что все эти касательные лежат в одной плоскости, которая называется касательной плоскостью к поверхности в точке M, а перпендикуляр к касательной плоскости, восстановленный к ней в точке касания M, называется нормалью к поверхности.

1. Если поверхность задана уравнением $z=f(x,\ y)$, разрешенным относительно z (т. е. в явной форме), а точка касания M имеет координаты $(x_0,\ y_0,\ z_0)$, то уравнение касательной плоскости записывается так:

$$z-z_0=z'_x(x_0,\ y_0)(x-x_0)+z'_y(x_0,\ y_0)(y-y_0), \tag{43,1}$$

а нормаль к поверхности в точке M определяется уравнением

$$\frac{x-x_0}{z'_x(x_0,\ y_0)}=\frac{y-y_0}{z'_y(x_0,\ y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}. \tag{43,2}$$

Символы $z'_x(x_0,\ y_0)$ и $z'_y(x_0,\ y_0)$ означают, что производные функции $z=f(x,\ y)$ вычислены при значениях $x=x_0$, $y=y_0$.

2. Если поверхность определена уравнением $f(x,\ y,\ z)=0$, неразрешенным относительно z (уравнение поверхности задано в неявной форме), а точка касания имеет координаты $(x_0,\ y_0,\ z_0)$, то касательная плоскость определяется уравнением

$$f'_x(x_0,\ y_0,\ z_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,\ y_0,\ z_0)(y-y_0)+$$
$$+f'_z(x_0,\ y_0,\ z_0)(z-z_0)=0, \tag{43,3}$$

а нормаль к поверхности в точке $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,\ y_0,\ z_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,\ y_0,\ z_0)}=\frac{z-z_0}{f'_z(x_0,\ y_0,\ z_0)}. \tag{43,4}$$

Символы $f'_x(x_0,\ y_0,\ z_0)$, $f'_y(x_0,\ y_0,\ z_0)$, $f'_z(x_0,\ y_0,\ z_0)$ означают частные производные функции $f(x,\ y,\ z)$ вычисленные для значений $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$.

Задача 43,1. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 + 3y^2$ в точке, для которой $x = 1$; $y = 1$.

Решение. Прежде всего определим аппликату точки касания: $z(1,1) = 1^2 + 3 \cdot 1^2 = 4$. Итак, точка касания имеет координаты (1, 1, 4), т. е. $x_0 = 1$; $y_0 = 1$; $z_0 = 4$. Так как уравнение поверхности разрешено относительно z, то касательная плоскость и нормаль определяются уравнениями (43,1) и (43,2). Определяем частные производные функции $z: z'_x(x, y) = 2x$; $z'_y(x, y) = 6y$. Вычислим теперь значения частных производных в точке касания: $z'_x(1, 1) = 2$; $z'_y(1, 1) = 6$.

Подставляя эти значения и координаты точки касания в уравнения (43,1) и (43,2), получим уравнение касательной плоскости $z - 4 = 2(x - 1) + 6(y - 1)$, или $2x + 6y - z - 4 = 0$. Уравнение нормали $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-4}{-1}$.

Задача 43,2 (для самостоятельного решения). Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхностям:

1) к эллиптическому параболоиду $z = 2x^2 + y^2$ в точке (1, 1, 3);

2) к поверхности $z = x^4 + 2x^2y - xy + x$ в точке (1, 0, 2);

3) к гиперболическому параболоиду $z = xy$ в точке (1, 2, 2).

Ответ.

1) $4x + 2y - z - 3 = 0; \frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-1}$;

2) $5x + y - z - 3 = 0; \quad \frac{x-1}{5} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-2}{-1}$;

3) $2x + y - z - 2 = 0; \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

Задача 43,3. Определить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности
$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z - 1 = 0$ в точке $M(1, 2, 2)$.

Решение. Здесь уравнение поверхности задано в неявной форме (оно не разрешено относительно z), а потому касательная плоскость и нормаль к поверхности определяется уравнениями (43,3) и (43,4). Обозначим левую часть уравнения поверхности через $f(x, y, z)$, найдем частные производные этой функции и их значения в точке касания M: $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_M$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_M$ и $\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_M$,

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z - 1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_M = 2 \cdot 1 - 4 = -2;$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 2y + 6; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_M = 2 \cdot 2 + 6 = 10;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z - 8; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_M = 2 \cdot 2 - 8 = -4.$$

Подставляя найденные значения частных производных и координаты точек касания в уравнения (43,3) и (43,4), получим уравнение касательной плоскости

$-2(x-1)+10(y-2)-4(z-2)=0,$ или $x-5y+2z+5=0;$
уравнение нормали

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z-2}{2}.$$

Задача 43,4 (для самостоятельного решения). Определить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхностям в заданных на них точках:

1) $x^2+y^2-x+2y+4z-13=0$ в точке $(2, 1, 2)$;

2) $x^2+2y^2-3z^2+xy+yz-2xz+16=0$ в точке $(1, 2, 3)$;

3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ в точке (x_0, y_0, z_0).

Ответ.

1) $3x+4y+4z-18=0;\ \frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-2}{4};$

2) $x-6y+9z-16=0;\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z-3}{9};$

3) $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1,\ \frac{x-x_0}{\frac{x_0}{a^2}}=\frac{y-y_0}{\frac{y_0}{b^2}}=\frac{z-z_0}{\frac{z_0}{c^2}}.$

Указание к пункту 3). Воспользоваться тем, что $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1.$

Задача 43, 5 (для самостоятельного решения). Определить уравнение той касательной плоскости к эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, которая отсекает равные отрезки на координатных осях.

Указание. Воспользоваться уравнением, полученным при решении предыдущей задачи. Отрезки, отсекаемые этой плоскостью на координатных осях, равны: $\frac{a^2}{x_0};\ \frac{b^2}{y_0};\ \frac{c^2}{z_0}$.

По условию задачи $\frac{a^2}{x_0}=\frac{b^2}{y_0}=\frac{c^2}{z_0}$.

Обозначив каждое из этих отношений через k, получим

$$x_0=\frac{a^2}{k};\ y_0=\frac{b^2}{k};\ z_0=\frac{c^2}{k}.$$

Так как точка (x_0, y_0, z_0) — точка касания, то ее координаты удовлетворяют уравнению поверхности, а потому, подставляя полученные значения x_0, y_0, z_0 вместо текущих в уравнение эллипсоида, получим

$$\frac{a^2}{k^2}+\frac{b^2}{k^2}+\frac{c^2}{k^2}=1,\ \text{а}\ k=\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2};$$

тогда

$$x_0=\frac{a^2}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\ y_0=\frac{b^2}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\ z_0=\frac{c^2}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Подставляя эти значения в уравнение касательной плоскости к эллипсоиду, полученное в предыдущей задаче, имеем окончательно

$$x+y+z\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}=0.$$

Задача 43,6 (для самостоятельного решения). В какой точке эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ нормаль к нему образует равные углы с осями координат?

Указание. Из уравнения нормали к эллипсоиду, полученного в задаче 43,4, следует, что направляющие косинусы нормали равны:

$$\cos\alpha=\frac{x_0}{a^2A};\ \cos\beta=\frac{y_0}{b^2A};\ \cos\gamma=\frac{z_0}{c^2A},$$

где

$$A=\pm\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}.$$

Из условия задачи следует, что

$$\frac{x_0}{a^2A}=\frac{y_0}{b^2A}=\frac{z_0}{c^2A},$$

или

$$x_0=Aa^2k;\ y_0=Ab^2k;\ z_0=Ac^2k,$$

где k — общее значение написанных выше отношений. Так как точка $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$ — точка касания, то ее координаты удовлетворяют уравнению эллипсоида, а потому

$$A^2a^2k^2+A^2b^2k^2+A^2c^2k^2=1;\ Ak=\pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};$$

координаты точки, удовлетворяющей условию задачи,

$$x_0=\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\ y_0=\pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\ z_0=\pm\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Задача 43,7. К поверхности $x^2+3y^2+z^2=1$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $2x+4y+z=0$.

Решение. Запишем уравнение поверхности в виде $f(x,\ y,\ z)=x^2+3y^2+z^2-1=0$. Обозначим координаты точки касания M через $x_0,\ y_0,\ z_0$. Определим значения частных производных функции $f(x,\ y,\ z)$ в этой точке:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x;\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_M=2x_0;\quad \frac{\partial f}{\partial y}=6y;\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_M=6y_0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=2z;\ \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_M=2z_0.$$

Уравнение касательной плоскости запишется в виде (43,3):

$$x_0(x-x_0)+3y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)=0.$$

Так как точка касания $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$ принадлежит поверхности, то $x_0^2+3y_0^2+z_0^2=1$ и уравнение касательной плоскости может быть записано так:

$$x_0x+3y_0y+z_0z-1=0 \qquad \text{(A)}$$

Из условия параллельности этой плоскости и заданной в условии задачи плоскости $2x+4y+z=0$ следует, что

$$\frac{x_0}{2}=\frac{3y_0}{4}=\frac{z_0}{1}.$$

Обозначая каждое отношение через k, получим, что

$$x_0=2k;\ y_0=\frac{4}{3}k;\ z_0=k.$$

Подставляя эти значения в уравнение поверхности, получим:

$$4k^2+3\cdot\frac{16}{9}k^2+k^2=1.$$

Откуда $k=\pm\frac{3}{\sqrt{93}}$ и, значит,

$$x_0=\pm\frac{6}{\sqrt{93}};\quad y_0=\pm\frac{4}{\sqrt{93}};\quad z_0=\pm\frac{3}{\sqrt{93}}.$$

Подставляя это значение в уравнение (A), получим окончательно уравнение касательной плоскости:

$$2x+4y+z=\pm\frac{\sqrt{93}}{3}.$$

Таким образом, оказалось, что условию задачи удовлетворяют две плоскости.

Задача 43,8 (для самостоятельного решения). К поверхности $x^2+2y^2+z^2=1$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $x-y+2z=0$

Ответ. $x-y+2z\pm\sqrt{\frac{11}{2}}=0.$