C1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y+\sin x=0, \\ (4\sqrt{\sin x}-1)(2y+3)=0. \end{cases}$$

Решение.

Из второго уравнения получаем $\begin{cases} y=-\dfrac{3}{2}, \\ \sin x\geq 0 \end{cases}$ или $\sin x=\dfrac{1}{16}$.

Если $y=-\dfrac{3}{2}$, то из первого уравнения $\sin x=\dfrac{3}{2}$. Уравнение не имеет решений.

Если $\sin x=\dfrac{1}{16}$, то $x=(-1)^n\arcsin\dfrac{1}{16}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$, и из первого уравнения получаем: $y=-\dfrac{1}{16}$.

Ответ: $\left((-1)^n\arcsin\dfrac{1}{16}+\pi n;\ -\dfrac{1}{16}\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.

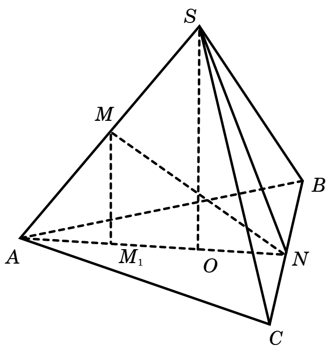
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Получен ответ, но решение неверно только из-за того, что не учтены ограничения на знак или величину выражения $\cos x$ $(\sin x)$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C2 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны ребра: $AB=5\sqrt{3}$, $SC=13$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины ребер AS и BC.

Решение.

Пусть M и N – середины ребер AS и BC соответственно. Прямая AS проектируется на плоскость основания в прямую AN. Поэтому проекция точки M – точка M_1 – лежит на отрезке AN. Значит, прямая AN является проекцией прямой MN, следовательно, угол MNM_1 – искомый.

$MM_1 \parallel SO$, где O – центр основания, значит, MM_1 – средняя линия треугольника ASO, а поэтому M_1 – середина AO.



Тогда $AM_1=\dfrac{1}{3}AN=\dfrac{5}{2}$ и $M_1N=\dfrac{2}{3}AN=5$.

Из прямоугольного треугольника AM_1M находим:

$MM_1=\sqrt{AM^2-AM_1^2}=\sqrt{\dfrac{169}{4}-\dfrac{25}{4}}=6$.

Из прямоугольного треугольника MM_1N находим:

$\operatorname{tg}\angle MNM_1=\dfrac{MM_1}{M_1N}=\dfrac{6}{5}$.

Значит, искомый угол равен $\operatorname{arctg}\dfrac{6}{5}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{6}{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C3 Решите неравенство

$$\log_2\left(\left(7^{-x^2}-5\right)\left(7^{-x^2+4}-1\right)\right)+\log_2\frac{7^{-x^2}-5}{7^{-x^2+4}-1}>\log_2\left(7^{3-x^2}-4\right)^2.$$

Решение.

Пусть $t=7^{-x^2}, 0<t\leq 1$, тогда неравенство принимает вид:

$\log_2((t-5)(7^4t-1))+\log_2\dfrac{t-5}{7^4t-1}>\log_2(343t-4)^2$.

$t-5<0$, поэтому $7^4t-1<0$, то есть $0<t<\dfrac{1}{7^4}$.

Получаем: $\begin{cases} \log_2(t-5)^2>\log_2(343t-4)^2, \\ 0<t<\dfrac{1}{7^4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |t-5|>|343t-4|, \\ 0<t<\dfrac{1}{7^4} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5-t>4-343t, \\ 0<t<\dfrac{1}{7^4} \end{cases} \Leftrightarrow 0<t<\dfrac{1}{7^4}$.

Тогда $7^{-x^2}<7^{-4} \Leftrightarrow x^2>4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<-2. \end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty;\ -2)\cup(2;\ +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом точек	2
Полученный ответ неверен, но решение содержит переход от исходного неравенства к верным рациональным неравенствам	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C4 В треугольнике ABC $AB=10$, $BC=5$, $CA=6$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD:DC=1:2$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

Решение.

Пусть $AD=d$, $BD=x$, $DC=y$. Возможны два случая:

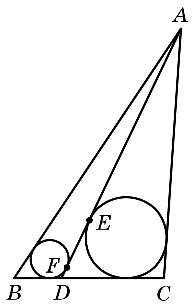


Рис. 1

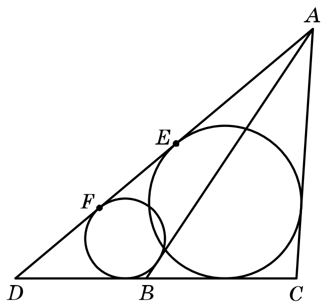


Рис. 2

1. Точка D лежит на отрезке BC (рис. 1). Тогда $x=\dfrac{5}{3}$, $y=\dfrac{10}{3}$, $DE=\dfrac{d+y-6}{2}$, $DF=\dfrac{d+x-10}{2}$. Значит, $EF=\dfrac{4+y-x}{2}=\dfrac{17}{6}$.

2. Точка D лежит вне отрезка BC (рис. 2). Тогда $x=5$, $y=x+5=10$, $DE=\dfrac{d+y-6}{2}$, $DF=\dfrac{d+x-10}{2}$. Значит, $EF=\dfrac{9}{2}$.

Ответ: $\dfrac{9}{2}$ или $\dfrac{17}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых функция $f(x)=x^2-2|x-a^2|-6x$ имеет хотя бы одну точку максимума.

Решение.

1. Функция f имеет вид:

а) при $x\ge a^2$: $f(x)=x^2-8x+2a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=4$;

б) при $x\le a^2$: $f(x)=x^2-4x-2a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=2$.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках:

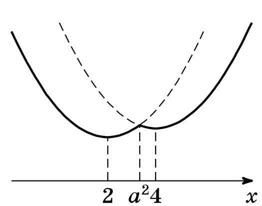


Рис. 1

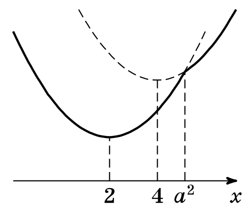


Рис. 2

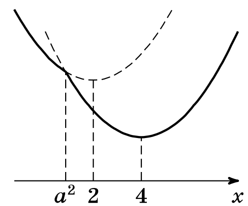


Рис. 3

2. Ни одна из квадратичных функций, описанных в пунктах *а* и *б*, не имеет точек максимума. Графики обеих функций проходят через точку $(a^2; f(a^2))$.

3. Единственной точкой максимума функции может быть точка $x=a^2$ (рис. 1), причем она действительно является таковой тогда и только тогда, когда $2<a^2<4 \iff \sqrt{2}<|a|<2$.

Ответ: $-2<a<-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}<a<2$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решений условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр либо построен верный эскиз графика функции в целом	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C6 Перед каждым из чисел 2, 3, …, 6 и 10, 11, …, 20 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 55 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение.

1. Если все числа взяты со знаком плюс, то их сумма максимальна и равна

$$11(2+\ldots+6)+5(10+\ldots+20)=11\left(\frac{2+6}{2}\cdot 5\right)+5\left(\frac{10+20}{2}\cdot 11\right)=55\cdot 19=1045.$$

2. Так как предыдущая сумма оказалась нечетной, то число нечетных слагаемых в ней – нечетно, причем это свойство всей суммы не меняется при смене знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из получающихся сумм будет нечетной, а значит, не будет равна 0.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при следующей расстановке знаков у чисел:

$$11(-2+3-4+5-6)+5(10+11-12-13+14+15-16-17+18+19-20)=$$
$$=-11\cdot 4+5\cdot 9=-44+45=1.$$

Ответ: 1 и 1045.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован (например, не доказано, что либо сумма отлична от 0, либо что она может быть равна 1)	3
Верно найдено наибольшее значение суммы и доказано, что она всегда отлична от 0	2
Верно найдено только наибольшее значение суммы или только доказано, что она всегда отлична от 0	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0