C1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-\cos x=0, \\ (3\sqrt{\cos x}-1)(3y-4)=0. \end{cases}$$

Решение.

Из второго уравнения получаем: $\begin{cases} y=\dfrac{4}{3}, \\ \cos x\ge 0 \end{cases}$ или $\cos x=\dfrac{1}{9}$.

Если $y=\dfrac{4}{3}$, то из первого уравнения $\cos x=\dfrac{4}{3}$. Уравнение не имеет решений.

Если $\cos x=\dfrac{1}{9}$, то $x=\pm\arccos\dfrac{1}{9}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$, и из первого уравнения получаем: $y=\dfrac{1}{9}$.

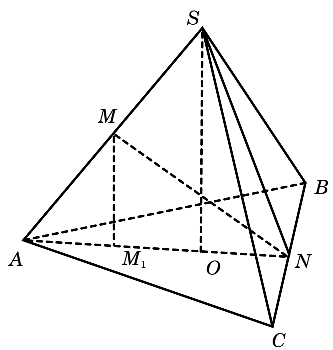
Ответ: $\left(\pm\arccos\dfrac{1}{9}+2\pi n;\ \dfrac{1}{9}\right),\ n\in\mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Получен ответ, но решение неверно только из-за того, что не учтены ограничения на знак или величину выражения $\cos x$ ($\sin x$)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C2 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны ребра: $AB=24\sqrt{3}$, $SC=25$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины ребер AS и BC.

Решение.

Пусть M и N – середины ребер AS и BC соответственно. Прямая AS проектируется на плоскость основания в прямую AN. Поэтому проекция точки M – точка M_1 – лежит на отрезке AN. Значит, прямая AN является проекцией прямой MN и, следовательно, угол MNM_1 – искомый.



$MM_1 \| SO$, где O – центр основания, значит, MM_1 – средняя линия треугольника ASO, а поэтому M_1 – середина AO.

Тогда $AM_1=\dfrac{1}{3}AN=12$ и $M_1N=\dfrac{2}{3}AN=24$.

Из прямоугольного треугольника AM_1M находим:

$$MM_1=\sqrt{AM^2-AM_1^2}=\sqrt{\frac{625}{4}-144}=\frac{7}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника MM_1N находим:

$$\operatorname{tg}\angle MNM_1=\frac{MM_1}{M_1N}=\frac{7}{48}.$$

Значит, искомый угол равен $\operatorname{arctg}\dfrac{7}{48}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{7}{48}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C3 Решите неравенство

$$\log_2\left(\left(7^{-x^2}-4\right)\left(7^{-x^2+16}-1\right)\right)+\log_2\frac{7^{-x^2}-4}{7^{-x^2+16}-1}>\log_2\left(7^{6-x^2}-3\right)^2.$$

Решение.

Пусть $t=7^{-x^2}$, $0<t\le 1$, тогда неравенство принимает вид:

$$\log_2\left((t-4)\left(7^{16}t-1\right)\right)+\log_2\frac{t-4}{7^{16}t-1}>\log_2\left(7^6t-3\right)^2.$$

$t-4<0$, поэтому $7^{16}t-1<0$, то есть $0<t<\dfrac{1}{7^{16}}$.

Получаем: $\begin{cases}\log_2(t-4)^2>\log_2\left(7^6t-3\right)^2, \\ 0<t<\dfrac{1}{7^{16}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|t-4|>|7^6t-3|, \\ 0<t<\dfrac{1}{7^{16}}\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}4-t>3-7^6t, \\ 0<t<\dfrac{1}{7^{16}}\end{cases} \Leftrightarrow 0<t<\dfrac{1}{7^{16}}$.

Тогда $7^{-x^2}<7^{-16} \Leftrightarrow x^2>16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>4 \\ x<-4. \end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty;\ -4)\cup(4;+\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом точек	2
Полученный ответ неверен, но решение содержит переход от исходного неравенства к верным рациональным неравенствам	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C4 В треугольнике ABC $AB=15$, $BC=7$, $CA=9$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD:DC=2:3$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

Решение.

Пусть $AD=d$, $BD=x$, $DC=y$. Возможны два случая:

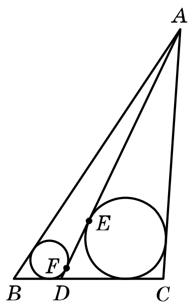


Рис. 1

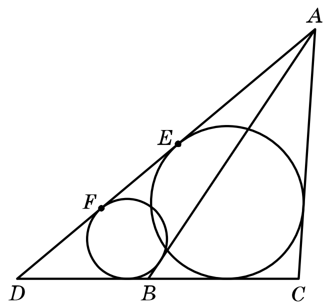


Рис. 2

1. Точка D лежит на отрезке BC (рис. 1). Тогда $x=\frac{14}{5}$, $y=\frac{21}{5}$, $DE=\frac{d+y-9}{2}$, $DF=\frac{d+x-15}{2}$. Значит, $EF=\frac{6+y-x}{2}=\frac{37}{10}$.

2. Точка D лежит вне отрезка BC (рис. 2). Тогда $x=14$, $y=x+7=21$, $DE=\frac{d+y-9}{2}$, $DF=\frac{d+x-15}{2}$. Значит, $EF=\frac{13}{2}$.

Ответ: $\frac{13}{2}$ или $\frac{37}{10}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых функция $f(x)=x^2-|x-a^2|-9x$ имеет хотя бы одну точку максимума.

Решение.

1. Функция f имеет вид:

а) при $x\ge a^2$: $f(x)=x^2-10x+a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=5$;

б) при $x\le a^2$: $f(x)=x^2-8x-a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=4$.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках:

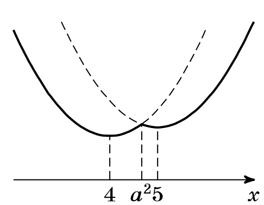


Рис. 1

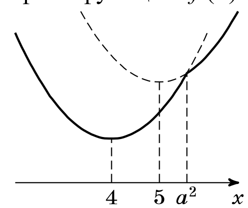


Рис. 2

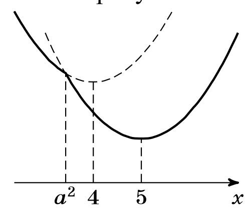


Рис. 3

2. Ни одна из квадратичных функций, описанных в пунктах *а* и *б*, не имеет точек максимума. Графики обеих функций проходят через точку $(a^2; f(a^2))$.

3. Единственной точкой максимума функции $f(x)$ может быть точка $x=a^2$ (рис. 1), причем она действительно является таковой тогда и только тогда, когда $4<a^2<5 \ \Leftrightarrow\ 2<|a|<\sqrt{5}$.

Ответ: $-\sqrt{5}<a<-2;\ 2<a<\sqrt{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решений условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр либо построен верный эскиз графика функции в целом	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C6 Перед каждым из чисел 6, 7, …, 10 и 11, 12, …, 19 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 45 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение.

1. Если все числа взяты со знаком плюс, то их сумма максимальна и равна

$$9(6+\ldots+10)+5(11+\ldots+19)=9\left(\frac{6+10}{2}\cdot 5\right)+5\left(\frac{11+19}{2}\cdot 9\right)=45\cdot 23=1035.$$

2. Так как предыдущая сумма оказалась нечетной, то число нечетных слагаемых в ней – нечетно, причем это свойство всей суммы не меняется при смене знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из получающихся сумм будет нечетной, а значит, не будет равна 0.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при следующей расстановке знаков у чисел:

$$9(6+7-8+9-10)+5(-11-12+13-14+15-16+17-18+19)=$$
$$=9\cdot 4-5\cdot 7=36-35=1.$$

Ответ: 1 и 1035.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован (например, не доказано, что либо сумма отлична от 0, либо что она может быть равна 1)	3
Верно найдено наибольшее значение суммы и доказано, что она всегда отлична от 0	2
Верно найдено только наибольшее значение суммы или только доказано, что она всегда отлична от 0	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0