

**C1** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y + \cos x = 0, \\ (2\sqrt{\cos x} - 1)(4y - 2) = 0. \end{cases}$$

Решение.

Из второго уравнения получаем: 
$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}, & \text{или } \cos x = \frac{1}{4} \\ \cos x \geq 0 \end{cases}$$

Если  $y = \frac{1}{2}$ , то из первого уравнения  $\cos x = -\frac{1}{2}$ . Это противоречит условию  $\cos x \geq 0$ .

Если  $\cos x = \frac{1}{4}$ , то  $x = \pm \arccos \frac{1}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ , и из первого уравнения получаем:  $y = -\frac{1}{4}$ .

Ответ:  $\left( \pm \arccos \frac{1}{4} + 2\pi n; -\frac{1}{4} \right), n \in \mathbb{Z}$ .

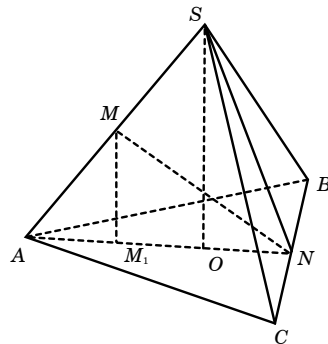
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Получен ответ, но решение неверно только из-за того, что не учтены ограничения на знак или величину выражения $\cos x$ ( $\sin x$ )	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

**C2** В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  с основанием  $ABC$  известны ребра:  $AB = 8\sqrt{3}$ ,  $SC = 10$ . Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины ребер  $AS$  и  $BC$ .

Решение.

Пусть  $M$  и  $N$  – середины ребер  $AS$  и  $BC$  соответственно. Прямая  $AS$  проектируется на плоскость основания в прямую  $AN$ . Поэтому проекция точки  $M$  – точка  $M_1$  – лежит на отрезке  $AN$ . Значит, прямая  $AN$  является проекцией прямой  $MN$ , следовательно, угол  $MNM_1$  – искомый.

$MM_1 \parallel SO$ , где  $O$  – центр основания, значит,  $MM_1$  – средняя линия треугольника  $ASO$ , а поэтому  $M_1$  – середина  $AO$ . Тогда



$$AM_1 = \frac{1}{3} AN = 4 \text{ и } M_1N = \frac{2}{3} AN = 8.$$

Из прямоугольного треугольника  $AM_1M$  находим:

$$MM_1 = \sqrt{AM^2 - AM_1^2} = \sqrt{25 - 16} = 3.$$

Из прямоугольного треугольника  $MM_1N$  находим:

$$\operatorname{tg} \angle MNM_1 = \frac{MM_1}{M_1N} = \frac{3}{8}.$$

Значит, искомый угол равен  $\operatorname{arctg} \frac{3}{8}$ .

Ответ:  $\operatorname{arctg} \frac{3}{8}$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

**C3** Решите неравенство

$$\log_5 \left( (7^{-x^2} - 3) (7^{-x^2+16} - 1) \right) + \log_5 \frac{7^{-x^2} - 3}{7^{-x^2+16} - 1} > \log_5 (7^{7-x^2} - 1)^2.$$

Решение.

Пусть  $t = 7^{-x^2}$ ,  $0 < t \leq 1$ , тогда неравенство принимает вид:

$$\log_5 \left( (t-3)(7^{16}t-1) \right) + \log_5 \frac{t-3}{7^{16}t-1} > \log_5 (7^7t-1)^2.$$

$t-3 < 0$ , поэтому  $7^{16}t-1 < 0$ , то есть  $0 < t < \frac{1}{7^{16}}$ .

$$\text{Получаем: } \begin{cases} \log_5(t-3)^2 > \log_5(7^7t-1)^2, \\ 0 < t < \frac{1}{7^{16}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |t-3| > |7^7t-1|, \\ 0 < t < \frac{1}{7^{16}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-t > 1-7^7t, \\ 0 < t < \frac{1}{7^{16}} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < t < \frac{1}{7^{16}}.$$

$$\text{Тогда } 7^{-x^2} < 7^{-16} \Leftrightarrow x^2 > 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x < -4. \end{cases}$$

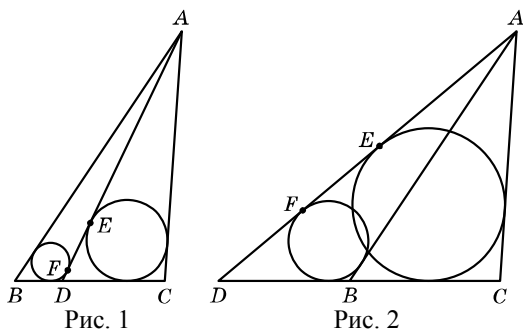
Ответ:  $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом точек	2
Полученный ответ неверен, но решение содержит переход от исходного неравенства к верным рациональным неравенствам	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

**C4** В треугольнике  $ABC$   $AB=11$ ,  $BC=4$ ,  $CA=9$ . Точка  $D$  лежит на прямой  $BC$  так, что  $BD:DC=1:6$ . Окружности, вписанные в каждый из треугольников  $ADC$  и  $ADB$ , касаются стороны  $AD$  в точках  $E$  и  $F$ . Найдите длину отрезка  $EF$ .

Решение.

Пусть  $AD=d$ ,  $BD=x$ ,  $DC=y$ . Возможны два случая:



1. Точка  $D$  лежит на отрезке  $BC$  (рис. 1). Тогда  $x=\frac{4}{7}$ ,  $y=\frac{24}{7}$ ,  
 $DE=\frac{d+y-9}{2}$ ,  $DF=\frac{d+x-11}{2}$ . Значит,  $EF=\frac{2+y-x}{2}=\frac{17}{7}$ .

2. Точка  $D$  лежит вне отрезка  $BC$  (рис. 2). Тогда  $x=\frac{4}{5}$ ,  $y=x+4=\frac{24}{5}$ ,  
 $DE=\frac{d+y-9}{2}$ ,  $DF=\frac{d+x-11}{2}$ . Значит,  $EF=3$ .

Ответ: 3 или  $\frac{17}{7}$ .

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

**C5** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых функция  $f(x)=x^2-3|x-a^2|-5x$  имеет хотя бы одну точку максимума.

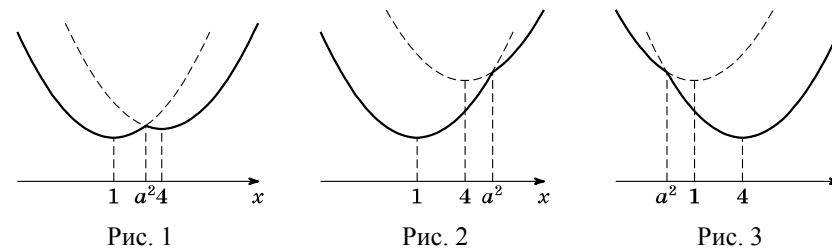
Решение.

1. Функция  $f$  имеет вид:

а) при  $x \geq a^2$ :  $f(x)=x^2-8x+3a^2$ , поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии  $x=4$ ;

б) при  $x \leq a^2$ :  $f(x)=x^2-2x-3a^2$ , поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии  $x=1$ .

Все возможные виды графика функции  $f(x)$  показаны на рисунках:



2. Ни одна из квадратичных функций, описанных в пунктах а и б, не имеет точек максимума. Графики обеих функций проходят через точку  $(a^2; f(a^2))$ .

3. Единственной точкой максимума функции  $f(x)$  может быть точка  $x=a^2$  (рис. 1), причем она действительно является таковой тогда и только тогда, когда  $1 < a^2 < 4 \Leftrightarrow 1 < |a| < 2$ .

Ответ:  $-2 < a < -1$ ;  $1 < a < 2$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решений условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр либо построен верный эскиз графика функции в целом	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

**С6**

Перед каждым из чисел 2, 3, ..., 6 и 11, 12, ..., 19 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 45 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение.

1. Если все числа взяты со знаком плюс, то их сумма максимальна и равна  $9(2 + \dots + 6) + 5(11 + \dots + 19) = 9\left(\frac{2+6}{2} \cdot 5\right) + 5\left(\frac{11+19}{2} \cdot 9\right) = 45 \cdot 19 = 855$ .

2. Так как предыдущая сумма оказалась нечетной, то число нечетных слагаемых в ней – нечетно, причем это свойство всей суммы не меняется при смене знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из получающихся сумм будет нечетной, а значит, не будет равна 0.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при следующей расстановке знаков у чисел:

$$9(2 - 3 + 4 - 5 + 6) + 5(-11 - 12 + 13 - 14 + 15 - 16 + 17 - 18 + 19) = 9 \cdot 4 - 5 \cdot 7 = 36 - 35 = 1.$$

Ответ: 1 и 855.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован (например, не доказано, что либо сумма отлична от 0, либо что она может быть равна 1)	3
Верно найдено наибольшее значение суммы и доказано, что она всегда отлична от 0	2
Верно найдено только наибольшее значение суммы или только доказано, что она всегда отлична от 0	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0